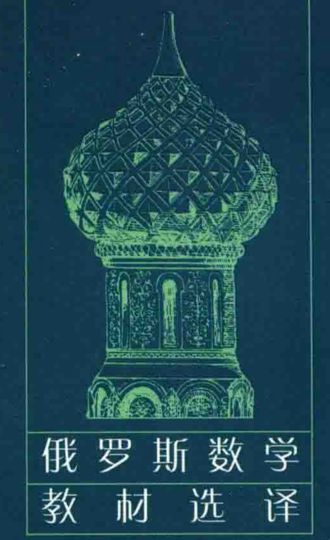
“十一五”国家重点图书



俄罗斯数学教材选译

随机金融数学基础

(第二卷)

理论

□ A. H. 施利亚耶夫 著

□ 史树中 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

总 策 划：张小萍
责任编辑：赵天夫
封面设计：王凌波

“本书反映了（令人赞叹的）俄国教学风格：阐释理论的起源，通常它通过某些特殊的问题；然后，对于所提出的 … 最，后，揭示问题的本质，并生成漂亮的结 …

论

“追随本书的思路，你可以看到作者 …

论

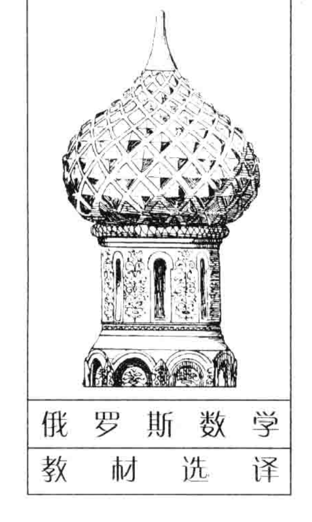
本书原版自 1998 年出版以来，被认为是“随机金融数学方面最深刻的一本著作”。全书共分两卷，每一卷都包含四章。第一卷的副题为：事实·模型。第二卷的副题为：理论。这两卷的内容既相互联系，又相对独立。读者可把本书看作一本“随机金融数学全书”。

第二卷有关“理论”的四章是：“随机金融模型中的套利理论”或“定价理论”；先是“离散时间”，再是“连续时间”。“套利理论”主要指资产定价的第一和第二基本定理：市场无套利机会等价于存在（局部）等价概率鞅测度，使得所有证券的折现价格过程为鞅（第一定理），并且当市场完全时，这样的鞅测度是唯一的（第二定理）。这些定理在近二、三十年的研究中已经近乎尽善尽美，无论对数学还是对金融的发展都有深远影响，但所涉及的数学工具也越来越艰深。作者高瞻远瞩，抓住要害，以他的统一观点来综述这方面从离散模型到连续（半鞅）模型的各种最新成果及其证明，使人一目了然。“定价理论”是指通过投资策略进行风险对冲来对未定权益进行定价的理论。作者通过“（对冲）上价格”和“（对冲）下价格”的概念给出了离散时间的对冲定价公式，并指出它们与等价概率鞅测度之间的联系。由此对经典的 Black-Scholes 期权定价理论作出更加入木三分的数学分析。作者还详尽讨论与最优停止问题和 Stephan 问题相联系的美式期权定价理论。

本书的阐述深入浅出，精致透彻，可供高等院校应用数学和金融工程专业的教师、学生以及广大金融工作者参考使用。


ISBN 978-7-04-037097-3
9 787040 370973
定价 65.00 元

■ 学科类别：金融数学、金融工程
academic.hep.com.cn



俄罗斯数学
教材选译

"十一五"国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

随机金融数学基础

(第二卷)

理论

□ A. H. 施利亚耶夫 著
□ 史树中 译

SUIJI JINRONG SHUXUE JICHU

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字:01 -2007 -3241 号

Ширяев А. Н.

Основы стохастической финансовой математики.

Том 1 : Факты. Модели. 1998

Том 2 : Теория. 1998

Originally published in Russian in the title

Essential of stochastic finance Ⅰ : Facts. Models

Essential of stochastic finance Ⅱ : Theory

By A. N. Shiryaev

图书在版编目(CIP)数据

随机金融数学基础. 第 2 卷,理论/(俄罗斯)施利亚耶夫著;史树中译. -- 北京:高等教育出版社,2013.9

ISBN 978 -7 -04 -037097 -3

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①施… ②史… Ⅲ. ①金融 - 经济数学 Ⅳ. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 060822 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **特约编辑** 张冰峰
封面设计 张申申 **责任绘图** 尹 莉 **责任印制** 张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市四季青双青印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	27.5	版　　次	2013年9月第1版
字　　数	560千字	印　　次	2013年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	65.00元

物 料 号 37097 -00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

译者前言

阿尔伯特 · 尼古拉也维奇 · 施利亚耶夫 (Альберт Николаевич Ширяев, Albert Nikolaevich Shiryaev, 1934—) 为俄罗斯概率论学派当前的领军人物. 1957 年毕业于莫斯科大学数学力学系; 1961 年获得副博士学位; 1967 年获得博士学位. 1970 年成为莫斯科大学教授. 1997 年当选为俄罗斯科学院通讯院士. 曾经获得国内外许多重要奖项和欧洲科学院院士、纽约科学院院士等荣誉称号, 以及荣任 Bernoulli 学会、Bachelier 金融学会等国际学术团体的主席.

施利亚耶夫的导师是 20 世纪最伟大的数学大师之一、概率论公理体系的提出者柯尔莫戈洛夫 (А. Н. Колмогоров, A. N. Kolmogorov, 1903—1987). 柯尔莫戈洛夫有许多杰出的学生, 其中好几位像他一样荣获奖励终生成就的数学最高奖 —— 沃尔夫奖. 但像施利亚耶夫那样完全以概率论为专业研究方向、并且在概率统计的众多领域中都有卓越贡献的学生并不多. 因此, 我们不妨说, 施利亚耶夫是以柯尔莫戈洛夫为代表的俄罗斯概率论学派的 "嫡传正宗". 事实上, 他不但在概率统计的各个领域发表了 150 多篇研究论文, 并且还出版了多部在国际上影响很大的教科书和专著. 他的《概率》教程自 1980 年出版以来, 已经再版多次, 并且还有英文版和德文版. 2004 年又扩展为两卷本, 中文版已由高等教育出版社正式出版. 他的主要专著有《统计序贯分析》(俄文版 1969, 英文版 1978, 并改名为《最优停止法则》),《随机过程的统计》(与 R. Sh. Liptser 合著, 1977, 有英文版和波兰文版),《鞅论》(与 R. Sh. Liptser 合著, 1986, 有英文版),《随机过程的极限定理》(与法国数学家 J. Jacod 合著, 英文版 1987, 俄文版 1994, 英文第二版 2003),《临近性和统计不变原理》(与 P. Greenwood 合著, 1985),《统计试验和决策》(与 V. Spokoiny 合著, 2000),《最优停止和 Stephan 问题》(与 G. Peskir 合著, 2004) 等.

本书是施利亚耶夫关于随机金融数学的一本力作. 正如作者在序言中所说, 本书是为新加坡世界科技出版社 (World Scientific) 主编《统计科学和应用概率论高级丛书》的 Ole E. Barndorff-Nielsen 教授在 1995 年初向他约稿的. 因此, 本书的英文版与俄文版几乎同时问世. 可能是由于作者向世界科技出版社提供的仅仅是俄文手稿, 最后使得两种版本的内容并不完全一致. 除了俄文版的书名为《随机金融数学基础 (Основы Стохастической Финансовой Математики)》, 英文版的书名为《随机金融精华 (Essentials of Stochastic Finance)》以及英文版的译者在翻译时不完全拘泥于原来的表达以外, 它们的不一致中, 有些似乎是俄文版在编辑校订时的增删, 有些似乎是英文版的编译者自行加入的补充. 本书的翻译主要根据俄文版出版者ФАЗИС所提供的俄文影印稿, 但同时也参考了世界科技出版社的英文版. 如果两者在内容上有出入时, 我们干脆 "兼收并蓄"; 只要一种版本上有的, 我们都译出收入. 总体来说, 英文版上有的、俄文版上没有的内容较多, 尤其是有关背景资料. 但俄文版上有的、英文版上没有的内容也有一些. 对这些有差别的地方我们都加了 "译者注". 在翻译过程中, 我们也发现了少量印刷错误. 有的英文版已经更正, 但多半英文版仍保持原样. 我们对一些较重要的印刷错误更正也都加了 "译者注". 此外, 我们还加了少量说明性和资料性的 "译者注". 出于目前国内熟悉俄文的读者较少, 而英文则比较普及, 在我们中译本最后的术语对照索引中, 我们只采用英中对照, 而略去了俄中对照. 对于西文人名, 按照数学专业书籍的常规, 通常不作音译, 而用原人名的拉丁字母标出. 这里我们完全遵照英文版的拉丁字母拼写, 而不是如同原版那样用俄文拼写来表示. 但是我们保留了四个例外, 即对 Brown, Gauss, Poisson, Wiener 这四位学者的姓氏直接译为: 布朗、高斯、泊松、维纳. 这是因为这四个姓氏的音译已经普及, 同时它们又经常变为形容词, 而变为 "布朗运动"、"高斯分布" 等等. 这样在行文时似乎比较自然.

作为一位在前苏联环境下成长起来的数学家, 施利亚耶夫不可能十分熟悉西方的金融市场. 事实上, 作者自己也曾经对人说过①, 在他着手写作本书时, 他对金融理论和实务几乎一无所知. 对此, 本书的每一位读者都一定会感到十分惊讶. 本书中有关全球金融市场和金融学基本理论的叙述非常到位, 很难想象这是一位对金融 "几乎一无所知" 的人的手笔. 当然, "几乎一无所知" 是施利亚耶夫自谦之词. 其实他在当时与丹麦奥尔胡斯的数学研究中心和分析金融中心的关系十分密切. 当他发现他的概率论专长在金融中有那样深刻广泛的应用时, 他一定以极大的热情学习金融知识. 或许我们可以说, 本书中有关金融的许多背景材料正是一位带着深邃严谨的眼光的前苏联数学家看待金融业界的纪要. 对于今天一上来就学萨缪尔森经济学的年青人来说, 可能会感到这样的陈述有点唠叨. 而对于译者这样的学生时代学过苏联版政治经济学的读者来说, 却感到它相当贴切地为你补上了对欧美金融市场了解的不足. 尤其是作者在使用某些术语上的 "旧痕迹", 并不会使你感到突兀, 反而

①这是最近邀请施利亚耶夫到香港访问的香港中文大学教授周迅宇告诉译者的.

有点 “似曾相识感”. 一个典型的例子是 “资本 (капитал)” 这个术语. 在本书中, 它专门指一个证券组合的价值. 在英文文献中, 对它适用的术语是 “价值 (value)”, “资金 (fund)”, “财产 (wealth)” 等等. 但是没有人会用 capital (资本). 英文版把它全改成了 value 或 fund. 而我们仍然把它译成 “资本”. 其实它并不会引起误解, 但却是本书的某种 “特色”. 至于其他术语的翻译, 我们尽量采用 1993 年全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》中所刊载的名词, 以及参考了一些已出版的专业书籍. 但偶而也有一些我们自作主张的翻译. 证券市场术语的翻译在国内还没有统一. 例如, call 作为期权, 在国内有 “买入期权”、“买权”、“看涨期权” 等多种翻译. 在本书的俄文版中, 对这样的术语常常会有音译和意译两种翻译. 而其意译刚好是 “买入期权”, 于是我们当然也采用 “买入期权”, 而不用 “看涨期权” 等等. 这或许也是俄文版给我们带来的某种便利.

尽管作者可能原来对金融业界确实是 “几乎一无所知”, 但是从数学视角来看, 世上大概谁也比不上作者对随机金融数学全部领域更为全面精通. 这或许也说明了为什么从 1990 年代初起, 作者全身心地投入了金融数学研究, 并在俄罗斯带领出一支精锐的金融数学和精算数学的研究队伍. 事实上, 我们从上面列出的施利亚耶夫的专著中就可看到, 虽然这些专著分属概率统计学科的许多相当不同的领域, 却又几乎都是在随机金融数学中得到深刻应用的强有力的工具. 这里不但是 “鞅论” 已经成为表达金融学核心的 “资产定价基本定理” 的基本语言, “随机过程的统计”、“统计试验和决策” 是实证金融分析的基本手段, “随机过程的极限理论” 是连续时间金融学的理论基础, “最优停止法则和 Stephan 问题” 是美式期权定价的基本模型, 即使是很专门的 “临近性和统计不变原理” 也被施利亚耶夫及其学生用来为原来不够严谨的 Ross 的 APT (套利定价理论) 提供了更确切的理论描述. 这使得作者在本书中叙述随机金融数学的理论时, 比任何其他专著更为全面透彻、淋漓尽致.

本书共分两卷. 每一卷都包含四章. 第一卷的副题为: 事实, 模型. 第二卷的副题为: 理论. 这两卷的内容既相互联系, 又相对独立. 事实上, 读者完全可把本书当作一本 “随机金融数学全书” 来读. 每一位读者都可只挑其中自己最感兴趣的部分来精读, 而对其他部分暂时泛读, 甚至不读.

第一卷的第一章是有关国际金融市场以及金融理论和金融工程的 “事实”. 正如我们前面已经提到, 这短短几十页可看作一位前苏联数学家对西方金融市场和金融理论、金融工程的理解. 其中作者不但概述了金融市场的基本状况、金融学的基本概念以及 Markowitz 证券组合选择理论、资本资产定价模型 (CAPM)、Ross 的套利定价理论 (APT)、有效市场理论等等, 甚至还简要地介绍了理论上关系不大、但观念上密切相关的保险业和精算理论, 使读者对金融市场和金融理论有更广泛的了解. 对于非金融专业的读者来说, 这一章是非常难得的尽快进入金融领域的入门读物. 而即使是对于熟悉金融市场和金融学的读者来说, 也能从这一章中看到一位前苏联数学家独特的眼光. 其中尤其值得注意的是作者对有效市场的定义是与众不同的. 他

认为, 一个带有限种基本证券的金融市场称为对某信息流有效, 是指其中存在一种"折现"证券 (通常它就是无风险证券, 但并不限于此) 和某"局部等价" (这一概念比"等价"要弱) 概率测度, 使得所有基本证券关于这一"折现"证券的折现价格过程都关于这一概率测度成为鞅. 这样的定义不但比经典的"随机游走假设"之类或三种有效市场形式的定义更一般, 也比 Ross 提出的"有效市场就是无套利市场"说法在理论上更确切、更精细.

第一卷的后三章都有关金融学的随机"模型". 第二章阐述离散模型. 其中首先讨论金融资产价格的离散动态理论模型, 并且开门见山地提出, 在套利定价的框架中, Doob 分解、局部鞅、鞅变换等概念在价格模型的讨论中起本质作用; 接着讨论具体的价格演变的统计模型, 除了介绍已经广泛流传的移动平均模型、自回归模型及其各种组合的线性模型以外, 作者还相当详尽地介绍近 20 年发展起来的 ARCH 和 GARCH 类模型 (如所周知, 其主要倡导者 R. F. Engle 因此荣获 2003 年诺贝尔经济学奖) 以及随机波动率模型等非线性模型. 尤其是作者对它们在很大程度上都统一在高斯模型和条件高斯模型的观点上来进行分析. 此外作者还以相当大的篇幅来介绍混沌模型在金融资产价格模型中的应用. 由此也可看到作者的学术视野几乎无所不包, 他完全不把自己的立足点局限于他所精通的概率统计领域. 第三章阐述连续模型. 在这一章中我们同样可发现它所包含的内容远超过一般的金融数学教材和专著. 通常的基于布朗运动的随机分析以及由此派生的各种用扩散过程来描述的模型自然必不可少. 但作者把它放在第三、四节中来介绍, 其中也包括一些对常用的利率期限结构模型的叙述. 而它的更深刻的推广、目前多半还只在研究文献中讨论的半鞅模型则在第五节中作很精辟的介绍. 本章的第一节却是相当详细地介绍了稳定分布和稳定过程、Lévy 过程、双曲分布和双曲过程 (它们正是 Barndorff-Nielsen 于 1977 年所提出的), 以至更一般的无限可分分布等重要工具, 而第二节则介绍了在金融数学应用中独树一帜的分形布朗运动. 这一切都可能使得原来只熟悉用通常的布朗运动来为金融市场价格建模的读者大开眼界. 它们不但使读者在为金融市场实际建模时可使用的工具大大增加，并且在观点上也更上一层楼. 例如, 由此可以了解, 在连续时间金融学中作为起点模型的几何布朗运动, 只是 Lévy 过程以至一般的稳定过程、双曲过程等等的特例, 而这些更一般的过程及其分布则可能用来描述金融市场中的"厚尾"之类的"异常"现象. 通常的布朗运动也仅仅是一般的分形布朗运动的特例. 后者不但同样可用来描述某些"异常"现象，还是一个很难变成鞅的过程, 从而由它就能形成有套利机会的无效金融市场模型的例子. 第四章则又讨论金融数据的统计分析. 作者介绍了各种常用的金融统计方法: 金融数据的搜集和分析, 汇率、指数、"标记"等金融指标的统计分析, 一维分布的"正态异常指标" ("峰度"、"厚尾"等等) 的刻画, 有关波动率的各种分析, 还有起源于分形几何和混沌研究的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析等等. 这里不但罗列了所有常用的金融数据分析的方法, 并且还都有作者独特的见解. 例如, 关于波动率分析, 作者是这样开始的: "在金融数学中, 没有

一个概念像波动率概念那样引起众说纷纭, 争论不休, 真令人遗憾.” 这一语就足以为许多读者拨开文献中的迷雾.

第二卷有关 “理论” 的四章的标题都很明确: “随机金融模型中的套利理论” 或 “定价理论”; 先是 “离散时间”, 再是 “连续时间”. 所有的讨论都是在所谓 (B, S)-市场的模型框架中讨论的. 这里的 (B, S) 并非 Black-Scholes, 而是 Bank account (银行账户)-Stock (股票). 作者没有用常用的 “证券市场” 这一术语, 似乎既要造成 Black-Scholes 的错觉, 又要强调 “银行账户” 作为无风险证券的作用.

所谓 “套利理论”, 就是指所谓资产定价的第一和第二基本定理; 粗糙地说, 即, 市场无套利机会等价于存在等价概率鞅测度, 使得所有证券的折现价格过程为鞅 (第一定理), 并且当市场完全时, 这样的鞅测度是唯一的 (第二定理). 这样的资产定价基本定理的雏形出现在 1978 年 Ross 的一篇论文中①. 在那里, 虽然其数学叙述还不够严谨, 但作者已经正确地提出需要运用凸集分离定理. 明确的资产定价基本定理是 1979 年在 Harrison-Kreps [214] 和 Harrison-Pliska [215] 中提出的, 但对离散时间只能对有限状态的情形证明; 对连续时间更是不知怎样严格陈述其条件. 对于离散时间的严格的资产定价第一基本定理的证明是 1990 年 Dalang-Morton-Willinger [92] 提出的. 其证明中用到相当艰深的 “可测选择存在定理”. 后来有不少改进的证明, 但仍然都不太容易理解. 对于连续时间半鞅模型的资产定价第一基本定理的严格叙述则是在 Delbaen 和 Schchermayer 的一系列研究中完成的 (参见 [97]–[101]; 也参见他们的新书: F. Delbaen and W. Schachermayer, 2006, The Mathematics of Arbitrage, Series: Springer Finance, Springer). 其中所应用的数学技巧更为细腻. 要向一般读者介绍这样重要而又十分深奥的定理, 对于任何写作金融数学专著或教材的作者来说, 都是莫大的挑战. 大部分作者对此都不得不采取含糊带过的态度. 而像本书作者那样原原本本地不回避任何一个难点 (尽管有时也要省略一些证明) 来进行透彻叙述的实在是绝无仅有. 不但如此, 作者更是高瞻远瞩, 抓住要害, 以他的统一观点来概述这方面的各种最新成果. 对于离散时间情形, 他指出文献中曾经出现过的各种 “无套利机会” 的定义以及各种鞅测度的存在条件实际上都是等价的 (第五章 §2e 定理 A*); 对于连续时间情形, 由于对于离散时间情形的简单推广已经不成立, 他对文献中所出现的对各种半鞅模型的各种 “无套利机会” 的修正定义以及各种鞅测度的修正存在条件, 都作了细致的讨论, 使最后结果一目了然 (第七章 §2b 定理 1–3 及其推论和反例). 在第一基本定理的证明上, 作者着眼于鞅测度的构造. 通常的金融数学著作中, 多半会叙述关于布朗运动情形的 Girsanov 概率测度变换定理, 而在这里, 我们更能读到 Girsanov 定理的离散版本和半鞅版本; 同时, 还能读到最早用于精算数学中的 Esscher 变换定理的各种版本. 而在第二基本定理的证明上, 作者强调的是局部鞅的表示定理. 这种表示定理有明显的金融意义. 由此作者也得到离散时间情

①Ross, S. A., 1978, A simple approach to the valuation of risky streams, *Journal of Business*, **51**, 453–475.

形下的非常一般的版本 (第五章 §4f 定理 B*); 然而, 在连续时间情形下, 虽然也能讨论局部鞅的各种表示, 但简单的第二基本定理的推广已经变得很困难. 作者对此也提出了一些值得探索的研究设想.

所谓 "定价理论"① 是指通过投资策略进行风险对冲来对未定权益进行定价的理论. 它其实是 Black-Scholes 期权定价理论原来的思想. 作者通过 "(对冲) 上价格" 和 "(对冲) 下价格" 的概念给出了离散时间的对冲定价公式, 并指出了它们与等价概率鞅测度之间的联系. 但对于连续时间情形, 这里很难再对一般的半鞅模型来进行讨论. 作者对此只限于对经典的 Black-Scholes 模型得到一些经典结果. Black-Scholes 原来的通过偏微分方程来求解的讨论对于严谨的数学家来说是不能完全令人满意的 (为什么期权价格是光滑函数等等). 作者指出, 有了 "鞅方法", 有关的问题都可迎刃而解. 在有关 "定价理论" 的两章中, 作者还详尽地讨论了美式期权的定价理论. 这里当然就要涉及最优停止问题和 Stephan 问题的研究. 此外, 在这两章中还有有关各种特种期权和债券市场的定价问题讨论.

由此可见, 本书的内容极为丰富多彩, 讨论极为全面彻底. 正如亚马逊网上书店 (http://www.amazon.com) 的一篇网上书评所说: "本书反映了 (令人赞叹的) 俄国教学风格: 阐释理论的起源, 通常它通过某些特殊的问题; 然后, 对于所提出的问题谨慎展开精心制作的数学理论; 最后, 揭示问题的本质, 并生成漂亮的结果." "追随本书的思路, 你可以看到作者对金融数学的满腔热情和深刻理解." 每一位对随机金融数学有兴趣的本书读者, 即使只读了其中的一小部分, 都会感到获益匪浅. 当然, 本书的篇幅较大, 对概率论、随机过程等方面的数学预备知识要求较高. 这可能会对阅读本书带来一定的困难. 但是本书的上述叙述风格使人不得不叹服作者的思绪周密清晰而引人入胜. 一些很艰深的内容常常在充分的铺垫下, 即使不追究那些参考文献的证明细节, 也都变得相当容易理解. 这使得每一个有兴趣的读者都会感到这是一本值得时时参考, 反覆咀嚼的必备书. 译者自从 2000 年起开始阅读本书的英文版以来, 对此有过许多深切的感受.

本书的翻译期间正是国家科技部 973 项目《金融风险控制中的定量分析与计算》(项目编号：2007CB814900) 的立项期间. 现在这一项目已经立项. 而本书译者作为该项目及其子项目《金融创新产品的设计和定价》(课题编号：2007CB814902) 的成员, 也已获得该项目的资助. 我们项目组的同仁们都感到本书的翻译出版将对本项目开展研究有很大的促进. 因此, 本书的翻译出版应该作为该项目的一项成果. 译者在此特别声明这点, 并对项目资助表示感谢. 当然, 由于本书的涉及面非常广, 而译者的学识又相当有限, 尤其是金融学和概率论都并非译者原来的 "科班" 专业, 这使得译者在翻译本书时常有捉襟见肘之感. 再加上多年来很少用俄文, 而本书作者

①俄文原文为 "теория расчетов", 它的本意为 "计算理论", 其中并没有明确的 "pricing (定价)" 的含义. 但这里我们还是采用了英文版的翻译 (theory of pricing), 把它译成 "定价理论".

又惯用带一些说明语括号的复杂俄文长句子, 一时里曾使译者不知怎样把它表达为易读的中文[①]. 译文的不当之处在所难免, 敬请本书的读者和有关领域的专家批评指正.

史树中
2007 年 9 月
于北京大学光华管理学院

[①]译者后来才慢慢适应作者的这种表达风格. 为接近作者的这种表达方式, 译者也用类似的带说明语括号的中文来翻译. 这种长句的特点在于, 如果不计那些括号, 它已经是一个完整的句子; 而把括号去掉, 它就变成一个表达得更清楚、但读起来会感到拗口的很长的句子.

第二卷前言

第一卷的材料由四章组成:

第一章　基本概念、结构和工具. 金融理论和金融工程的目标和任务

第二章　随机模型. 离散时间

第三章　随机模型. 连续时间

第四章　金融数据的统计分析

它们有关金融统计、金融经济学、金融数学、金融工程等等的 “事实” 和 “模型”.

在第一章中叙述了关于金融市场及其功能的种种事实. 同时也叙述了经典的和新经典的金融理论的一系列基本原理; 这些理论的结果有助于理解 “合理” 建立的随机金融市场的结构, 以及理解在这样的市场中投资者、交易者等等必定有怎样的 “合理” 行为. 整体来说, 这章带有描述性特征, 用来作为金融数学和金融工程的引论.

在第四章中介绍了描述金融价格、指数、汇率等等演变的时间序列的概率分布的统计分析结果. 它们所表现的性质 (“收益” 量的概率分布密度的 “偏离高斯性”, “峰度” 和 “厚尾”, 价格性态中的 “长记忆” 和 “高频” 特征等等) 有助于构造适当的金融指标的动态模型; 这种模型对于研究这些指标的未来运动的预测问题来说, 特别重要.

第二章和第三章包含大量有关各种概率分布模型以及随机序列和随机过程模型的材料, 其中有许多已成功地运用于金融理论和金融工程中。

讲述 “理论” 的第二卷的材料也由四章组成:

第五章　随机金融模型中的套利理论. 离散时间

第六章　随机金融模型中的定价理论. 离散时间

第七章　随机金融模型中的套利理论. 连续时间
第八章　随机金融模型中的定价理论. 连续时间

所有这些叙述都基于套利概念, 它有助于在各种金融市场模型中首先分离出那些基于无套利机会而 “正确” 建立起来的模型.

第五章的关键结果是 “金融资产定价理论的第一基本定理”, 它 (在某种附加条件下) 断言, 无套利市场就是存在所谓风险中性 (或者鞅) 测度的市场, 对于这样的测度, 价格形成鞅.

所谓完全市场是指其中可以构建这样的证券组合, 使得它的资本复制了 (在未来的某个确定时刻的) 偿付索求; 这样的市场联系着 “第二基本定理”.

与该定理相对应的是无套利完全市场成立当且仅当只存在唯一的鞅测度.

在 “第二基本定理” 的推广版本中, 也描述了在金融市场的完全无套利模型中的价格结构.

第六章阐述离散时间的随机金融模型中的基于第一和第二基本定理的定价理论. 这里最基本的是作为证券组合的动态控制方法的对冲概念. 对于对冲价格 (价值) 所引出的公式以及在完全和非完全市场上所叙述的求出最优对冲策略的方法, 都被应用于欧式和美式期权的定价.

第七章和第八章有关连续时间情形. 其中叙述了通过引进半鞅和随机测度来描述的随机金融模型中的套利理论, 并且导出第一和第二基本定理的各种类似版本. 这里应该强调, 对应的叙述 (第七章) 比离散时间情形 (第五章) 更为复杂, 并且依赖于随机分析的许多十分深刻的结果.

最后一章 (第八章) 讲述套利理论应用于连续时间金融模型中的定价. 这里的注意力主要集中在对各种期权的定价.

本章的讲述从对于 Bachelier 线性模型中的标准 (买入) 欧式期权的合理价值的 “*Bachelier* 公式” 开始, 它是著名的 “*Black-Scholes* 公式” 的原型, 对此也给出某些推断. 关于美式期权定价的大部分材料将在股票的扩散模型和债券的扩散模型中推出.

作为结束, 请读者注意, 目录已经对叙述的材料给出足够完备的表达. 还要注意, 第二卷中的页码延续了第一卷中的页码.

A. 施利亚耶夫 (A. Ширяев)
俄罗斯科学院斯捷克洛夫 (B. A. Стеклов) 数学研究所
莫斯科国立罗蒙诺索夫 (M. B. Ломоносов) 大学
1995—1997 于莫斯科

目 录

第二卷

理论

第五章　随机金融模型中的套利理论. 离散时间

1. (B,S)-市场上的证券组合

§1a. 满足平衡条件的策略

1. 我们假定, 我们感兴趣的证券市场在 "不确定性" 条件下运营; 这种 "不确定性" 可通过引入渗透概率空间

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$$

来进行概率统计描述. σ-代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 解释为在时刻 n (包括 n) (所有市场参与者) 所接受的 "信息流" $\mathscr{F}_n$, $n \geqslant 0$.

我们所考察的 (B,S)-市场 (按定义) 由下列 $d+1$ 种资产组成:

$$\text{银行账户 (“无风险” 资产) } B$$

以及

$$\text{股票 (“风险” 资产) } S = (S^1, \cdots, S^d).$$

假定, 银行账户的动态变化由下列正随机序列来描述:

$$B = (B_n)_{n\geqslant 0},$$

其中对于每个 $n \geqslant 1$, 量 B_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测.

第 i 种风险资产 S^i 同样由下列正随机序列来描述:

$$S^i = (S^i_n)_{n\geqslant 0},$$

但其中对于每个 $n \geqslant 1$, 量 S^i_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

由这些定义可见, 银行账户与股票之间有原则区别.

B_n 的 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测性意味着, 银行账户在时刻 n 的值已经在时刻 $n-1$ (根据所得到的全部信息) 变为已知. 在这一意义下, 值 B_n 是可料的.

股票价格则完全是另一种局面: 量 S^i_n 的 $\mathscr{F}_n$-可测性意味着, 其值仅在得到时刻 n 的所有 "信息 $\mathscr{F}_n$" 时才变为已知.

这一区别说明为什么银行账户称为 "无风险" 资产, 而股票称为 "风险" 资产.

令

$$r_n = \frac{\Delta B_n}{B_{n-1}}, \qquad \rho^i_n = \frac{\Delta S^i_n}{S^i_{n-1}}, \tag{1}$$

则可记

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1}, \tag{2}$$

$$\Delta S^i_n = \rho^i_n S^i_{n-1}, \tag{3}$$

其中 (利率) r_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 而 ρ^i_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

这样一来, 对于 $n \geqslant 1$,

$$B_n = B_0 \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + r_k) \tag{4}$$

以及

$$S_n^i = S_0^i \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + \rho_k^i). \tag{5}$$

根据第二章 §1a 中所采用的术语, 表示式 (4) 和 (5) 称为 "简单收益 (simple return)" 型表示式.

2. 我们设想, 在 (B, S)-市场上运作的投资者有可能

a) 在银行账户中存款和借款;

b) 买卖股票.

这时, 我们将假定, 没有与资金从一种资产转向另一种资产转移相联系的交易费用, 而资产在下列意义下是 "无限可分的": 可以买卖股票的任何份额以及在银行账户中存借任何款项.

我们将给出一系列有关投资者在这样的 (B, S)-市场上的财务状况和交易活动的定义.

定义 1. 随机 (可料) 序列

$$\pi = (\beta, \gamma)$$

称为投资者在 (B, S)-市场上的证券组合, 这里 $\beta = (\beta_n(\omega))_{n \geqslant 0}$, $\gamma = (\gamma_n^1(\omega), \cdots, \gamma_n^d(\omega))_{n \geqslant 0}$, 其中 $\beta_n(\omega)$ 和 $\gamma_n^i(\omega)$ 对于所有 $n \geqslant 0$ 和 $i = 1, \cdots, d$ 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测 $(\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0)$.

这里要注意某些要素.

量 $\beta_n(\omega)$ 和 $\gamma_n^i(\omega)$ 不仅可取正值和零值, 并且也可取负值; 根据 a) 和 b), 后者意味着对银行账户借款和股票卖空 ("short selling").

$\mathscr{F}_{n-1}$-可测性假定意味着, 由投资者在时刻 n 的财务状况来确定的值 $\beta_n(\omega)$ 和 $\gamma_n^i(\omega)$ ("投资者在银行账户中的某个金额以及所占有的若干股票") 所依赖的不是时刻 n 所接受的信息, 而是在时刻 $n-1$ 所接受的信息 ("明天" 的组合状况完全由 "今天" 所确定).

时刻 $n = 0$ 扮演特殊的角色 (并且正如在所有基于渗透概率空间概念上的随机过程理论中那样). 这一 "特殊" 角色在于在时刻 $n = 0$ 的可料性 (根据形式记号, 这应该是 "$\mathscr{F}_{-1}$-可测性), 被认为是与 $\mathscr{F}_0$-可测性相重合. (在上述定义中作出约定 "$\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$" 从对于所有时刻 $n \geqslant 0$ 的统一叙述的视角来看是适宜的.)

为强调证券组合随时间的演变, 术语 "组合" 经常被取代为说成是 (投资者的) "策略". "组合" 这一术语我们也将继续保留.

在上面我们总假定 $n \geqslant 0$. 自然, 如果把时间限于某个 "时间视野 N", 所有定义仍然有效. 在这一情形下, 取代 "$n \geqslant 0$" 应该假定 "$0 \leqslant n \leqslant N$".

定义 2. 证券投资组合 π 的资本是指随机序列

$$X^\pi = (X_n^\pi)_{n \geqslant 0},$$

其中

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i. \tag{6}$$

为简化今后的叙述, 我们将经常使用 "无坐标" 记法, 对于向量 $\gamma_n = (\gamma_n^1, \cdots, \gamma_n^d)$ 和 $S_n = (S_n^1, \cdots, S_n^d)$, 记纯量积

$$(\gamma_n, S_n) \equiv \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i$$

为 $\gamma_n S_n$. (如果 $d = 1$, 那么自然直接记 γ_n^1 和 S_n^1 为 γ_n 和 S_n.)

这样, 设

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n. \tag{7}$$

对于两个序列 $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ 和 $b = (b_n)_{n \geqslant 0}$, 有

$$\Delta(a_n b_n) = a_n \Delta b_n + b_{n-1} \Delta a_n. \tag{8}$$

把这个公式 ("离散微分法") 用于 (7) 的右端, 我们求得

$$\Delta X_n^\pi = [\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n] + [B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n]. \tag{9}$$

这个公式表明, 资本的变化一般地说来自两个量的变化: 银行账户、股票价格的变化 (即 $\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$) 和组合本身组成上的变化 (即 $B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n$). 但是, 自然认为资本的实际变化只要考虑变化量 ΔB_n 和 ΔS_n, 而不必考虑变化量 $\Delta \beta_n$ 和 $\Delta \gamma_n$. (对于第二种可能性, 可以形象地说, "把钱从一个口袋放到另一个口袋" 不会获得资本的实际增长.)

这样一来, 我们产生这样的结论: 持有证券组合 π 的实际 "收益", 实际 "获利" 用下列从零出发的序列来描述:

$$G^\pi = (G_n^\pi)_{n \geqslant 0}, \quad G_0^\pi = 0,$$

$$G_n^\pi = \sum_{k=1}^n (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k). \tag{10}$$

尤其是, 在时刻 n 的 "实际" 资本是

$$X_n^\pi = X_0^\pi + G_n^\pi, \tag{11}$$

由此自然给出下列定义.

定义 3. 证券组合 π 称为自融资的, 是指对应的资本 $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geqslant 0}$ 可表示为下列形式:

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k), \qquad n \geqslant 1. \tag{12}$$

由上面引入的公式可明显看出, 这里的自融资等价于对组合 π 有下列 "约束" 要求:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0, \qquad n \geqslant 1. \tag{13}$$

这一条件的直观含义非常清楚: 由银行账户构成变化所引起的资本变化 $(B_{n-1}\Delta\beta_n)$ 只能通过股票 "包" 构成中的变化来实现, 反过来也一样.

自融资策略 π 类以后将记为 SF (来自 "self-financing" (自融资)).

还要注意到, 由上面的分析可得

$$(6) + (13) \iff (6) + (12).$$

3. 非常清楚, 在运作证券组合 π 时, 总希望减少组合中的资产个数, 或者至少简化它的结构. 意味深长 (而又经常应用) 的途径在于, "如果先验有 $B_n > 0$, $n \geqslant 1$, 那么可立刻假定 $B_n \equiv 1$." 这点由下列注记导出.

除了 (B, S)-市场以外, 我们考察新市场 $(\widetilde{B}, \widetilde{S})$:

$$\widetilde{B} = (\widetilde{B}_n)_{n\geqslant 0}, \qquad \widetilde{B}_n \equiv 1$$

以及

$$\widetilde{S} = (\widetilde{S}_n)_{n\geqslant 0}, \qquad \widetilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n}.$$

对应组合 $\pi = (\beta, \gamma)$ 的资本 $\widetilde{X}^\pi = (\widetilde{X}_n^\pi)_{n\geqslant 0}$ 显然为

$$\widetilde{X}^\pi = \beta_n \widetilde{B}_n + \gamma_n \widetilde{S}_n = \beta_n + \gamma_n \widetilde{S}_n = \frac{1}{B_n}(\beta_n B_n + \gamma_n S_n) = \frac{X_n^\pi}{B_n}, \tag{14}$$

这时, 在 (B, S)-市场上的组合 π 的自融资性也在 $(\widetilde{B}, \widetilde{S})$ 上保持, 因为 (参见 (13))

$$\widetilde{B}_{n-1}\Delta\beta_n + \widetilde{S}_{n-1}\Delta\gamma_n = \frac{1}{B_{n-1}}(B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n) = 0. \tag{15}$$

由于 $\Delta\widetilde{B}_k \equiv 0$, 故对于 $\pi \in SF$, 对应 (12), 有

$$\widetilde{X}_n^\pi = \widetilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta\widetilde{S}_k, \tag{16}$$

或者以展开形式表示为

$$\widetilde{X}_n^\pi = \widetilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{d} \gamma_k^i \Delta \widetilde{S}_k^i \right], \qquad \widetilde{S}_k^i = \frac{S_k^i}{B_k}. \tag{17}$$

这样一来, 由 (14) 和 (16) 我们求得, 对于 $\pi \in SF$ 的规范化的资本 $\dfrac{X^\pi}{B} = \left(\dfrac{X_n^\pi}{B_n}\right)_{n \geqslant 0}$, 满足下列关系式

$$\Delta \left(\frac{X_n^\pi}{B_n} \right) = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right), \tag{18}$$

尽管这一关系式很简单, 它在下面的依赖于 "无套利机会" 概念的许多计算中起着关键作用.

由已证明的结果得到,

$$(6) + (12) \implies (6) + (18).$$

直接验证也可指出这里相反的蕴涵关系也成立. 尤其是, 下列既在构造自融资策略时、也在验证某些策略自融资时有益的关系式成立:

$$(6) + (13) \iff (6) + (12) \iff (6) + (18).$$

还要注意, 关系式 (18) 在一定意义下比起下列由 (12) 导出的关系式来, 逻辑上更符合金融视角:

$$\Delta(X_n^\pi) = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n. \tag{19}$$

原因在于, 在比较资产价格时, 有较大意义的不是它们的绝对值, 而是它们的相对值 (关于这一点, 已经在第一章 §2a 的第 4 点中说到). 正是出于这一点, 我们考察规范量 $\widetilde{B} = \dfrac{B}{B} (\equiv 1)$ 和 $\widetilde{S} = \left(\dfrac{S}{B}\right)$, 来取代 B 和 S.

选择银行账户作为规范 (又称折现) 资产是某种约定, 当然, 取代 B 也可选取例如资产 $S^1, \cdots, S^d$ 中的任何一种或者它们的组合作为规范资产. 但是由于银行账户是 "可料" 资产, 这样做在数学分析中带来一定的简化. 例如, 由 "可料性" 导出, 条件分布 $\mathrm{Law}\left(\dfrac{X_n^\pi}{B_n} \,\middle|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)$ 由条件分布 $\mathrm{Law}(X_n^\pi \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 来确定, 因为在 "条件 $\mathscr{F}_{n-1}$" 下, B_n 的值变为已知. 同时, 在经济中, 银行账户起着 "零计量点"、"标准"、"均值" 等作用, 与它相比的值自然就是其他证券的价值根据银行账户的变化进行 "平均" 的价值.

4. 上面叙述的 (B, S)-市场上的资本 X^π 的演变的情形是 "无资本流入流出"、"无交易费用" 的情形. 当然, 我们也可设想别的模式, 其中资本的变化 ΔX_n^π 并不对

应公式 (19), 而是更复杂的方式, 例如, 考虑 "股票分红"、"消费" 支出、"交易费用" 等等. 我们考察某些这样的情形.

"带分红" 的情形. 设 $D=(D_n)_{n\geqslant 0}$ 是 d 维序列 $D_n=(D_n^1,\cdots,D_n^d)$, 其中 D_n^i 为 $\mathscr{F}_n$-可测, $D_0^i=0$, 以及 $\delta_n^i\equiv\Delta D_n^i\geqslant 0$. 我们将把 D_n^i 解释为股票 S_n^i 支付的总分红. 那么自然认为, 资本 $X^\pi=(X_n^\pi)_{n\geqslant 0}$ 的考虑分红的变化由下列公式来确定:

$$\Delta X_n^\pi=\beta_n\Delta B_n+\gamma_n(\Delta S_n+\Delta D_n), \tag{20}$$

而由银行账户和股票的进项组成的资本本身在考虑到分红时将有下列形式:

$$X_n^\pi=\beta_n B_n+\gamma_n(S_n+\Delta D_n), \tag{21}$$

由 (20) 和 (21) 不难导出, 自融资性条件 (13) 的类似在这里取下列形式:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\Delta\gamma_n-\delta_{n-1}\gamma_{n-1}=0. \tag{22}$$

尤其是,

$$(21)+(22)\iff(21)+(20), \tag{23}$$

以及 (18) 推广为下列形式:

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma\left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)+\frac{\Delta D_n}{B_n}\right]. \tag{24}$$

"带消费和投资" 的情形. 我们将假定 $C=(C_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $I=(I_n)_{n\geqslant 0}$ 是非负不减 ($\Delta C_n\geqslant 0$, $\Delta I_n\geqslant 0$) 过程, $C_0=0$, $I_0=0$, 并且 C_n 和 I_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

设资本 $X^\pi=(X_n^\pi)_{n\geqslant 0}$ 如下演变:

$$\Delta X_n^\pi=\beta_n\Delta B_n+\gamma_n\Delta S_n+\Delta I_n-\Delta C_n. \tag{25}$$

这一表示式说明为何所考察的情形称为 "带消费和投资" 的情形, $C=(C_n)_{n\geqslant 0}$ 称为 "消费过程", 而 $I=(I_n)_{n\geqslant 0}$ 称为 "投资过程".

显然, 如果资本 X_n^π 记为形式 $X_n^\pi=\beta_n B_n+\gamma_n S_n$, 那么 (25) 导出对组合 π 成分的下列限制 ("约束"):

$$B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\Delta\gamma_n=\Delta I_n-\Delta C_n. \tag{26}$$

关系式 (18) 在这里推广为下列形式:

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)+\frac{\Delta(I_n-C_n)}{B_{n-1}}. \tag{27}$$

联合这两种情形 ("带分红" 和 "带消费和投资"), 我们得到, 对于 "容许" 组合 π (即满足 $\Delta X_n^\pi=\beta_n\Delta B_n+\gamma_n(\Delta S_n+\Delta D_n)+\Delta I_n-\Delta C_n$ 的组合) 有

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma_n\left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)+\frac{\Delta D_n}{B_n}\right]+\frac{\Delta(I_n-C_n)}{B_{n-1}}. \tag{28}$$

(进行股票买卖) **"带交易费用" 的情形.** 上面考虑的关系式 (13) 有明显的预算平衡限制的财务意义, 也就是说, 如果 $\Delta\gamma_n > 0$, 那么购买价值为 S_{n-1} 的股票必定取自银行账户, 使得总值 $B_{n-1}\Delta\beta_n$ 等于 $S_{n-1}\Delta\gamma_n$. 如果 $\Delta\gamma_n < 0$, 那么银行账户获得 $B_{n-1}\Delta\beta_n = -S_{n-1}\Delta\gamma_n > 0$.

现在我们提出股票的每一次买卖都附带有一定的费用的局面. 这时, 如果购买价格为 S_{n-1} $(\Delta\gamma_n > 0)$ 的股票, 那么由于其价值 $S_{n-1}\Delta\gamma_n$ 带交易费用, 在银行账户中取出的量并非是 $S_{n-1}\Delta\gamma_n$, 而是较大的比如 $(1+\lambda)S_{n-1}\Delta\gamma_n$, 其中 $\lambda > 0$.

如果股票出售 $(\Delta\gamma_n < 0)$, 那么出售它获得金额 $-S_{n-1}\Delta\gamma_n$, 进入银行账户的也不是这个数, 而是较小的比如 $-(1-\mu)S_{n-1}\Delta\gamma_n$, 其中 $\mu > 0$.

由此很明显, 在具有交易费用时, 取代组合 π 的平衡关系式 (13) 的必定是满足下列约束条件:

$$\begin{aligned} B_{n-1}\Delta\beta_n + (1+\lambda)S_{n-1}\Delta\gamma_n I(\Delta\gamma_n > 0)& \\ + (1-\mu)S_{n-1}\Delta\gamma_n I(\Delta\gamma_n < 0) &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

它可改记为下列形式:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n + \lambda S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^+ + \mu S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^- = 0, \tag{30}$$

其中 $(\Delta\gamma_n)^+ = \max(0,\Delta\gamma_n)$, $(\Delta\gamma_n)^- = -\min(0,\Delta\gamma_n)$.

如果 $\lambda = \mu$, 那么 (30) 取下列形式:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}[\Delta\gamma_n + \lambda|\Delta\gamma_n|] = 0. \tag{31}$$

为了得到对应关系式 (18) 的类似, 我们察觉, 考虑到 (30),

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) &= \frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} \\ &= \frac{\beta_n B_n + \gamma_n S_n}{B_n} - \frac{\beta_{n-1}B_{n-1} + \gamma_{n-1}S_{n-1}}{B_{n-1}} \\ &= \Delta\beta_n + \gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta\gamma_n \\ &= \frac{B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n}{B_{n-1}} + \gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) \\ &= -\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\left(\mu(\Delta\gamma_n)^- + \lambda(\Delta\gamma_n)^+\right) + \gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right). \end{aligned}$$

这样一来, 当具有由参数 λ, μ 和平衡关系 (29) 来确定的交易费用时, 规范资本 $\dfrac{X_n^\pi}{B_n}$ $(X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n)$ 的演变由下列关系式来描述:

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}[\lambda(\Delta\gamma_n)^+ + \mu(\Delta\gamma_n)^-]. \tag{32}$$

如果 $\lambda=\mu$, 那么

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)-\lambda\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}|\Delta\gamma_n|. \tag{33}$$

在有交易费用的问题中, 还可给出若干等价于上面叙述的其他见解.

我们将记 $\widehat{S}_n=\gamma_nS_n$, $\widehat{B}_n=\beta_nB_n$ 为组合 π 在时刻 n 的股票资本和银行账户资本.

假定

$$\begin{aligned}\Delta\widehat{S}_n&=\rho\widehat{S}_{n-1}+\Delta L_n-\Delta M_n,\\ \Delta\widehat{B}_n&=r\widehat{B}_{n-1}-(1+\lambda)\Delta L_n+(1-\mu)\Delta M_n,\end{aligned} \tag{34}$$

其中 L_n 是在时刻 n (由银行账户取出资金) 对股票的累计转账, 而 (考虑到交易费用) 在银行账户中扣除 (较多的) 金额为 $(1+\lambda)L_n$. 类似还有, M_n 是出售股票的累计金额, 它向银行账户转移 (较少的) 的金额为 $(1-\mu)\Delta M_n$, 短缺的部分又是由交易费用所引起的.

由 (34) 明显可知, 对于总资本 $X_n^\pi=\widehat{B}_n+\widehat{S}_n$, 策略 π 和转账 (L,M), $L=(L_n)$, $M=(M_n)$, $L_0=M_0=0$, 有

$$\begin{aligned}\Delta X_n^\pi&=r\widehat{B}_{n-1}+\rho\widehat{S}_{n-1}-(\lambda\Delta L_n+\mu\Delta M_n)\\ &=r\beta_{n-1}B_{n-1}+\rho\gamma_{n-1}S_{n-1}-(\lambda\Delta L_n+\mu\Delta M_n)\\ &=\beta_{n-1}\Delta B_n+\gamma_{n-1}\Delta S_n-(\lambda\Delta L_n+\mu\Delta M_n).\end{aligned}$$

但

$$\Delta X_n^\pi=\beta_{n-1}\Delta B_n+\gamma_{n-1}\Delta S_n+B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\Delta\gamma_n.$$

从而, 我们得到

$$B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\Delta\gamma_n+\lambda\Delta L_n+\mu\Delta M_n=0. \tag{35}$$

这里令

$$\Delta L_n=S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^+,\qquad \Delta M_n=S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^-,$$

我们得到, (35) 等价于 (30).

一般情形. 所考察的所有四种情形可以归纳为一种, 其中既有分红, 又有消费、投资, 还有交易费用.

也就是说, 利用上面引入的记号, 我们将假定资本

$$X_n^\pi=\beta_nB_n+\gamma_n(S_n+\Delta D_n) \tag{36}$$

如下演变:

$$\begin{aligned}\Delta X_n^\pi=\beta_n\Delta B_n+\gamma_n(\Delta S_n+\Delta D_n)+\Delta I_n&\\ -\Delta C_n-S_{n-1}[\lambda(\Delta\gamma_n)^++\mu(\Delta\gamma_n)^-].&\end{aligned} \tag{37}$$

由 (36) 和 (37) 得到, 下列平衡关系式满足:

$$\begin{aligned} &B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n \\ &\qquad = -[\Delta C_n - \Delta I_n + \delta_{n-1}\gamma_{n-1} + \mu S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^- + \lambda S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^+], \end{aligned} \tag{38}$$

它确定了组合 π 的约束条件.

由于

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \frac{B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n}{B_{n-1}} + \frac{\gamma_n\delta_n}{B_n} - \frac{\gamma_{n-1}\delta_{n-1}}{B_{n-1}} + \gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right),$$

故考虑到 (38), 我们求得, 对于容许的组合 π,

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n\left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{\Delta D_n}{B_n}\right] &+ \frac{\Delta(I_n - C_n)}{B_{n-1}} \\ &- \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}[\lambda(\Delta\gamma_n)^+ + \mu(\Delta\gamma_n)^-]. \end{aligned} \tag{39}$$

如果 $\lambda = \mu$, 那么

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n\left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{\Delta D_n}{B_n}\right] + \frac{\Delta(I_n - C_n)}{B_{n-1}} - \frac{\lambda S_{n-1}|\Delta\gamma_n|}{B_{n-1}}. \tag{40}$$

5. 在假定序列 $\dfrac{S}{B} = \left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 1}$ 关于原来的流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 和概率测度 P 为鞅 (更确切地说, d-维鞅) 的条件下, 我们转向公式 (18) 和 (27).

根据 (18),

$$\frac{X_n^\pi}{B_n} = \frac{X_0^\pi}{B_0} + \sum_{k=1}^n \gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{41}$$

由此很明显, (由 γ_k $(k \geqslant 1)$ 的可料性) 序列

$$\left(\frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_0^\pi}{B_0}\right)_{n\geqslant 0} \tag{42}$$

是鞅变换, 也就是说 (参见第二章 §1c) 它是*局部鞅*.

我们将认为, X_0^π 和 B_0 是常数. 于是对于每个满足

$$\inf_n \frac{X_n^\pi}{B_n} \geqslant C > -\infty, \qquad C = \mathrm{Const} \tag{43}$$

的组合 π, 我们求得, 对于所有 $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) \geqslant C - \frac{X_0^\pi}{B_0}, \tag{44}$$

即, 局部鞅

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right)\right)_{n\geqslant 1}$$

下有界, 而由第二章 §1c 中的引理, 它其实就是鞅.

这样一来, 如果组合 π 的规范资本满足性质 (43) (为了紧凑, 将记为 $\pi\in\Pi_C$), 那么这一规范资本 $\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ 是鞅, 特别是对于任何 $n\geqslant 0$,

$$\mathsf{E}\frac{X_n^\pi}{B_n}=\frac{X_0^\pi}{B_0}. \tag{45}$$

这一性质可如下评述.

设在 (B,S)-市场上, 序列 $\frac{S}{B}=\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ 是鞅. (按照第一章 §2a 的术语, 这样的市场称为 "有效市场".) 于是借助于策略 $\pi\in\Pi_C$, 即满足对某个常数 C 的条件 (43), 不能指望 (在 "有效" 市场上) 规范资本的均值 $\mathsf{E}\frac{X_n^\pi}{B_n}$ 变得大于规范初始资本 $\frac{X_0^\pi}{B_0}$.

同样正确的是, 对于策略 $\pi\in\Pi^C$ 来说, 即对于某个 C 满足条件

$$\sup_n\frac{X_n^\pi}{B_n}\leqslant C<\infty\quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}) \tag{46}$$

的策略来说, 也不能使得等式 (45) 不成立.

直观的解释在于, 在 "局部鞅" 的情形下, 等式 (45) 不成立, 必定使得量 $\left|\frac{X_n^\pi}{B_n}\right|$ 取 "过大的值". 这可能使得例如有无界的资本或者有机会获得无界的贷款的 "物理上不现实的" 局面出现. 然而, 对于策略类 Π_C 和 Π^C 来说, 这样的机会是不允许的. (与此相联系的也参见 [439] 中的第 VIII 章 §1, 第 5 点中的注.)

对于金融数学中的许多目标来说, 有意思的问题在于, 当把确定时刻 n 替换为 Markov 时刻 $\tau=\tau(\omega)$ 时, 性质 (45) 是否还保持. 这个问题例如对于美式期权 (参见第六章) 很有意义, 其中在策略概念自身中就已引入停时, 它是由比如使期权提交执行的某个解的概念来刻画的时刻.

可以立刻注意到, 如果 $Y=(Y_n,\mathscr{F}_n)$ 是鞅随机序列, 那么

$$\mathsf{E}(Y_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=Y_{n-1},\qquad \mathsf{E}|Y_n|<\infty,$$

而这意味着

$$\mathsf{E}Y_n=\mathsf{E}Y_0.$$

对于随机停时 $\tau=\tau(\omega)<\infty$, $\omega\in\Omega$ 来说, 性质

$$\mathsf{E}Y_\tau=\mathsf{E}Y_0, \tag{47}$$

一般地说, 可能不满足 (比较第三章 §3a, 其中考察布朗运动情形). 如果比如 τ 是有界时刻, $\tau(\omega) \leqslant N < \infty$, $\omega \in \Omega$, 那么它就满足. 关于各种充分条件将在本章的 §3a 中和在 [439] 的第 VII 章的 §2 中讨论, 其中引入了一系列满足性质 (47) 的判别准则. (形象地说, 这些判别准则都是说, 为了满足 (47), 不能允许 "过大的 τ" 和/或 "过大的 $|Y_\tau|$".) 性质 (47) 不成立的例子以后在 §2b 中引入.

6. 上面在运作证券组合时, 我们没有对 β_n 和 $\gamma_n = (\gamma_n^1, \cdots, \gamma_n^d)$ 的可能值进行任何限制, 总认为 $\beta_n \in \mathbb{R}$, $\gamma_n^i \in \mathbb{R}$.

然而在实际实践中, 可能加上形形色色的限制. 例如, 限制 $\beta_n \geqslant 0$ 意味着, 在时刻 n 不允许向银行借款. 如果 $\gamma_n \geqslant 0$, 那么不允许 "卖空" (short-selling), 即不允许在债务中有股票.

如果在组合中附加条件

$$\frac{\gamma_n S_n}{X_n^\pi} \leqslant \alpha,$$

其中 α 是某个常数, 那么这意味着, 对于总资本 (X_n^π) 中的 "风险" 资本成分 (即 $\gamma_n S_n$) 必定不超过给定的量 α.

对组合 π 的限制的另一些例子例如有条件型限制:

$$\mathsf{P}(X_N^\pi \in A) \geqslant 1 - \varepsilon$$

(对于某些给定的 $N, \varepsilon > 0$ 和集合 A) 或者

$$\mathsf{P}(X_N^\pi \geqslant f_N) = 1$$

(对于某个 $\mathscr{F}_N$-可测函数 $f_N = f_N(\omega)$).

后一种情形将在下一节中联系 "对冲" 概念来详细考察.

§1b. "对冲" 的概念. 上价格和下价格. 完全和不完全市场

1. 我们将假定, 在 (B,S)-市场中的金融活动限于时刻 $n = 0, 1, \cdots, N$.

设 $f_N = f_N(\omega)$ 是某个 ("专用" 的) 非负 $\mathscr{F}_N$-可测函数, 其含义为 "偿付索求"、"最终" 支付等.

定义 1. 具有 $\beta = (\beta_n)$, $\gamma = (\gamma_n)$ $(n = 0, 1, \cdots, N)$ 的证券组合 $\pi = (\beta, \gamma)$ 称为上 (x, f_N)-对冲 (下 (x, f_N)-对冲), 是指 $X_0^\pi \equiv x$, $x \geqslant 0$ 以及 $X_N^\pi \geqslant f_N$ (P-a.s.) (相应的是, $X_N^\pi \leqslant f_N$ (P-a.s.)).

我们说, (x, f_N)-对冲 π 是完善的, 是指 $X_0^\pi \equiv x$, $x \geqslant 0$ 以及 $X_N^\pi = f_N$ (P-a.s.).

"对冲" (hedge, 原意为 "栅栏") 这一概念在金融数学和金融实践中扮演特别重要的角色, 它是某种防范工具, 用来在证券市场上力求确保资本以及达到对合约保险的最终目标.

下面引入的定义有助于今后陈述我们的行动, 利用这样的行动可力求获得确保的资本.

2. 记

$$H^*(x, f_N; \mathsf{P}) = \{\pi\colon X_0^\pi = x, X_N^\pi \geqslant f_N(\mathsf{P}\text{-a.s.})\}$$

为上 (x, f_N)-对冲类以及

$$H_*(x, f_N; \mathsf{P}) = \{\pi\colon X_0^\pi = x, X_N^\pi \leqslant f_N(\mathsf{P}\text{-a.s.})\}$$

为下 (x, f_N)-对冲类.

定义 2. 设 f_N 是偿付索求.

量

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \inf\{x \geqslant 0\colon H^*(x, f_N; \mathsf{P}) \neq \varnothing\}$$

称为 (对冲偿付索求 f_N 的) 上价格.

量

$$\mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P}) = \sup\{x \geqslant 0\colon H_*(x, f_N; \mathsf{P}) \neq \varnothing\}$$

称为 (对冲偿付索求 f_N 的) 下价格.

注 1. 正如通常所做的那样, 如果对于所有 $x \geqslant 0$, $H^*(x, f_N; \mathsf{P}) = \varnothing$, 那么我们补充定义 $\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \infty$. 集合 $H_*(0, f_N; \mathsf{P}) \neq \varnothing$ (取 $\beta_n \equiv 0$, $\gamma_n \equiv 0$ 就足以说明). 如果对于所有 $x \geqslant 0$, $H_*(x, f_N; \mathsf{P}) \neq \varnothing$, 那么 $\mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P}) = \infty$.

注 2. 在上面给出的定义中没有对证券组合提出 "平衡" 限制或者其他限制. 常见的这种限制之一例如有 "自融资性" 条件 (参见上节中的 (13)). 自然, 在具体讨论中, 必须对 "容许" 策略 π 规定要求.

注 3. 当然, 也有可能 (至少对于某些 x) 类 $H^*(x, f_N; \mathsf{P})$ 或 $H_*(x, f_N; \mathsf{P})$ 是空集. 在这一情形下, 有价值的是例如从下列均方偏差的视角下来比较不同组合的质量:

$$\mathsf{E}[X_N^\pi - f_N]^2.$$

(参见后面第六章中的 §1d.)

3. 我们讨论所引入的 "上价格" 和 "下价格" 的丰富含义.

如果你出售 (带偿付函数 f_N 的) 合约, 那么你希望高价出售. 然而, 你必定也会算计购买者的利益, 他希望以较低的价格来购买可靠的合约. 考虑到双方利益的对立, 你作为出售者, 必定一方面要为自己确定最低可接受出售价格, 另一方面, 你也将在满足合约的状况下 (即在时刻 N 支付 f_N), 不能有套利机会, 即无风险收益 (或者如另一种说法, 不能有免费午餐 (free lunch)), 因为购买者一般来说没有任何理由同意这一点.

如果你是购买合约, 那么你当然希望以低价购买, 但是尽管如此, 这一价格也不能使你有套利机会, 即获得无风险收益, 因为在出售者那里也没有任何理由会同意这一点.

现在我们指出, 上面引入的 "上价格" 和 "下价格" $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P})$ 和 $\mathbb{C}_* = \mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P})$ 具有这样的性质: $[0, \mathbb{C}_*)$ 和 $(\mathbb{C}^*, \infty)$ 是分别使购买者和出售者有套利机会的 (最大) 价格集合.

设合约的价格为 $x > \mathbb{C}^*$, 并且找到一个购买者要买它. 于是出售者可用下列方式获得免费午餐.

由所得到的金额 x 中分出 y, 使得 $\mathbb{C}^* < y < x$, 并以这些钱购买证券, 形成组合 $\pi^*(y)$, 对它来说资本 $X_0^{\pi^*(y)} = y$, 而在时刻 N, $X_N^{\pi^*(y)} \geqslant f_N$. 这样的组合由 C^* 的定义和 $y > C^*$ 显然存在. (用另一种说法, 这一运作可解释为: 出售者在时刻 $n = 0$ 根据组合 $\pi^*(y) = (\beta_n^*(y), \gamma_n^*(y))_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 对 (B,S)-市场的投资金额为 y, 其中购买债券 $\beta_0^*(y)$ 和股票 $\gamma_0^*(y)$, 它们特别是满足 $\beta_0^*(y)B_0 + \gamma_0^*(y)S_0 = y$.)

在时刻 N 这一组合 $\pi^*(y)$ 的占有者可得到的资本等于 $X_N^{\pi^*(y)}$, 因而, 这两种运作 (出售合约和购买组合 $\pi^*(y)$) 的总 "损益" 等于

$$(x - f_N) + (X_N^{\pi^*(y)} - y) = (x - y) + (X_N^{\pi^*(y)} - f_N) \geqslant x - y > 0.$$

这里 $x + X_N^{\pi^*(y)}$ 是 (在时刻 $n = 0$ 和 N) 两次运作中出售获得的量, 而 $f_N + y$ 是他在时刻 $n = N$ 必须支付的量以及在时刻 $n = 0$ 为获得组合 $\pi^*(y)$ 而必须的花费.

这样, $x - y$ 形成合约出售者的纯粹无风险 (即套利) 收益.

现在我们转向合约购买者的套利机会.

设购买者以价格 $x < C_*$ 购买了承诺向他支付 f_N 的合约. 为了得到免费午餐, 购买者选取了某个满足 $x < y < \mathbb{C}_*$ 的 y.

根据 C_* 的定义, 可求得组合 $\pi_*(y)$, 其 (在时刻 $n = 0$ 的) 初始价值为 y, 而 (在时刻 $n = N$) 达到资本 $X_N^{\pi_*(y)} \leqslant f_N$. 对于这个购买者来说, 他已经为了在时刻 N 得到所承诺的 (随机) 金额 f_N 而支付了 x; 而他可通过下列方式来获得套利.

他在时刻 $n = 0$ 投资量 $(-y)$, 使得其对应的组合 $\overline{\pi}(-y) = -\pi_*(y)$, 其中 $\pi_*(y) = (\beta_{*n}(y), \gamma_{*n}(y))_{0 \leqslant n \leqslant N}$.

这样一来,

$$\overline{\pi}(-y) = (-\beta_{*n}(y), -\gamma_{*n}(y))_{0 \leqslant n \leqslant N},$$

而这就是说, $(-y)$ 在债券和股票之间的分配是对应下列关系式来实现的:

$$-y = -\beta_{*0}(y)B_0 - \gamma_{*0}(y)S_0.$$

组合 $\overline{\pi}(-y)$ 在时刻 N 给出资本

$$X_N^{\overline{\pi}(-y)} = X_N^{-\pi_*(y)} = -X_N^{\pi_*(y)},$$

因而, 所引入的两种运作 (购买合约和投资 $(-y)$) 的总 "损益" 等于

$$(f_N - x) + (X_N^{\overline{\pi}(-y)} - (-y)) = (f_N - X_N^{\pi_*(y)}) + (y - x) \geqslant y - x > 0,$$

即, 正如我们所看到, 它是以价格 $x < \mathbb{C}_*$ 购买合约的购买者的纯 (套利) 收益.

在上述讨论中, 引进了负的 (!) 投资量 $(-y)$. 这种运作有怎样的实际含义呢?

其实, 类似于某种 "卖空" (short selling) 运作, 我们已经例如在第一章 §1c 的第 4 点考察期权时遇到过这样的运作. 同样适用于当前的投资 $(-y)$ 的局面, 这就意味着, 在证券市场上你找到了一个 "投机者" (比较第七章 §1a), 他同意向你支付 y, 以交换在时刻 $n = N$ 向他必须支付量 $X_N^{\pi_*(y)}$, 后者 (由于价格的随机特征) 既可能大于 y, 也可能小于 y.

注. 所引入的讨论 (不明显地) 基于市场足够流动的假设, 其含义在于市场上有足够多样的对价格的升降有不同的利益、视角和期待的投资者、交易者、投机者等的整个 "谱族". 顺便指出, 所有这些都说明, 严格的数学讨论必须清晰地陈述对金融市场上可能运作的要求和限制. 以后将在所运用的策略类中引入容许性条件 (参见例如第七章中的 §1a); 这种条件是比如不准在市场上出现套利机会之类的限制的例子.

这样一来, 我们有两个价格区间, $[0, \mathbb{C}_*)$ 和 $(\mathbb{C}^*, \infty)$, 它们都是导致套利机会的价格区间. 然而, 如果约定价格 $x \in [\mathbb{C}_*, \mathbb{C}^*]$, 那么这里无论对出售者, 还是对购买者都没有套利机会.

这一状况说明了为什么价格区间 $[\mathbb{C}_*, \mathbb{C}^*]$ 是*可接受价格区间*或*双方可接受价格区间*.

我们再一次强调, 选取*双方可接受价格* $x \in [\mathbb{C}_*, \mathbb{C}^*]$, 使得无论是购买者, 还是出售者, 都没有无风险收益. 双方中的任何一方都由于价格运动的随机特征, 既可能赢, 也可能输. 盈利, 尤其是高额盈利, 应该看作是 (比较第一章 §1c 的第 2 点) 某种

"风险补偿".

下图 "概述" 了上述对于出售者和购买者的偏好价格和可接受价格:

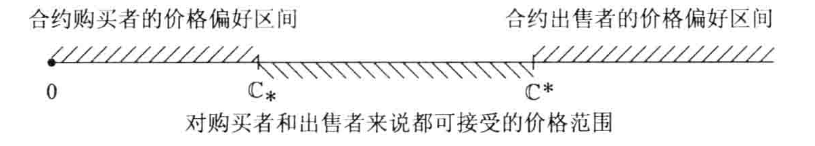


图 51　对于购买者和出售者的偏好价格范围和可接受价格范围 ($\mathbb{C}_* = \mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P})$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P})$)

4. 我们来较详细地讨论给定 x 和偿付索求 f_N, 存在*完善的* (x, f_N)-*对冲* π (即使得 $X_0^\pi = x$ 和 $X_N^\pi = f_N$ (P-a.s.) 的策略) 的情形.

等式 $X_N^\pi = f_N$ 意味着, 对于对冲 π 来说, 索求 f_N *可达*, 或者还可说成*可复制*.

有许多理由希望每个偿付索求 (对于某个 x) 都是可达的. 如果实际上正是这样, 那么这时类 $H^*(x, f_N; \mathsf{P})$ 和 $H_*(x, f_N; \mathsf{P})$ 重合, 以至上下价格也重合:

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P}).$$

换句话说, 在这样的情形下, “可接受” 价格区间归结为单一价格

$$C(f_N; \mathsf{P}) \quad (= \mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P})),$$

它是偿付索求 f_N 的对于购买者和出售者来说都可接受的合理 (公平) 价格, 因为偏离这一价格, 正如上面所解释, 必定会导致双方之一将有无风险收益!

这一特殊情形由其重要性赢得一个特殊术语.

定义 3. (B, S)-证券市场称为 N-完善或者(关于时刻 N) 完善, 是指每个 $\mathscr{F}_N$-可测 (有限值) 偿付索求 f_N 可达, 或可复制, 即对于某个 x, 可求得完善的 (x, f_N)-对冲 π, 即对于它来说,

$$X_N^\pi = f_N \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

在相反情形下, 市场称为 N-不完善或者 (关于时刻 N) 不完善, 不完全.

一般来说, 所规定的完善性条件是相当强的假定, 其要求会对 (B, S)-市场的结构加上十分苛刻的限制. 同时, 在许多情形下, 不需要对于所有 $\mathscr{F}_N$-可测函数 f_N 都存在完善对冲, 而只需比如对有界函数或者满足可积性和可测性的某个条件的子类的函数, 就已足够. (不过要参见 §4f 中的定理.)

定义 4. (B, S)-证券市场称为 N-完全或者 (关于时刻 N) 完全, 是指每个有界 $\mathscr{F}_N$-可测偿付索求可复制.

关于市场是否完善或完全的问题的求解对于金融数学和金融工程来说意味深长, 因为它为构造使资本 X_N^π 复制 “偿付索求” f_N 的组合 π, 建立了原则上的可能性 (或不可能性). (在不可能精确复制 f_N 的情形下, 正如上面已经注意到, 例如可提出求达到 $\inf \mathsf{E}[X_N^\pi - f_N]^2$ 的组合的问题, 其中 inf 对于所有 “容许” 组合 π 来取; 关于这方面参见后面第六章中的 §1d.)

在对市场结构和市场所运作的概率空间没有任何补充假定的一般情形下, 看来很难给出某种令人满意的回答. 然而, 对于所谓无套利市场 (参见后面 §2a 中的定义), 其 “完全性” 问题就能以所谓鞅测度的唯一性来获得完全彻底的解答 (参见 §2b 中的定理 A 和 §4a 中的定理 B).

在下一节中, 我们考察构造极为简单的 (B, S)-市场的一步模型 ($N = 1$). 在这样的例子中, 人们可清晰地寻求怎样以自然的方式在价格 $\mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P})$ 和 $\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P})$ 的计算中产生鞅 (或者说, 风险中性) 测度, 以及本质上基于这样的测度的运用而产生怎样的一般定价原理.

§1c. 在一步模型中的上价格和下价格

1. 我们考察简单的 (B, S)-市场的 "一步模型". 这一市场有银行账户 $B = (B_n)$ 和一种股票 $S = (S_n)$, 其中 $n = 0, 1$. 假定, 常数 $B_0 > 0$, $S_0 > 0$, 以及 (参见 §1a)

$$
\begin{aligned}
B_1 &= B_0(1 + r), \\
S_1 &= S_0(1 + \rho),
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中利率 r 是常数 $(r \geqslant 0)$, 而利率 ρ 是随机变量 $(\rho > -1)$.

由于在这个模型中所有 "随机性" 都来自 ρ 的值, 故只需对有 Borel 系 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 的数值直线 $\mathbb{R} = \{\rho\colon |\rho| < \infty\}$ 的概率分布 $\mathsf{P} = \mathsf{P}(d\rho)$ 来进行运作就已足够.

我们将假定, 测度 $\mathsf{P}(d\rho)$ 的支集集中在区间 $[a, b]$ 上, 其中 $-1 < a < b < \infty$. 如果测度 $\mathsf{P}(d\rho)$ 集中在两个点 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 上, 那么 (1) 就是在第二章 §1e 中提到过的一步 CRR-模型.

2. 设 $f = f(S_1)$ 是偿付索求函数, 并且为了简化记号, 记 $\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \mathbb{C}^*(f; \mathsf{P})$, $\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \mathbb{C}_*(f; \mathsf{P})$. 由于 $B_0 > 0$, 故不妨碍一般性, 可认为 $B_0 = 1$.

在所考察的一步模型中, 组合 π 由数对 β 和 γ 来确定, 它们的值必须在时刻 $n = 0$ 选定.

根据在上节中给出的定义,

$$
\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0), \tag{2}
$$

以及

$$
\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \sup_{(\beta,\gamma)\in H_*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0), \tag{3}
$$

其中

$$
H^*(\mathsf{P}) = \{(\beta, \gamma)\colon \beta B_1 + \gamma S_1 \geqslant f(S_1),\ \mathsf{P}\text{-a.s.}\}, \tag{4}
$$

以及

$$
H_*(\mathsf{P}) = \{(\beta, \gamma)\colon \beta B_1 + \gamma S_1 \leqslant f(S_1),\ \mathsf{P}\text{-a.s.}\}. \tag{5}
$$

我们考察在 $H^*(\mathsf{P})$ 中的限制

$$
\beta(1 + r) + \gamma S_0(1 + \rho) \geqslant f(S_0(1 + \rho)) \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}) \tag{6}
$$

并引入 (初看起来相当人为) $[a, b]$ 上的分布类 $\mathscr{P}(\mathsf{P}) = \{\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{P}}(d\rho)\}$, 它具有下列两个性质:

$$
\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}
$$

(即测度 P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 相互绝对连续: $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$) 以及

$$
\int_a^b \rho \widetilde{\mathsf{P}}(d\rho) = r. \tag{7}
$$

我们将假定, 这个类 $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$. (这点例如显然在$CRR$ 模型中成立, 后者以后将在 §1d 中讨论以及在 §3f 中详细讨论.)

现在我们注意到下列重要状况, 它是金融数学中的许多计算的基础:

如果测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 那么在不等式 (6) 中的条件 "P-a.s." 可取代为条件 "$\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.".

因此, 如果 $(\beta, \gamma) \in H^*(\mathsf{P})$, 那么

$$\beta(1+r) + \gamma S_0(1+\rho) \geqslant f(S_0(1+\rho)) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s.}), \tag{8}$$

以至对这个不等式的两端按测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 求积, 并考虑到 (7), 我们求得

$$\beta + \gamma S_0 \geqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \tag{9}$$

由这一不等式显然可导出对于 $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ 的下列下估计:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^*(\mathsf{P}) &= \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) \\ &\geqslant \sup_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \quad (= x^*). \end{aligned} \tag{10}$$

用类似的方式我们得到对于 $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ 的上估计:

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant \inf_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \quad (= x_*). \tag{11}$$

这样一来,

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant x_* \leqslant x^* \leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P}), \tag{12}$$

它 (在 $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$ 的假定下) 证明了不等式 $\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P})$, 由 $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ 和 $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ 的定义来看, 它并非那么明显.

我们转向性质 (7), 先把它记为下列形式:

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{1+\rho}{1+r} = 1. \tag{13}$$

由 (1), 它等价于

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{S_1}{B_1} = \frac{S_0}{B_0}. \tag{14}$$

令 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F}_1 = \sigma(\rho)$, 我们看到

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \left(\frac{S_1}{B_1} \,\middle|\, \mathscr{F}_0 \right) = \frac{S_0}{B_0},$$

即, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n=0,1}$ 是鞅.

正是这一也在更一般的情形下成立的状况, 说明为什么类 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 在金融数学中称为*鞅测度*.

注意, 这种测度的出现, 在计算比如上下价格时, 初看起来似乎带有人为方式, 因为在原来的随机基底上已经有一个 "原来的" 概率测度, 并且看来所有计算应该只基于这个测度. 其实也确实如此, 因为

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}=\mathsf{E}_{\mathsf{P}}z(\rho)\frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}, \tag{15}$$

其中 $z(\rho)=\dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$ 是测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 关于测度 P 的 Radon-Nikodym 导数.

然而, 鞅测度的出现带来更深刻的特征, 因为它以最直接的方式与所考察的 (B,S)-市场上的无套利机会相联系.

这一问题将在下面的第 2 节 ("无套利机会市场") 中详细讨论. 现在则顺便指出, 当不等式 (10) 和 (11) 得到保证时, 实际上等式成立.

3. 假定函数 $f_x = f(S_0(1+x))$ 是在 $[a,b]$ 上的 (下) 凸连续函数. (我们记得, 每个闭集 $[a,b]$ 上的凸函数在开集 (a,b) 上连续, 可能有的间断只可能在区间的端点上.)

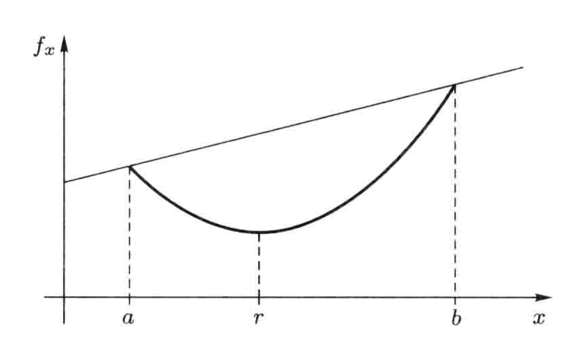


图 52 偿付函数 $f_x = f(S_0(1+x))$

过点 (a,f_a) 和 (b,f_b) 引直线 $y=y(x)$. 如果这条直线的方程为

$$y(x)=\mu S_0(1+x)+\nu, \tag{16}$$

那么, 显然,

$$\mu=\frac{f_b-f_a}{S_0(b-a)},\qquad \nu=\frac{(1+b)f_a-(1+a)f_b}{(b-a)}. \tag{17}$$

我们引入策略 $\pi^*=(\beta^*,\gamma^*)$, 其中

$$\beta^*=\frac{\nu}{1+r},\qquad \gamma^*=\mu. \tag{18}$$

由于 $(1+r)\beta^* + S_0(1+\rho)\gamma^* = \nu + \mu S_0(1+\rho) \geqslant f(\rho)$ 对于所有 $\rho \in [a,b]$ 成立, 那么 $\pi^* \in H^*(\mathsf{P})$, 而这就是说,

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) \leqslant \beta^* + \gamma^* S_0 = \frac{\nu}{1+r} + \mu S_0. \tag{19}$$

现在对于鞅测度集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 作下列假定:

(A^*): 存在 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的测度子列, 记为 $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1}$, 弱收敛于集中在两个点 a 和 b 上的测度 P^*.

如果这个假定 (A^*) 满足, 那么由等式

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_n} \frac{1+\rho}{1+r} = 1$$

可得

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{1+\rho}{1+r} = 1.$$

由此求得, 概率 $p^* = \mathsf{P}^*\{b\}$ 和 $q^* = \mathsf{P}^*\{a\}$ 满足两个条件:

$$p^* + q^* = 1$$

和

$$bp^* + aq^* = r.$$

因此,

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \qquad q^* = \frac{b-r}{b-a}. \tag{20}$$

同时, 再由测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ 弱收敛于测度 P^* 的假定, 并考虑到 (19), 我们求得

$$\begin{aligned}
\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\rho}{1+r} &\geqslant \lim_n \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_n} \frac{f_\rho}{1+r} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{f_\rho}{1+r} \\
&= p^* \frac{f_b}{1+r} + q^* \frac{f_a}{1+r} = \frac{r-a}{b-a}\frac{f_b}{1+r} + \frac{b-r}{b-a}\frac{f_a}{1+r} \\
&= \frac{\nu}{1+r} + \mu S_0 = \beta^* + \gamma^* S_0 \\
&\geqslant \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) = \mathbb{C}^*(\mathsf{P}).
\end{aligned} \tag{21}$$

把它与相反的不等式 (10) 联系在一起, 我们得到

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \tag{22}$$

对以上所述进行分析, 我们注意到, $f = f(S_0(1+\rho))$ 作为 $\rho \in [a,b]$ 的函数, 连续性和凸性是相当标准的假定, 并且因此不至于引起强烈反对.

上面作出的关于鞅测度有集中于两点 a 和 b 的极限分布的弱紧性假定 (A^*) 更为 "沉重". 事实上, 这并非是那么 "可怕的" 假定; 如果先验假设在点 a 和 b 的邻域有非零 P-质量, 即, 对于每个 $\varepsilon > 0$ 概率 $\mathsf{P}[a, a+\varepsilon] > 0$ 和 $\mathsf{P}[b-\varepsilon, b] > 0$, 那么只要至少有一个这样的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$ (即 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 具有下列性质: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有 $\widetilde{\mathsf{P}}[a, a+\varepsilon] > 0$, $\widetilde{\mathsf{P}}[b-\varepsilon, b] > 0$, 且 $\int_a^b \rho \widetilde{\mathsf{P}}(d\rho) = r$), 所要求的测度序列 $\{\widetilde{\mathsf{P}}_n\}$ 可借助于挤压 $(\varepsilon \downarrow 0)$ 点 a 和 b 的邻域 $[a, a+\varepsilon]$ 和 $[b-\varepsilon, b]$ 以及 "浓缩" 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的质量来构造, 其中要求等价性 $\widetilde{\mathsf{P}}_n \sim \widetilde{\mathsf{P}}$ 始终保持.

在下一节中我们将考察 *CRR* (Cox-Ross-Rubinstein) 模型, 其中原来的测度 P "座落" 在 a 和 b 上, 而测度 P^* 的构造不会引起任何困难. (就其实质而言, 我们已经在 (20) 中构造了它.)

我们以下列断言的形式来陈述所得到的关于 $\mathbb{C}^*$ 的结果 (也参见 [93]).

定理 1. 设偿付索求函数 $f(S_0(1+\rho))$ 是 ρ 在 $[a, b]$ 上的凸连续函数, 且满足弱紧性条件 (A^*). 那么上价格

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \tag{23}$$

这时, sup 在测度 P^* 上达到, 并且

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \frac{r-a}{b-a} \frac{f_b}{1+r} + \frac{b-r}{b-a} \frac{f_a}{1+r}, \tag{24}$$

其中 $f_\rho = f(S_0(1+\rho))$.

4. 现在我们转向下价格 $\mathbb{C}_*$.

根据 (3) 和 (11),

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \sup_{(\beta,\gamma) \in H_*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) \leqslant \inf_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\rho}{1+r}, \tag{25}$$

其中 $f_\rho = f(S_0(1+\rho))$ 以及 $\rho \in [a, b]$.

如果函数 f_ρ 在 $[a, b]$ 中下凸, 那么对于点 $r \in (a, b)$ 可求得 $\lambda = \lambda(r)$, 使得

$$f(S_0(1+\rho)) \geqslant f(S_0(1+r)) + (\rho - r)\lambda(r) \tag{26}$$

对于每个 $\rho \in [a, b]$ 成立, 其中

$$y(r) = f(S_0(1+r)) + (\rho - r)\lambda(r)$$

是由点 r 出发的 "承托直线", 它使得 f_ρ 的图像在这条直线的上面.

设 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$. 于是由 (26) 求得

$$\inf_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \geqslant \frac{f(S_0(1+r))}{1+r}. \tag{27}$$

我们定义

$$\beta_* = \frac{f(S_0(1+r))}{1+r} - \lambda(r),$$
$$\gamma_* = \frac{\lambda(r)}{S_0}.$$

于是 (26) 可改写为下列形式: 对于 $\rho \in [a,b]$,

$$f(S_0(1+\rho)) \geqslant \beta_*(1+r) + \gamma_* S_0(1+\rho),$$

由此得到 $\pi_* = (\beta_*, \gamma_*) \in H_*(\mathsf{P})$.

按照证明定理 1 的同样模式, 假定下列条件满足:

(A_*): $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中存在测度子序列 $\{\overline{\mathsf{P}}_n\}_{n\geqslant 1}$ 弱收敛于集中在一个点的测度 P_*.

于是在函数 f_ρ 连续的假定下,

$$\inf_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\rho}{1+r} \leqslant \lim_n \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_n} \frac{f_\rho}{1+r} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_*} \frac{f_\rho}{1+\rho} = \frac{f(S_0(1+r))}{1+r}$$
$$= \beta_* + S_0\gamma_* \leqslant \sup_{(\beta,\gamma)\in H_*(\mathsf{P})} (\beta + S_0\gamma) = \mathbb{C}_*(\mathsf{P}),$$

它与 (26) 一起证明了下列结果.

定理 2. 设函数 f_ρ 连续, 在 $[a,b]$ 中下凸, 且满足弱紧性条件 (A_*). 那么下价格

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \inf_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \tag{28}$$

这里 inf 在测度 P_* 上达到, 且

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \frac{f_r}{1+r}. \tag{29}$$

注. 例如设 $\mathsf{P}(d\rho) = \dfrac{d\rho}{b-a}$ 是 $[a,b]$ 上的均匀分布测度. 在这一情形下, 条件 (A^*) 和 (A_*) 满足, 因而上下价格由公式 (24) 和 (29) 来确定.

5. 上面引入的上下价格的 "概率" 分析都假设, 股票价格中的所有不确定性都服从这样的概率描述: 假定 ρ 是概率分布为 $\mathsf{P}(d\rho)$ 的随机变量.

但是 ρ 也可简单地看作某个在区间 $[a,b]$ 中取值的 "混沌" 变量. 在这一情形下, 取代类 $H^*(\mathsf{P})$ 和 $H_*(\mathsf{P})$, 自然引入类

$$\widehat{H}^* = \{(\beta,\gamma) : \beta(1+r) + \gamma S_0(1+\rho) \geqslant f(S_0(1+\rho)),\ \forall \rho \in [a,b]\}$$

和

$$\widehat{H}_* = \{(\beta,\gamma) : \beta(1+r) + \gamma S_0(1+\rho) \leqslant f(S_0(1+\rho)),\ \forall \rho \in [a,b]\},$$

其中不等式满足的条件 "P-a.s." 取代为条件 "对于所有 $\rho \in [a,b]$". 显然, 对于每个概率测度 P,

$$\widehat{H}^* \subseteq H^*(\mathsf{P}), \qquad \widehat{H}_* \subseteq H_*(\mathsf{P}).$$

我们察觉, 甚至在没有原来的概率测度的情况下, 也不妨碍引入 (也是带有人为方式的假设) $[a,b]$ 上的概率分布 $\widehat{\mathsf{P}} = \widehat{\mathsf{P}}(d\rho)$, 满足性质 (比较 (7))

$$\int_a^b \rho \widehat{\mathsf{P}}(d\rho) = r.$$

这样的测度类 $\widehat{\mathscr{P}}$ 显然非空, 上面所考察的集中在两个点 a 和 b 上的测度 P^* (参见 (20)) 和集中在一个点 r 上的测度 P_* 都属于这个类.

类似于 (2) 和 (3), 我们定义

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = \inf_{(\beta,\gamma)\in \widehat{H}^*} (\beta + \gamma S_0) \quad (\geqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P}))$$

和

$$\widehat{\mathbb{C}}_* = \sup_{(\beta,\gamma)\in \widehat{H}_*} (\beta + \gamma S_0) \quad (\leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P})).$$

由上面引入的讨论 (参见 (8), (9) 和 (10)), 我们求得, 对于每个概率测度 P,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{C}}^* = \inf_{(\beta,\gamma)\in \widehat{H}^*} (\beta + \gamma S_0) &\geqslant \sup_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \\ &\geqslant \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}\end{aligned} \tag{30}$$

和

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{C}}_* = \sup_{(\beta,\gamma)\in \widehat{H}_*} (\beta + \gamma S_0) &\leqslant \inf_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \\ &\leqslant \inf_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}.\end{aligned} \tag{31}$$

现在我们察觉, 由于类 $\widehat{\mathscr{P}}$ 也包含上面引入的 "两点" 测度 P^* 和 "一点" 测度 P^*, 故 (比较 (21))

$$\sup_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} = p^* \frac{f_b}{1+r} + q^* \frac{f_a}{1+r} \tag{32}$$

和

$$\inf_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \leqslant \mathsf{E}_{\mathsf{P}_*} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} = \frac{f_r}{1+r}. \tag{33}$$

在定理 1 的证明中所考察的策略 π^* 显然属于类 $\widehat{H}^*$, 并且对于它 (在 f_ρ 为 $[a,b]$ 上的下凸函数的假定下) 有

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = \inf_{(\beta,\gamma)\in\widehat{H}^*}(\beta+\gamma S_0) \leqslant \beta^*+\gamma^* S_0 = p^*\frac{f_b}{1+r}+q^*\frac{f_a}{1+r},$$

它与 (30) 和 (32) 一起指出 (比较 (23)),

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = \sup_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}}\frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}, \tag{34}$$

以至 (比较 (24))

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = p^*\frac{f_b}{1+r}+q^*\frac{f_a}{1+r}, \tag{35}$$

其中 $f_\rho = f(S_0(1+\rho))$.

用类似的方式我们求得 (比较 (28) 和 (29)),

$$\widehat{\mathbb{C}}_* = \inf_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}}\frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}, \tag{36}$$

以至

$$\widehat{\mathbb{C}}_* = \frac{f_r}{1+r}. \tag{37}$$

这样, 下列定理得证:

定理 3. 在 (1) 中 $\rho\in[a,b]$ 为 "混沌" 变量的情形下, 对于每个下凸函数 $f = f(S_0(1+\rho))$, $\rho\in[a,b]$, 上价格 $\widehat{\mathbb{C}}^*$ 和下价格 $\widehat{\mathbb{C}}_*$ 分别由公式 (34), (35) 和 (36), (37) 来确定.

注. 比较定理 1, 2, 3 的结果指出, 如果原来的概率测度 P 在点 a,r 和 b 的邻域足够 "模糊", 那么鞅测度类 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 也与类 $\widehat{\mathscr{P}}$ 一样 "丰富", 并且在不等式 $\widehat{\mathbb{C}}_* \leqslant \widehat{\mathbb{C}}_*(\mathsf{P})$ 和 $\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) \leqslant \widehat{\mathbb{C}}^*$ 中, 等号成立.

§1d. 一个完全市场的例子: *CRR*-模型

1. 我们再来考察 (B,S)-市场的 "一步" 模型, 令

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0(1+r), \\ S_1 &= S_0(1+\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 ρ 是只取两个值 a 和 b 的随机变量, 且满足

$$-1 < a < r < b. \tag{2}$$

这个简单的 (B,S)-市场称为一步 "*CRR*-模型", 因为 Cox, Ross 和 Rubinstein 在 [82] 中首先考察它.

我们假定, 随机变量 ρ 原来的分布 P 满足

$$p = \mathsf{P}\{b\} > 0, \qquad q = \mathsf{P}\{a\} > 0.$$

于是等价于测度 P 并满足上节性质 (7) 的唯一的 (鞅) 测度是如下的测度 P^*:

$$\mathsf{P}^*\{b\} = p^*, \qquad \mathsf{P}^*\{a\} = q^*,$$

其中 (参见 §1c 中的 (20))

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \qquad q^* = \frac{b-r}{b-a}, \tag{3}$$

并且 (参见 §1c 中的 (11) 和 (12))

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant \mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{f_\rho}{1+r} \leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P}). \tag{4}$$

实际上, 在所考察的情形下, 对于任何偿付索求 $f = f(S_0(1+\rho))$, 价格 $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ 和 $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ 重合, 因而其公共值 $\mathbb{C}(\mathsf{P})$ 由下列公式来确定:

$$\mathbb{C}(\mathsf{P}) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{f_\rho}{1+r} = p^* \frac{f_b}{1+r} + q^* \frac{f_a}{1+r}. \tag{5}$$

就其实质而言, 为证明等式 $\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ 所必须的内容都已经包含在 §1c 中的上述讨论中.

事实上, 我们考察上面引入的策略 $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, 其中的参数

$$\beta^* = \frac{\nu}{1+r}, \qquad \gamma^* = \mu,$$

这里的 ν 和 μ 在 §1c 的 (17) 中定义.

由于无论是对于 $\rho = a$ 还是对于 $\rho = b$, 都有

$$\beta^*(1+r) + \gamma^* S_0(1+\rho) = f(S_0(1+\rho)),$$

我们看到, 这里的偿付索求是可达的, 而这就是说, $\pi^* \in H^*(\mathsf{P}) \cap H_*(\mathsf{P})$. 因此,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_*(\mathsf{P}) &= \sup_{(\beta,\gamma)\in \widehat{H}_*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) \geqslant \beta^* + \gamma^* S_0 \\ &\geqslant \inf_{(\beta,\gamma)\in \widehat{H}^*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) = \mathbb{C}^*(\mathsf{P}). \end{aligned}$$

与不等式 (4) 一起, 这就证明了所要求的价格 $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ 和 $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ 的重合以及对于它们的公共值 $\mathbb{C}(\mathsf{P})$ 的公式 (5).

2. 我们再次注意到, 在这节和上节中所叙述的材料, 体现了下列要点: 随之而来的是在更一般的情形下, 当联系给定的偿付索求的金融定价中运用鞅方法时,

(I) 如果鞅测度类非空,

$$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing, \tag{6}$$

那么有

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P})$$

(由 §1c 中的 (12));

(II) 如果类

$$H^*(\mathsf{P}) \cap H_*(\mathsf{P}) \neq \varnothing, \tag{7}$$

即, 偿付索求可达, 那么

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \geqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P});$$

(III) 在 (6) 和 (7) 同时满足的情形下, 下价格 $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ 和上价格 $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ 重合.

在下节中将指出, 鞅测度类 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 非空性以最直接的方式与无套利机会相联系. 类 $H^*(\mathsf{P}) \cap H_*(\mathsf{P})$ (对于任何偿付索求 f) 的非空性, 则联系着鞅测度的唯一性问题, 即什么时候与测度 P 等价的 (鞅) 测度集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 只由一个测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ ($\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$) 所构成的问题.

2. 无套利机会市场

§2a. "套利" 和 "无套利" 的概念

1. 从直观的视角来看, 市场上 "无套利" 意味着, 它是在下列含义下 "正当的" 和 "合理构建的": 其中没有获取无 "风险" 盈利的机会. (与第一章 §2a 中的 "有效市场" 的概念相比较, 其中也出现与其 "合理构建" 的关联性, 并且在有效市场中, 本质上就干脆假定在这样的市场上具有鞅性.)

为了给出正式定义, 正如在 §1a 中那样, 我们将认为给定渗透概率空间

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P}),$$

由 $d+1$ 种资产所组成的 (B, S)-市场在其上运行; 而这 $d+1$ 种资产包括

$$\text{银行账户 } B = (B_n)_{n\geqslant 0},$$

其中 B_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, $B_n > 0$, 以及

$$d\text{-维风险资产 } S = (S^1, \cdots, S^d),$$

其中 $S^i = (S^i_n)_{n\geqslant 0}$, S^i_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测, $S^i_n > 0$.

设 $X^\pi = (X^\pi_n)_{n\geqslant 0}$ 为资本,

$$X^\pi_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \quad \left(= \beta_n B_n + \sum_{i=1}^d \gamma^i_n S^i_n\right),$$

它是由带可料的 $\beta=(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $\gamma=(\gamma^1,\cdots,\gamma^d)$ $(\gamma^i=(\gamma^i_n)_{n\geqslant 0})$ 的策略 $\pi=(\beta,\gamma)$ 所生成的.

如果 π 是自融资策略 $(\pi\in SF)$, 那么 (参见 §1a 中的 (12))

$$X_n^\pi=X_0^\pi+\sum_{k=1}^{n}(\beta_k\Delta B_k+\gamma_k\Delta S_k),\qquad n\geqslant 1, \tag{1}$$

并且其规范化资本 $\widetilde{X}_n^\pi=\left(\dfrac{X_n^\pi}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ 满足关系式

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right), \tag{2}$$

它对于整个后面的分析起着关键作用.

2. 固定某个 $N\geqslant 1$, 并且我们将对某个策略 $\pi\in SF$ 在这个 "终点" 时刻的资本值 X_N^π 感兴趣.

定义 1. 我们说, 自融资策略 π (在时刻 N) 实现了套利机会, 是指在资本的零初值的情况下:

$$X_0^\pi=0, \tag{3}$$

它在时刻 N 的资本

$$X_N^\pi\geqslant 0\quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \tag{4}$$

以及 $X_N^\pi>0$ 有正 P-概率, 即

$$\mathsf{P}(X_N^\pi>0)>0, \tag{5}$$

或者等价地,

$$\mathsf{E}X_N^\pi>0. \tag{6}$$

我们以 SF_{arb} 表示套利自融资策略类. 于是, 如果 $\pi\in SF_{\text{arb}}$ 和 $X_0^\pi=0$, 那么

$$\mathsf{P}(X_N^\pi\geqslant 0)=1\Longrightarrow \mathsf{P}(X_N^\pi>0)>0.$$

定义 2. 我们说, 在 (B,S)-市场上无套利机会或者市场无套利, 是指 $SF_{\text{arb}}=\varnothing$. 换句话说, 如果对于某个策略 π, 初始资本 $X_0^\pi=0$, 那么

$$\mathsf{P}(X_N^\pi\geqslant 0)=1\Longrightarrow \mathsf{P}(X_N^\pi=0)=1.$$

所给出的定义在直观上意味着, 无套利策略 π 的由 $X_0^\pi=0$ 到 X_N^π 的转换示意图如同图 53a 那样画出 (当 $X_N^\pi\geqslant 0$), 其实, 它必定是 "退化的", 即如同图 53b 所画出的那样, 对应 $X_0^\pi=0\to X_N^\pi$ 的虚线轨线只有零概率.

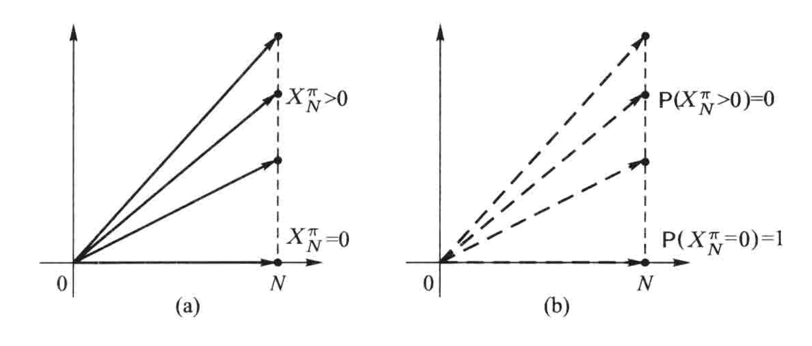


图 53 关于无套利机会的定义

这样一来, 在无套利市场上, 如果 $X_0^\pi = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = 0$, 那么转换示意图必定有图 54 上所画出的样式, 它意味着, 如果 $\mathsf{P}(X_N^\pi = 0) < 1$, 那么除了正"盈利" $\mathsf{P}(X_N^\pi > 0) > 0$ 以外, 必定也有不可忽略的"亏损" $\mathsf{P}(X_N^\pi < 0) > 0$. 这点可以形象地换个说法: 在无套利市场上, 每个非平凡策略 π (即如果 $X_0^\pi = 0$, 那么 $\mathsf{P}(X_N^\pi \neq 0) > 0$) 必定是有风险的, 即 $\mathsf{P}(X_N^\pi > 0) > 0$) 和 $\mathsf{P}(X_N^\pi < 0) > 0$) 同时成立.

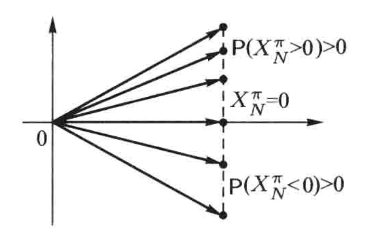


图 54 无套利市场中的典型转换图景

除了金融文献中的这一无套利性的条件以外, 金融工程师们还提出另一些定义 (参见例如, [251]). 下列定义就是一些例子 (在 [251] 和后面的 §2e 中运用).

定义 3. a) (B,S)-市场称为*弱意义下无套利*, 是指对于每个满足 $X_0^\pi = 0$ 和 $X_n^\pi \geqslant 0$ (P-a.s.) $(n \leqslant N)$ 的自融资策略 π, 有 $X_N^\pi = 0$ (P-a.s.).

b) (B,S)-市场称为*强意义下无套利*, 是指对于每个满足 $X_0^\pi = 0$ 和 $X_N^\pi \geqslant 0$ (P-a.s.) 的自融资策略有 $X_n^\pi = 0$ (P-a.s.), $n \leqslant N$.

注. 注意, 上面给出的定义依赖于形为 $\{X_N^\pi > 0\}$, $\{X_N^\pi \geqslant 0\}$ 和 $\{X_N^\pi = 0\}$ 的事件, 它们显然相应地重合于 $\{\widetilde{X}_N^\pi > 0\}$, $\{\widetilde{X}_N^\pi \geqslant 0\}$ 和 $\{\widetilde{X}_N^\pi = 0\}$, 其中 $\widetilde{X}_N^\pi = \dfrac{X_N^\pi}{B_N}$, 只要总有 $B_N > 0$.

这一状况说明, 为什么在研究 (B,S)-市场上的"有套利"和"无套利"问题可立即转向对 $(\widetilde{B},\widetilde{S})$-市场来运作, 其中 $\widetilde{B}_n \equiv 1$ 以及 $\widetilde{S}_n = \dfrac{S_n}{B_n}$. 换句话说, 如果假定 $B_n > 0$, 那么不妨碍一般性, 可令 $B_n \equiv 1$.

§2b. 无套利机会的鞅判别准则. I. 第一基本定理的陈述

1. 在我们所考察的离散时间 $n = 0, 1, \cdots, N$ 的情形下, 下列引人注目的定理成立. 这一定理由于它的重要性, 称为"资产定价第一基本定理 (The first Fundamental Asset Pricing Theorem)" ([214], [215] 和 [92]).

定理 A. 设定义在渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ 上的

$$(B, S)\text{-市场}$$

由银行账户 $B = (B_n)$, $B_n > 0$ 和有限 d 种资产 $S = (S^1, \cdots, S^d)$ $(S^i = (S^i_n))$ 所组成.

假定, 市场在时刻 $n = 0, 1, \cdots, N$ 运行, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ 以及 $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$.

(B, S)-市场是无套利的充要条件为可求得等价于测度 P 的 (至少有一个, 它称为"鞅"或"风险中性") 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得 d-维规范化序列

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)$$

关于 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为鞅, 其中 $S_n = (S^1_n, \cdots, S^d_n)$; 即对于所有 $i = 1, \cdots, d$ 和 $n = 0, 1, \cdots, N$, 有

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left|\frac{S^i_n}{B_n}\right| < \infty, \tag{1}$$

以及对于 $n = 1, \cdots, N$,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{P}}\left(\frac{S^i_n}{B_n} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) = \frac{S^i_{n-1}}{B_{n-1}} \qquad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s.}). \tag{2}$$

这一定理的证明将分几个步骤来进行: 充分性在 §2c 中证明, 而必要性在 §2d 中证明. 在 §2e 中将对这条定理的某种程度上更广的版本引入另一个证明. 现在先对所陈述的判别准则的内容作出某些注记.

以前我们已经注意到, 无套利假定有完全明确的经济意义以及可看作对"合理"、"有效"、"公平"运行的市场所期待的性质. 所陈述的定理 (Harrison and Kreps [214], Harrison and Pliska [215] 对于有限 Ω 情形提出, Dalang, Morton and Willinger [92] 对于一般情形下提出) 的价值在于它发现了在这样的"无套利"市场上, 对金融资产及其运作进行解析定价的可能性. (正由于这一点, 它也被称为资产定价第一基本定理.) 就实质而言, 上面对于上下价格的定价 (§§ 1b, c) 已经显示了这一点. 所陈述的判别准则将在以后系统运用, 例如, 远期和期货的价格考察 (第六章 §1e), 期权的合理价格 (第六章第 4 节和第 5 节).

这条定理也有观念上的价值, 它使得相当模糊的有效、合理构建的市场概念 (第一章 §2a) 变为追求所谓价格的鞅性质作为目标, 并在无套利性概念的框架中逻辑上是严格的, 后者说明"合理构建"必须理解为对于投资者来说, 在市场上没有获取无风险收益的机会.

2. 在对鞅序列 $X=(X_n)$ 进行运作时, 重要的是不仅要指出测度 P, 并且还要指出 σ-代数流 $(\mathscr{F}_n)$, 使得它们满足 "鞅性质":

$$X_n \text{ 为 } \mathscr{F}_n\text{-可测},$$

$$\mathsf{E}|X_n|<\infty,$$

$$\mathsf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)=X_n \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

为了强调关于在考察鞅时的这些状况, 我们将说 P-鞅或 $(\mathsf{P},(\mathscr{F}_n))$-鞅, 并运用记号 $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P})$.

现在我们注意到, 如果 X 是 $(\mathsf{P},(\mathscr{F}_n))$-鞅, 那么它将也对每个满足 $\mathscr{G}_n\subseteq\mathscr{F}_n$ 的 "较小的" 流 $(\mathscr{G}_n)$ 是鞅, 只要 X_n 为 $\mathscr{G}_n$-可测. 事实上, 由 X_n 的 $\mathscr{G}_n$-可测性以及条件数学期望的 "套筒" 性质, 我们求得 "鞅" 性质满足:

$$\mathsf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{G}_n)=\mathsf{E}(\mathsf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)\,|\,\mathscr{G}_n)=\mathsf{E}(X_n\,|\,\mathscr{G}_n)=X_n \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

显然, 如果 X 是 $(\mathsf{P},(\mathscr{F}_n))$-鞅, 那么使得 X 仍然是鞅的 "最小流" $(\mathscr{G}_n)$ 是由鞅本身所生成的 "自然" 流, 即 $\mathscr{G}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)$.

与此相联系的是现在回忆起下列这点很有价值: "弱有效" 市场定义为 (参见第一章中的 §2a) "信息流 $(\mathscr{F}_n)$" 是由所有在市场上 "运作" 的资产的过去价格值所生成的, 换句话说, 在这一情形下, 流 $(\mathscr{F}_n)$ 是 "最小流".

3. 自然会提出这样的问题, 当 $d=\infty$ 或 $N=\infty$ 时, 定理是否仍然保持成立?

下列 W. Schachermayer [424] 中的反例表明, 在 $d=\infty$ (和 $N=1$) 的情形下, "无套利" 可能在不存在 "鞅" 测度的情况下成立, 即, 当 $d=\infty$ 时, 所陈述的定理中的 "必要性" 一般来说可能不成立.

例 1. 设 $\Omega=\{1,2,\cdots\}$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $\mathscr{F}=\mathscr{F}_1$ 为 Ω 的有限子集生成, 而测度 $\mathsf{P}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}\delta_k$, 即 $\mathsf{P}\{k\}=2^{-k}$.

我们用下列方式对于 $i=1,2,\cdots$ 和 $n=0,1$ 定义价格序列 $S=(S_n^i)$: $S_0^i(\omega)\equiv 0$,[①]

$$\Delta S_1^i(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=i,\\ -1, & \omega=i+1,\\ 0, & \text{其余情形下}.\end{cases}$$

有 $B_0=B_1=1$ 和这样的价格序列的 (B,S)-市场是无套利的. 事实上, 每个资本 $X_1^\pi(\omega)$ 可表示为下列形式:

$$X_1^\pi=c_0+\sum_{i=1}^{\infty}c_iS_1^i=X_0^\pi+\sum_{i=1}^{\infty}c_i\Delta S_1^i,$$

① "$S_0^i(\omega)\equiv 0$" 是译者根据上下文加上的. —— 译者注

其中 $X_0^\pi = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i$ (假定 $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$). 但如果 $X_0^\pi = 0$, 即 $c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 0$, 那么由条件 $X_1^\pi \geqslant 0$, 我们求得

$$X_1^\pi(1) = c_1 \geqslant 0,\ X_1^\pi(2) = c_2 - c_1 \geqslant 0,\ \cdots,\ X_1^\pi(k) = c_k - c_{k-1} \geqslant 0,\ \cdots.$$

由此我们断定, 所有 $c_i = 0$, 而这意味着 $X_1^\pi = 0$ (P-a.s.). 然而, 鞅测度不可能存在.

事实上, 假设存在测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 使得 S 关于它是鞅. 于是对于任何 $i = 1, 2, \cdots$, 必定满足等式

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \Delta S_1^i = 0,$$

即 $\widetilde{\mathsf{P}}\{i\} = \widetilde{\mathsf{P}}\{i+1\}$ 对于任何 $1, 2, \cdots$ 成立. 但这样的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 显然不存在.

下列反例有关定理在 $N = \infty$ 的情形下的 "充分性" 成立的可能性. 也就是说, 它表明, 具有鞅测度并不能保证无套利, 即可能在下面解释的含义下有套利机会. (我们要注意, 在所引入的反例中, 价格 S 不仅仅取正值. 在这一意义下, 它可能显得有点不真实.)

例 2. 设在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上定义独立同分布随机变量序列 $\xi = (\xi_n)_{n \geqslant 0}$, 其中 $\mathsf{P}(\xi_n = 1) = \mathsf{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$.

假定 $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $B_n \equiv 1$, 并设资本

$$X_n^\pi = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \gamma_k \Delta S_k \quad \left(= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \gamma_k \xi_k \right),$$

其中

$$\gamma_k = \begin{cases} 2^{k-1}, & \text{当 } \xi_1 = \cdots = \xi_{k-1} = -1, \\ 0, & \text{其他情形下}. \end{cases}$$

如所周知, X_n^π 可看作在有 "对称" 对手的赌博的某个赌徒的资本, 其中决定输赢的是随机变量 ξ_k 的值 ($\xi_k = 1$ 时赢, 而 $\xi_k = -1$ 时为输), 并且在输时采取加倍下注.

显然, 如果 $\xi_1 = \cdots = \xi_k = -1$ (即赌徒在过去的所有时刻总输), 那么其资本

$$X_k^\pi = -\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = -(2^k - 1),$$

即它是纯输额.

然而, 如果在下一时刻 $k+1$, 该赌徒赢了, 即 $\xi_{k+1} = 1$, 那么其总资本将在这一时刻等于

$$X_{k+1}^\pi = X_k^\pi + 2^k = -(2^k - 1) + 2^k = 1.$$

因此, 如果在该赌徒的 "策略" 概念中 (除了选择组合以外) 还包含 (随机的) 赌局的翻盘时刻 τ, 那么赌局可能有正的赢额. 事实上, 设

$$\tau = \inf\{k\colon X_k^\pi = 1\}.$$

因为 $\mathsf{P}(\tau = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, 所以 $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$, 而这意味着 $\mathsf{E}X_\tau^\pi = 1$, 因为 $\mathsf{P}(X_\tau^\pi = 1) = 1$, 尽管初始资本 $X_0^\pi = 0$.

这样, 在所考察的有 $B_k \equiv 1$ 的 (B, S)-市场上有套利机会, 使得存在组合 π 满足 $X_0^\pi = 0$, 而对于某个 τ, 数学期望 $\mathsf{E}X_\tau^\pi = 1$.

我们顺便察觉, 在这场博弈中所运用的输时加倍下注的可能性暗示该赌徒或者无限富有, 或者有一个可无限信贷的取之不尽用之不竭的银行账户; 无论是哪一种情形, 这当然不太现实!

也正是由于有这样的状况, 在考察 "套利理论" 的问题上, 要对容许策略类强加一定的 "经济上合理的" 自然限制. (关于这方面参见后面的第七章的 §1a.)

§2c. 无套利机会的鞅判别准则. II. 充分性证明

我们必须证明, 等价于测度 P 的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的存在, 即关于这一测度, 序列

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{0 \leqslant n \leqslant N}$$

是 $(\widetilde{\mathsf{P}}, (\mathscr{F}_n))$-鞅, 在 (B, S)-市场上确保无套利机会.

正如上面已经注意到 (参见 §2a 的最后), 假定成立的条件 $B_n > 0$, $n \geqslant 0$, 允许认为 $B_n \equiv 1$.

运用 §2a 中的公式 (2), 我们有

$$X_n^\pi = X_0^\pi + G_n^\pi, \qquad G_n^\pi = \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta S_k, \tag{1}$$

其中 $S = (S_n)$ 是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅.

为证明所要求的断言, 需要指出, 如果策略 $\pi \in SF$, 满足 $X_0^\pi = 0$ 和 $\mathsf{P}(X_N^\pi \geqslant 0) = 1$, 即

$$G_N^\pi \equiv \sum_{k=1}^N \gamma_k \Delta S_k \geqslant 0 \tag{2}$$

(P-a.s., 或者等价地, $\widetilde{\mathsf{P}}$-(a.s.)), 那么 $G_N^\pi = 0$ (P-a.s., 或者等价地, $\widetilde{\mathsf{P}}$-(a.s.)).

我们运用第二章 §1c 中的引理.

关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $(G_n^\pi)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 是鞅变换, 而这意味着, 它也是局部鞅. 由于 $G_N^\pi \geqslant 0$, 故根据上述引理, $(G_n^\pi)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 实际上是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅, 从而 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} G_N^\pi = G_0^\pi = 0$. 因此, $X_N^\pi = G_N^\pi = 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s. 以及 P-a.s.).

§2d. 无套利机会的鞅判别准则. III. 必要性证明 (利用条件 Esscher 变换)

1. 现在我们需要证明, 无套利机会导致在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上存在概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 使得序列 $S = (S_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅.

这个结果有多种证明, 关于它在连续时间情形下的推广也是如此 (参见例如, [92], [100], [171], [215], [259], [443], [455]), 所有这些证明, 都要用这样那样的泛函分析的观念和结果 (Hahn-Banach 定理, 有限维欧几里得空间上的凸集分离定理, Hilbert 空间方法等).

同时, 这些证明都带有鞅测度的 "存在证明" 特征, 对它们的构造是不明确的, 并且当然对所有等价于测度 P 的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 也没有明确的描述.

在这一含义下, 有意义的是给出还能有明确构造的定理条件的必要性证明; 即使不是对所有鞅测度, 至少也要对它的某个子类给出; 其实质在于, 如果例如说到求上测度和下测度, 就要求考察所有等价于原来的测度 P 的所有测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的类的 sup 和 inf (参见 §1c).

正是在这一明确构造鞅测度的途径上, 随后建立了证明; 这是著作 L. C. G. Rogers [407] 中的思路, 其等价测度的构造方法基于 "条件 Esscher 变换".

2. 为了澄清构造的思路, 我们先观察一步模型 $(N = 1)$, 并为了简单起见, 认为 $d = 1$, $B_0 = B_1 = 1$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. 我们也将认为, $\mathsf{P}(S_1 \neq S_0) > 0$. 在相反情形下, 我们将有一个毫无意义的平凡市场, 并且可取原来的测度 P 作为所要求的鞅测度.

在所考察的情形下, 每个组合 π 就是数对 (β, γ). 如果 $X_0^\pi = 0$, 那么这意味着数对 (β, γ) 以 $\beta + \gamma S_0 = 0$ 可达.

无套利假定意味着, 在这样的 (非平凡的) 市场上, 一定满足下列两个条件:

$$\mathsf{P}(\Delta S_1 > 0) > 0 \quad 和 \quad \mathsf{P}(\Delta S_1 < 0) > 0. \tag{1}$$

这样, §2a 中的图 54 在这里 "转化为" 图 55.

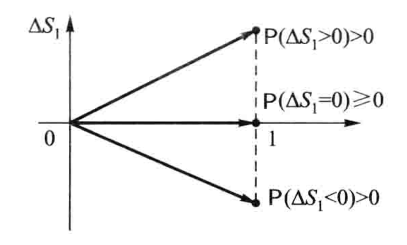


图 55 典型的无套利局面. 情形 $N = 1$

由条件 (1) 我们需要导出, 存在测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 使得

1) $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} |\Delta S_1| < \infty$,

2) $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\Delta S_1 = 0$.

把相应的结果无条件地陈述为所需要的“套利”结果是合适的, 其形式为下列“纯概率”断言.

引理 1. 设 X 为 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上有概率分布 P 的实值随机变量, 满足

$$\mathsf{P}(X > 0) > 0 \quad 和 \quad \mathsf{P}(X < 0) > 0. \tag{2}$$

那么存在测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 使得对于任何 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} e^{aX} < \infty, \tag{3}$$

特别是,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}|X| < \infty, \tag{4}$$

并且下列性质成立:

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} X = 0. \tag{5}$$

证明. 对于测度 P, 我们首先构造概率测度 Q,

$$\mathsf{Q}(dx) = c e^{-x^2} \mathsf{P}(dx), \qquad x \in \mathbb{R},$$

其中 c 是规范常数:

$$c^{-1} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}} e^{-X^2}.$$

对于 $a \in \mathbb{R}$, 设

$$\varphi(a) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} e^{aX}, \tag{6}$$

以及

$$Z_a(x) = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)}. \tag{7}$$

很明显, $\mathsf{Q} \sim \mathsf{P}$, 并且由测度 Q 的构造可得, $\varphi(a) < \infty$ 对于每个 $a \in \mathbb{R}$, 也显然有 $\varphi(a) > 0$.

同样明显的是, $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} Z_a(X) = 1$, $Z_a(x) > 0$. 因此, 对于每个 $a \in \mathbb{R}$, 可定义概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_a$:

$$\widetilde{\mathsf{P}}_a(dx) = Z_a(x) \mathsf{Q}(dx), \tag{8}$$

它具有这样的性质: $\widetilde{\mathsf{P}}_a \sim \mathsf{Q} \sim \mathsf{P}$.

现在我们察觉, 对于每个 $a \in \mathbb{R}$ 有定义的函数 $\varphi = \varphi(a)$ 是严格下凸的, 因为 $\varphi''(a) > 0$.

令

$$\varphi_* = \inf\{\varphi(a) \colon a \in \mathbb{R}\}.$$

我们看到, 可能有两种情形:

1) 存在 a_*, 满足 $\varphi(a_*) = \varphi_*$,

或者

2) 这样的 a_* 不存在.

在第一种情形下, 显然, $\varphi'(a_*) = 0$, 并且

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_{a_*}} X = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \frac{X e^{a_* X}}{\varphi(a_*)} = \frac{\varphi'(a_*)}{\varphi(a_*)} = 0.$$

因此, 在这一情形下, 作为所求的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 可取测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_{a_*}$.

我们现在指出, 第二种可能性 2) 与假定 (2) 矛盾.

事实上, 设 $\{a_n\}$ 是满足下式的序列:

$$\varphi_* < \varphi(a_n) \downarrow \varphi_*. \tag{9}$$

这个序列的极限等于 $+\infty$ 或 $-\infty$, 因为, 如果不是这样, 那么可选取收敛子列, 使得最小值将在有限点上达到, 与假定 2) 矛盾.

设 $u_n = \dfrac{a_n}{|a_n|}$ 以及 $u = \lim u_n$ $(= \pm 1)$.

由假定 (2),

$$\mathsf{Q}(uX > 0) > 0.$$

由此导出, 可求得这样的 $\delta > 0$, 使得

$$\mathsf{Q}(uX > \delta) = \varepsilon > 0, \tag{10}$$

并且可选取Q 的分布的连续点作为 δ, 即

$$\mathsf{Q}(uX = \delta) = 0.$$

因此,

$$\mathsf{Q}(a_n X > \delta |a_n|) = \mathsf{Q}(u_n X > \delta) \to \varepsilon, \qquad n \to \infty,$$

而这就是说, 对于充分大的 n,

$$\varphi(a_n) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} e^{a_n X} \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \left[e^{a_n X} I(a_n X > \delta |a_n|) \right] \geqslant \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \exp(\delta |a_n|) \to \infty,$$

它与 (9) 矛盾, 其中 $\varphi_* \leqslant 1$.

引理得证.

注. 上面叙述的构造概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_a$ 的方法, 基于由公式 (7) 来定义的 "Esscher 变换" $x \rightsquigarrow \dfrac{e^{ax}}{\varphi(a)}$; 这一变换自从 1932 年 F. Esscher 的论文 [144] 出现以来, 在精算界广为人知. 关于这个变换在金融数学中的应用参见例如 [177] 和 [178], 而关于在精算数学中的应用参见专著 [52].

3. 由所引入的引理的证明不难发现, 怎样把它推广到向量情形, 取代随机变量 X 的将是考察由在渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}, \mathsf{P})$ 上给定的 $\mathscr{F}_n$-可测随机变量所组成的有序序列 $(X_0, X_1, \cdots, X_N)$, 其中带限制条件 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ 和 $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$.

引理 2. 对每个 $1 \leqslant n \leqslant N$, 设

$$\mathsf{P}(X_n > 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0 \quad 和 \quad \mathsf{P}(X_n < 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0. \tag{11}$$

那么在空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上存在等价于 P 的概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得对于它序列 $(X_0, X_1, \cdots, X_N)$ 是 $(\widetilde{\mathsf{P}}, (\mathscr{F}_n))$-鞅差序列.

证明. 如果有必要, 那么由测度 P 立即可变换为新的概率测度 Q, 使得

$$\mathsf{Q}(d\omega) = c \exp\left\{-\sum_{i=0}^{N} X_i^2(\omega)\right\} \mathsf{P}(d\omega), \tag{12}$$

以及对于它, 生成函数 $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \exp\left\{\sum_{i=0}^{N} a_i X_i\right\}$ 取有限值.

所求测度 $\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)$ 用下列方式来构成 (比较 (8)).

我们定义函数

$$\varphi_n(a; \omega) = \mathsf{E}(e^{aX_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega). \tag{13}$$

对于每个固定的 ω, 这些函数 (由于 (11)) 都对 a 严格下凸. 仍然如同引理 1 那样, 可指出, 存在唯一的 (有限) 值 $a_n = a_n(\omega)$, 其上达到 $\inf\limits_a \varphi_n(a; \omega)$.

由于 $\inf\limits_a$ 重合于 $\inf\limits_{a\in\mathbb{Q}}$, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数集, 故 $\varphi_n(\omega) = \inf\limits_a \varphi_n(a, \omega)$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测函数; 它可用来断定 $a_n(\omega)$ 也是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测函数.

事实上, 如果 $[A, B]$ 是闭区间, 那么

$$\{\omega \colon a_n(\omega) \in [A, B]\} = \bigcap_m \bigcup_{a\in\mathbb{Q}\cap[A,B]} \left\{\omega \colon \varphi_n(a, \omega) < \varphi_n(\omega) + \frac{1}{m}\right\} \in \mathscr{F}_{n-1},$$

它也证明了量 $a_n(\omega)$ 的 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测性.

现在我们以递推的方式来定义序列 $Z_0, Z_1(\omega), \cdots, Z_N(\omega)$, 令 $Z_0 = 1$, 以及对于 $n \geqslant 1$,

$$Z_n(\omega) = Z_{n-1}(\omega) \frac{\exp\{a_n(\omega) X_n(\omega)\}}{\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(\exp\{a_n X_n\} \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)}. \tag{14}$$

显然, 量 $Z_n(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_n$-可测, 且形成鞅:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(Z_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = Z_{n-1} \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

所要求的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 通过下列公式来定义:

$$\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega) \mathsf{P}(d\omega). \tag{15}$$

再次如同引理 1 中那样, 由这一定义容易导出 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}|X_n| < \infty, 0 \leqslant n \leqslant N$, 以及

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \qquad 1 \leqslant n \leqslant N. \tag{16}$$

根据引理 1, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} X_0 = 0$. 因此, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $(X_0, X_1, \cdots, X_N)$ 是鞅差, 从而证明了引理的断言.

4. 在 $d = 1$ 的情形下, 鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$ (在市场无套利的条件下) 存在的必要性证明由引理 2 的断言导出.

其实, 令 $X_0 = S_0, X_1 = \Delta S_1, \cdots, X_N = \Delta S_N$. 不妨碍一般性, 无套利确保可认为, 对于所有 $n = 1, \cdots, N$,

$$\mathsf{P}(\Delta S_n > 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0 \quad \text{和} \quad \mathsf{P}(\Delta S_n < 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0. \tag{17}$$

事实上, 如果对于某个 n, $\mathsf{P}(\Delta S_n = 0) = 1$, 那么这一时刻 n 可在考察中排除, 因为对于任何自融资组合 π, 在这个时刻为 X_N^{π} 所带来的贡献等于零.

如果对某个 n,

$$\mathsf{P}(\Delta S_n \geqslant 0) = 1$$

或 $\mathsf{P}(\Delta S_n \leqslant 0) = 1$, 那么根据无套利条件, 必定有 $\mathsf{P}(\Delta S_n = 0) = 1$. (如果不是这样, 那么容易构造策略 π, 使得以正概率有 $X_N^{\pi} > 0$.) 于是为 X_N^{π} 带来的贡献仍然为零.

因此, 可以认为, (17) 对于所有 $n \leqslant N$ 满足, 以及所要求的必要性的证明由引理 1 和 2 应用于 $X_0 = S_0, X_n = \Delta S_n \ (1 \leqslant n \leqslant N)$ 而导出.

5. 现在我们转向 $d \geqslant 1$ 的一般情形. 与 $d = 1$ 的情形中的思路一样, 证明也可通过下列引理 2 在向量情形的推广来进行.

引理 3. 设 $(X_0, X_1, \cdots, X_N)$ 是给定在渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}, \mathsf{P})$ $(\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \mathscr{F}_N = \mathscr{F})$ 上的 d-维 $\mathscr{F}_n$-可测向量

$$X_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ \vdots \\ X_n^d \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

设 $X_n, 0 \leqslant n \leqslant N$, 满足下列条件: 只要对于其中有有界分量 $(|\gamma_n^i(\omega)| \leqslant c < \infty, \omega \in \Omega)$ 的非零 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测向量 $(\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0)$

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma_n^1 \\ \vdots \\ \gamma_n^d \end{pmatrix},$$

有

$$\mathsf{P}((\gamma_n, X_n) > 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0 \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}),$$

就有

$$\mathsf{P}((\gamma_n, X_n) < 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < 0 \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}),$$

其中 (γ_n, X_n) 是纯量积.

那么在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上存在等价于测度 P 的概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得关于它序列 $(X_0, X_1, \cdots, X_N)$ 是 d-维鞅差序列: $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}|X_n| < \infty$, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} X_0 = 0$ 及 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0, 1 \leqslant n \leqslant N$.

证明. 如果正则条件概率 $\mathsf{P}(X_n \in \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ 的拓扑支集 (即, 集聚这个测度的最小闭集) 不包含在空间 $\mathbb{R}^d$ 的真子空间中, 那么正如在 $d=1$ 的情形中那样, 函数

$$\varphi_n(a;\omega) = \mathsf{E}(e^{(a, X_n)} \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega), \qquad a \in \mathbb{R}^d$$

是严格凸的, $\inf \varphi_n(a;\omega)$ 在唯一的点 $a_n = a_n(\omega) \in \mathbb{R}^d$ 上达到, 并且 $a_n(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测.

有点微妙的局面是正则条件分布 $\mathsf{P}(X_n \in \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ 的支集包含在空间 $\mathbb{R}^d$ 的真子空间中的情形. 在著作 [407] 中指出, 在这种情形下也可选出唯一的 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测值 $a_n = a_n(\omega)$, 使得其上达到 $\inf \varphi_n(a;\omega)$.

所要求的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 同 (15) 和 (14) 中一样, 只是要把 (公式 (14) 中的) $a_n(\omega) X_n(\omega)$ 理解为向量 $a_n(\omega)$ 和 $X_n(\omega)$ 的纯量积.

6. 上面给出的基于 "条件 *Esscher* 变换" 的鞅测度的构造只给出了一个具体的测度, 尽管所有这样的等价于原来测度的测度类中除了这个所求得的测度以外, 还有别的测度. 下一节将叙述某些基于 *Girsanov* 变换思想的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的族的构造方法, 其中 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 等价于原来的测度 P, 或者说关于它绝对连续, 并且关于它价格的规范化序列是鞅.

Esscher 变换在保险数学的精算中已经运用很久 (参见例如 [52]). 这样的变换作为 "Esscher 变换" 在金融数学中鲜为人知 (尽管如此, 参见已经提到的著作 [177], [178]); 而在金融数学中对有关测度变换的一系列结果起重要作用的经常是所谓 "Girsanov 定理".

其实, 在这些变换之间有许多共同点, 对此, 我们将在本章的第 3 节中更为详尽地考察. 这里, 我们仅仅注意到, 与引理 1 相联系, 如果 X 是正态分布随机变量, $X \sim \mathscr{N}(0,1)$, 那么 $\varphi(a) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}} e^{aX} = e^{\frac{1}{2}a^2}$, 并且 (参见 (7))

$$Z_a(x) = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)} = e^{ax - \frac{1}{2}a^2}.$$

熟知 Girsanov 定理的读者很快就会察觉, 出现在这一定理中的 "Girsanov" 指数 $e^{ax-\frac{1}{2}a^2}$ (参见后面的 §3a) 无非就是公式 (7) 所定义的 Esscher 变换.

§2e. 第一基本定理的推广版本

1. 我们以 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 和 $\mathscr{P}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ 表示关于它折现价格

$$\frac{S}{B}=\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{0\leqslant n\leqslant N}$$

分别为鞅和局部鞅的所有概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\sim\mathsf{P}$ 的集合.

我们以 $\mathscr{P}_b(\mathsf{P})$ 表示 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的其 Radon-Nikodym 导数上有界的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 集合:

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}(\omega)\leqslant C(\widetilde{\mathsf{P}})\quad(\mathsf{P}\text{-a.s.})\ \text{对于某个常数}\ C(\widetilde{\mathsf{P}})\ \text{成立}.$$

定理 A (第一基本定理; §2b) 可如下列形式给出: 条件

(i) (B,S)-市场无套利

和

(ii) 鞅测度集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 非空 ($\mathscr{P}(\mathsf{P})\neq\varnothing$)

等价.

下面导出的定理 A* 是第一基本定理陈述的自然推广, 它给出无套利性的不同的等价刻画, 并且揭示了鞅测度集合的结构. (这一定理的陈述和证明根据著作 [251].)

我们首先引入若干记号.

设 $\mathsf{Q}=\mathsf{Q}(dx)$ 是 $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的概率测度, 并且

$K(\mathsf{Q})$ 是 Q 的拓扑支集 (即, 测度 Q 所集聚的最小闭集; [335; 第 5 卷]);

$L(\mathsf{Q})$ 是集合 $K(\mathsf{Q})$ 的闭凸包;

$H(\mathsf{Q})$ 是包含 $K(\mathsf{Q})$ 的最小仿射闭超平面 (显然, $L(\mathsf{Q})\subseteq H(\mathsf{Q})$);

$L^\circ(\mathsf{Q})$ 是 $L(\mathsf{Q})$ (在超平面 $H(\mathsf{Q})$ 的拓扑下) 的 "相对" 内部.

如果, 例如, 测度 Q 集聚在一个点 a 上, 那么 $H(\mathsf{Q})$ 重合于这个点, 并且 $L(\mathsf{Q})=L^\circ(\mathsf{Q})=\{a\}$. 在其他情形下, $H(\mathsf{Q})$ 的维数在 1 和 d 之间. 如果 $H(\mathsf{Q})$ 的维数为 1, 那么 $L(\mathsf{Q})$ 是闭线段, 而 $L^\circ(\mathsf{Q})$ 是开线段.

我们将以 $\mathsf{Q}_n(\omega,\cdot)$ 和 $\overline{\mathsf{Q}}_n(\omega,\cdot)$ 表示正则条件分布 $\mathsf{P}(\Delta S_n\in\cdot\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ 和 $\mathsf{P}\left(\Delta\left(\dfrac{\Delta S_n}{\Delta B_n}\right)\in\cdot\,\middle|\,\mathscr{F}_{n-1}\right)(\omega)$, $1\leqslant n\leqslant N$.

注意, 由于 $B_n>0$, $0\leqslant n\leqslant N$, 并且 B_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 故集合 $K(\mathsf{Q})$, $L(\mathsf{Q})$ 和 $L^\circ(\mathsf{Q})$ 对于 $\mathsf{Q}=\mathsf{Q}_n$ 和 $\mathsf{Q}=\overline{\mathsf{Q}}_n$ 是一样的. 因此, 不妨碍一般性, 并为了简化记号, 在以后导出的陈述和证明中将假定 $B_n\equiv1$, $n\leqslant N$.

定理 A* (第一基本定理的推广版本; [251]). 设定理 A 的条件满足. 下列断言等价:

a) (B,S)-市场是无套利的;

a′) (B,S)-市场是弱无套利的;

a$''$) (B, S)-市场是强无套利的;

b) 集合 $\mathscr{P}_b(\mathsf{P}) \neq \varnothing$;

c) 集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$;

d) 集合 $\mathscr{P}_{\text{loc}}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$;

e) 对于所有 $n \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 和P-几乎所有 $\omega \in \Omega$, 点 $0 \in L^{\circ}(\overline{\mathsf{Q}}_n(\omega, \cdot))$.

我们先对所陈述的断言提出一系列一般的注记.

关于无套利、弱无套利和强无套利市场的定义参见 §2a.

由第二章 §1c 的引理得到, 其实 $\mathscr{P}(\mathsf{P}) = \mathscr{P}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$, 从而,

$$\text{c)} \iff \text{d)}.$$

又, 如果性质 a), a$'$), a$''$), c) 或 e) 对于某个等价于测度P 的测度 $\overline{\mathsf{P}}$ 满足, 那么它们也关于测度P 满足. 如果性质 b) 关于测度 $\overline{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$ 满足 (即 $\mathscr{P}_b(\overline{\mathsf{P}}) \neq \varnothing$), 并且导数 $\dfrac{d\overline{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$ 有界, 那么性质 b) 也对于原来的测度P 满足.

现在我们察觉, 总可找到测度 $\overline{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 使得关于它, 所有量 S_n $(n \leqslant N)$ 可积, 且导数 $\dfrac{d\overline{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$ 有界. 例如, 为了做到这点, 只要假定

$$d\overline{\mathsf{P}} = C \exp\left(-\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=1}^{N} |S_n^i|\right) d\mathsf{P},$$

其中 C 是规范常数.

这样, 在证明定理时, 立即可假定, 原来的测度 P 满足 $\mathsf{E}|S_n| < \infty$, $n \leqslant N$.

于是, 由于蕴涵关系

$$\text{a}'') \implies \text{a}) \implies \text{a}')$$

和

$$\text{b}) \implies \text{c})$$

显然成立, 故只需要证明

$$\text{a}') \implies \text{e}) \implies \text{b}$$

和

$$\text{c}) \implies \text{a}'').$$

2. 我们引入一系列为证明这三个蕴涵关系所需要的对象, 并陈述两个辅助断言 (引理 1 和 2).

设 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ 为 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的测度, 它满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x| \mathsf{Q}(dx) < \infty. \tag{1}$$

(以后将取正则条件分布 $\mathsf{Q}_n(\omega, dx)$ $(n \leqslant N)$ 作为 Q, 并且对于它们, 由于假定 $\mathsf{E}|S_n| < \infty$ $(n \leqslant N)$ 所以条件 (1) (P-a.s.) 满足.)

设 $x' = (x, v) \in E = \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ 以及 $\mathsf{Q}' = \mathsf{Q}'(dx')$ 为空间 E 的 Borel σ-代数 $\mathscr{E}$ 上的某个测度, 它与测度 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ 在下列意义下相联系: Q 是测度 Q′ 的 "第一边缘", 即 $\mathsf{Q}(dx) = \mathsf{Q}'(dx, (0, \infty))$.

我们将以 $Z(\mathsf{Q}')$ 表示 E 上的满足下列条件的正 Borel 函数 $z = z(x, v)$ 的族:

$$\int_E |x| z(x, v) \mathsf{Q}'(dx; dv) < \infty, \tag{2}$$

$$\int_E z(x, v) \mathsf{Q}'(dx; dv) = 1, \tag{3}$$

且具有使函数 $vz(x, v)$ 有界的性质.

设 $B(a, \varepsilon)$ 是中心在点 a 处、半径为 ε 的 $\mathbb{R}^d$ 中的球. 我们以 G 表示所有族

$$g = (k, (a_i, \varepsilon_i, \alpha_i, \alpha_i')_{i=1,\cdots,k}) \tag{4}$$

的集合, 其中 $k \in \{1, 2, \cdots\}$, $a_i \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\alpha_i' > 0$.

我们对 $g \in G$ 联系 (E 上的) 正函数

$$z_g(x, v) = \frac{1}{\max(v, 1)} \sum_{i=1}^{k} \left[\alpha_i I_{B(a_i, \varepsilon_i)}(x) + \alpha_i' I_{B^c(a_i, \varepsilon_i)}(x) \right], \tag{5}$$

其中 $B^c = \mathbb{R}^d \setminus B$.

如果 $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}'} z_g = 1$, 那么由 (1) 可见, $z_g \in Z(\mathsf{Q}')$. 从而, 对于这样的函数 z_g, 定义向量 (重心)

$$\varphi(g) = \int_E x z_g(x, v) \mathsf{Q}'(dx, dv). \tag{6}$$

记

$$\Phi(\mathsf{Q}') = \{\varphi(g) \colon g \in G,\ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}'} z_g = 1\}. \tag{7}$$

引理 1. 下列关系式成立:

$$L(\mathsf{Q}) = \overline{\Phi}(\mathsf{Q}'), \tag{8}$$

$$L^{\circ}(\mathsf{Q}) \subseteq \Phi(\mathsf{Q}'), \tag{9}$$

如果 $0 \neq L^{\circ}(\mathsf{Q})$, 那么可求得 $\mathbb{R}^d$ 中的向量 γ, 使得

$$\mathsf{Q}(x \colon (\gamma, x) \geqslant 0) = 1 \quad 和 \quad \mathsf{Q}(x \colon (\gamma, x) > 0) > 0. \tag{10}$$

证明. 我们先确立 $L(\mathsf{Q}) \subseteq \overline{\Phi}(\mathsf{Q}')$.

设 $y \in K(\mathsf{Q})$. 我们指出, 可求得 $\Phi(\mathsf{Q}')$ 中的点列 y_n, 使得 $y_n \to y$. 换句话说, 测度 Q 的拓扑支集中的每个点 y 可作为某个序列 $y_n = \varphi(g_n)$ 的极限来得到, 其中 $g_n \in G$, $n \geqslant 1$.

设 $A_n = B(y, 1/n)$ 为中心在 y 上、半径为 $1/n$ 的球. 令

$$a_n = \mathsf{Q}''(A_n), \qquad a_n^c = \mathsf{Q}''(A_n^c)$$

和

$$b_n = \int_{A_n} x\mathsf{Q}''(dx), \qquad b_n^c = \int_{A_n^c} x\mathsf{Q}''(dx),$$

其中

$$\mathsf{Q}''(A) = \int_E I_A \frac{1}{\max(v,1)} \mathsf{Q}'(dx, dv), \qquad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d). \tag{11}$$

我们选取 δ_n 满足 $\delta_n a_n + \dfrac{a_n^c}{n} = 1$.

由于 $y \in K(\mathsf{Q})$, 故 $a_n > 0$. 同样明显的是 $\sup\limits_n a_n^c < \infty$. 由此可见, 至少对于大 n 值, 有 $\delta_n > 0$.

因此, 如果 $g_n = (1, (y, \frac{1}{n}, \delta_n, \frac{1}{n}))$, 那么对于大 n, 有

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}'} z_{g_n} = \delta_n a_n + \frac{a_n^c}{n} = 1. \tag{12}$$

令 $y_n = \varphi(g_n)$, 于是 $y_n = \delta_n b_n + \dfrac{b_n^c}{n}$, 其中 $\sup\limits_n |b_n^c| < \infty$.

由于 $\delta_n a_n \to 1$ 以及 $b_n - y a_n \to 0$, 故 $y_n \to y$.

这样, $K(\mathsf{Q})$ 包含在集合 $\Phi(\mathsf{Q}')$ 的闭包 $\overline{\Phi}(\mathsf{Q}')$ 中:

$$K(\mathsf{Q}) \subseteq \overline{\Phi}(\mathsf{Q}'). \tag{13}$$

我们现在察觉, 集合 $\Phi(\mathsf{Q}')$ 是凸集. 因此, 由 (13) 得到,

$$L(\mathsf{Q}) \subseteq \overline{\Phi}(\mathsf{Q}'). \tag{14}$$

另一方面, 每个点 $y \in \Phi(\mathsf{Q}')$ 是等价于测度 Q 的概率测度的均值 (参见 (6), (7) 和 (11)), 而这就是说, y 属于集合 $K(\mathsf{Q})$ 的闭凸包 $L(\mathsf{Q})$.

这样一来, $\Phi(\mathsf{Q}') \subseteq L(\mathsf{Q})$, 因而 $\overline{\Phi}(\mathsf{Q}') \subseteq L(\mathsf{Q})$, 它与 (14) 一起确立了等式 $L(\mathsf{Q}) = \overline{\Phi}(\mathsf{Q}')$.

现在我们利用每个凸集包含其闭包的内部. 对凸集 $\Phi(\mathsf{Q}')$ (相对于 $H(\mathsf{Q})$ 的拓扑) 应用这一性质, 我们求得 $L^\circ(\mathsf{Q}) \subseteq V(\mathsf{Q}')$.

这就确立了性质 (8) 和 (9).

我们转向引理的下一断言的证明.

设点 $0 \notin L^{\circ}(\mathsf{Q})$, 于是借助凸分析中的标准 “分离性” 技巧可能分为下列三种情形; 参见例如, [406].

第一种情形: $0 \notin H(\mathsf{Q})$. 在这一情形下, 可取由零出发、指向集合 $H(\mathsf{Q})$、并与它正交的向量作为 γ. 于是 $(\gamma, x) > 0$ 对于 $x \in H(\mathsf{Q})$ 成立, 它自然可导出性质 $\mathsf{Q}(x\colon (\gamma, x) > 0) = 1$.

第二种情形: $0 \in H(\mathsf{Q})$, 但 $0 \notin L(\mathsf{Q})$. 于是显然, 可求得向量 $\gamma \in H(\mathsf{Q})$ 使得 $(\gamma, x) > 0$ 对于所有 $x \in L(\mathsf{Q})$ 成立, 因而, $\mathsf{Q}(x\colon (\gamma, x) > 0) = 1$.

第三种情形: $0 \in H(\mathsf{Q})$, 但 $0 \in L(\mathsf{Q}) \setminus L^{\circ}(\mathsf{Q})$. 于是在 $H(\mathsf{Q})$ 上两个集合 $L(\mathsf{Q})$ 和 $K(\mathsf{Q})$ 各在某个维数为 $q-1$ 的包含 0 的超平面 H' 的一边. (如果 $q=1$, 那么 H' 归结为点 $\{0\}$.) 按照定义, $H(\mathsf{Q})$ 是包含 $K(\mathsf{Q})$ 的最小超平面. 因此, $K(\mathsf{Q})$ 不包含在 H' 中.

所要求的向量 γ 在这种情形下可用下列方式来构造.

我们在 $H(\mathsf{Q})$ 中取某个与 H 正交的非零向量 γ, 且满足 $(\gamma, x) \geqslant 0$ 对于所有 $x \in L(\mathsf{Q})$ 成立; 而这就是说, $\mathsf{Q}(x\colon (\gamma, x) \geqslant 0) = 1$.

现在我们察觉, 可求得点 $x \in K(\mathsf{Q})$ 使得纯量积 $(\gamma, x) > 0$. 因此, 考虑到 $K(\mathsf{Q})$ 是测度 Q 的拓扑支集, 我们求得 $\mathsf{Q}(x\colon (\gamma, x) > 0) > 0$.

引理 1 得证.

3. 下列我们所需要的结果有关 “可测选择” 存在的论证.

引理 2. 设 $(E, \mathscr{E}, \mu)$ 是某个概率空间, $(G, \mathscr{G})$ 是有 Borel σ-代数 $\mathscr{G}$ 的波兰空间. 设 A 是 $E \times G$ 中的 $\mathscr{E} \otimes \mathscr{G}$-可测子集.

则存在称为选择函数的 G-值 $\mathscr{E}/\mathscr{G}$-可测函数 $Y = Y(x)$, $x \in E$, 使得$(x, Y(x)) \in A$ 对于 μ-几乎所有的属于 E-射影

$$\pi(A) = \{x\colon \exists y \in G, \text{使得 } (x, y) \in A\}$$

的 x 成立.

注 1. 首先注意到, 在这一陈述中, 波兰空间理解为可分完备距离空间, 即其上存在与所考察的拓扑相容的距离、并且关于该距离是完备可分的拓扑空间.

在论证 “可测选择” 的文献中, 可以在关于可测空间 $(E, \mathscr{E})$ 和 $(G, \mathscr{G})$ 的各种不同的假定下, 找到 (参见例如, [11]) 可测选择存在定理的不同陈述. 对于我们的目标来说, 为简单起见, 这里将根据例如 [102; 第三章, 定理 82] 或者 [11; 附录 I, 定理 1]; 与此相对应的是下列命题 (陈述上有一点修正) 成立:

命题. 设 $(E, \mathscr{E})$ 是任意的可测空间, $(G, \mathscr{G})$ 是波兰空间. 如果 $A \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{G}$, 那么存在普适可测函数 $\widehat{Y} = \widehat{Y}(x)$, $x \in E$, 使得 $(x, \widehat{Y}(x)) \in A$ 对于所有 $x \in \pi(A)$ 成立.

我们记得, 给定在 $(E, \mathscr{E})$ 上的 G-值函数 $\widehat{Y} = \widehat{Y}(x)$ 称为普适可测, 是指它是

$\widehat{\mathscr{E}}/\mathscr{G}$-可测的, 其中 $\widehat{\mathscr{E}}=\bigcap_{\mu}\mathscr{E}_{\mu}$ 是 σ-代数 $\mathscr{E}_{\mu}$ (关于所有 $(E,\mathscr{E})$ 上的有限测度 μ) 的交, 这里 $\mathscr{E}_{\mu}$ 中的每一个都是 $\mathscr{E}$ 对测度 μ 的完备化.

这样一来, 由所陈述的命题可得, 存在 $\widehat{\mathscr{E}}/\mathscr{G}$-可测函数 $\widehat{Y}=\widehat{Y}(x)$, $x\in E$, 使得对于所有 $x\in\pi(A)$ 有 $(x,\widehat{Y}(x))\in A$.

由于 $\widehat{\mathscr{E}}=\bigcap_{\mu}\mathscr{E}_{\mu}$, 故对于每个有限测度 μ, 函数 $\widehat{Y}$ 当然为 $\mathscr{E}_{\mu}/\mathscr{G}$-可测. 利用 $(G,\mathscr{G})$ 是波兰空间, 以及 $\mathscr{E}_{\mu}$ 是 $\mathscr{E}$ 关于测度 μ 完备的 σ-代数, 不难断定 (用简单函数逼近 $\widehat{Y}$), 存在 $\mathscr{E}/\mathscr{G}$-可测函数 Y, 使得 $Y=\widehat{Y}$ (μ-a.s.).

这样, 引理 2 的断言由上述命题可得.

4. a$'$) $\Longrightarrow$ e) **的证明**. 设市场无套利, 但 e) 不成立. 那么可求得 $n\in\{1,2,\cdots,N\}$ 和 $\mathsf{P}(B)>0$ 的 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测集 B, 使得对于几乎所有 $\omega\in B$, 点 0 不属于 $L^{\circ}(\mathsf{Q}_n(\omega,\cdot))$.

根据引理 1 中的后一个断言, 集合①

$$A=\Big\{(\omega,\gamma)\in\Omega\times\mathbb{R}^d\colon \omega\in B,\ \mathsf{Q}_n(\omega,\{x\colon(\gamma,x)\geqslant 0\})=1,\quad \mathsf{Q}_n(\omega,\{x\colon(\gamma,x)>0\})>0\Big\}\tag{15}$$

为 $\mathscr{F}_{n-1}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可测, 并且其射影 $\pi(A)$ 等于 B.

根据关于可测选择的引理 2, 可求得 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测向量 $g=g(\omega)$, 使得

$$\mathsf{Q}_n(\omega,\{x\colon(g(\omega),x)\geqslant 0\})=1,\qquad \mathsf{Q}_n(\omega,\{x\colon(g(\omega),x)>0\})>0$$

对于 P-几乎所有 $\omega\in B$ 成立.

由于集合 B 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 故函数 $\widetilde{g}(\omega)=g(\omega)I_B(\omega)$ 将为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 并且根据 (15), $(\widetilde{g},\Delta S_n)\geqslant 0$ (P-a.s.) 以及 $\mathsf{P}((\widetilde{g},\Delta S_n)>0)>0$.

令 $\gamma_i=\widetilde{g}I_{i=n}$, $i=1,\cdots,N$, 并根据它们定义自融资策略 $\pi=(\beta,\gamma)$, 使得资本 X^{π} 满足 $X_0^{\pi}=0$ 和 $\Delta X_i^{\pi}=(\gamma_i,\Delta S_i)$. $\Big($元素 β_i 比如在 $B_i\equiv 1$ 的情形下按照如下的设想来定义: 资本 $X_i^{\pi}=(\gamma_i,S_i)+\beta_i$ 必须同时等于 $\sum\limits_{j=1}^{i}(\gamma_j,\Delta S_j)$.$\Big)$

很明显, 所构造的策略 π 满足 $X_0^{\pi}=0$, $X_i^{\pi}=0$ 对于 $i<n$ 成立; $X_i^{\pi}=X_n^{\pi}\geqslant 0$ 对于所有 $i\geqslant n$ 成立; 以及 $\mathsf{P}(X_N^{\pi}>0)>0$, 它与条件 a$'$) 矛盾.

5. e) $\Longrightarrow$ b) **的证明.** 我们将按照公式 $d\widetilde{\mathsf{P}}=\widetilde{Z}d\mathsf{P}$ 来构造鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}_b(\mathsf{P})$, 其中

$$\widetilde{Z}=\prod_{n=1}^{N}\widetilde{z}_n,\tag{16}$$

而 $\widetilde{z}_n$ 为某个 $\mathscr{F}_n$-可测函数.

我们考察正则条件概率

$$\mathsf{Q}_n(\omega,dx)=\mathsf{P}(\Delta S_n\in dx\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(\omega),$$

①原版和英文版在这里都遗漏下式的标号 (15). ——译者注

它也称为 (由 $(\Omega,\mathscr{F}_{n-1})$ 到 $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ 的) 转移概率. 下面将根据 $\mathsf{Q}_n(\omega,dx)$ 以特殊方式来构造 (由 $(\Omega,\mathscr{F}_{n-1})$ 到 $(E,\mathscr{E})$ $(E=\mathbb{R}^d\times(0,\infty))$ 的) 转移概率 $\mathsf{Q}'_n(\omega,dx,dv)$, 使得

$$\mathsf{Q}'_n(\omega,dx,(0,\infty))=\mathsf{Q}_n(\omega,dx). \tag{17}$$

现在运用第 2 点中的讨论, 在这里取测度 $\mathsf{Q}'_n(\omega,dx,dv)$ $(n=1,\cdots,N,\ \omega\in\Omega)$ 作为测度 $\mathsf{Q}'(dx,dy)$.

记 (参见 (5)–(7))

$$A=\left\{(\omega,g)\in\Omega\times G\colon\ \int_E z_g(x,v)\mathsf{Q}'_n(\omega,dx,dv)=1,\ \varphi(g)=0\right\}.$$

我们察觉, 上面所引入的空间由在 (4) 中定义的元素 g 所组成的 G 是波兰空间 (对直积拓扑而言). 设 $\mathscr{G}$ 是它的 Borel σ-代数.

集合 A 为 $\mathscr{F}_{n-1}\otimes\mathscr{G}$-可测, 且它在 Ω 上的射影 $\pi(A)$ (根据假定 e)) 重合于 Ω, 即 $\pi(A)=\Omega$.

于是, 根据引理 2, 可求得 G-值 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测函数 $g_n=g_n(\omega)$, 使得 $(\omega,g_n(\omega))\in A$ 对于 P-几乎所有 $\omega\in\Omega$ 成立.

我们在 $\Omega\times E$ 上定义函数

$$z_n(\omega,x,v)=z_{g_n(\omega)}(x,v). \tag{18}$$

这个函数为 $\mathscr{F}_{n-1}\otimes\mathscr{E}$-可测, 且满足 (P-a.s.)

$$\int_E z_n(\omega,x,v)\mathsf{Q}'(\omega,dx,dv)=1 \tag{19}$$

和

$$\int_E xz_n(\omega,x,v)\mathsf{Q}'(\omega,dx,dv)=0. \tag{20}$$

由 (5), P-a.s.

$$\sup_v vz_n(\omega,x,v)<\infty.$$

再应用引理 2, 我们求得, 存在 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测正函数 $V_{n-1}=V_{n-1}(\omega)$, 使得对于所有 (x,v) 和 P-几乎所有 $\omega\in\Omega$, 有

$$vz_n(\omega,x,v)\leqslant V_{n-1}(\omega). \tag{21}$$

现在转向测度序列 $\mathsf{Q}'_n=\mathsf{Q}'_n(\omega,dx,dv)$ 的 (向后归纳) 构造, 并对于它们再建立相应的函数序列 $z_n(\omega,x,v)$, $n=N,N-1,\cdots$.

为了这一目标, 取 $n=N$, 并令 $V_N(\omega)=1$, $\omega\in\Omega$. 设 $\mathsf{Q}'_N=\mathsf{Q}'_N(\omega,dx,dv)$ 是向量 $(\Delta S_N,V_N)$ 的正则 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测条件概率. 显然, 这一测度的 “第一边缘” 恰好是 $\mathsf{Q}_N=\mathsf{Q}_N(\omega,dx)$.

设 $z_N(\omega,x,v)$ 是用 Q'_N 对应上述构造 (18) 来定义的, 而 $V_{N-1}(\omega)$ 是用 $z_N(\omega,x,v)$ 对应 (21) 来定义的. 于是我们把 Q'_{N-1} 定义为向量 $(\Delta S_{N-1}, V_{N-1})$ 的正则 $\mathscr{F}_{N-1}$-可测条件分布, 并且, 一般来说, 如果 Q'_n 已确定, 那么我们就根据 (18) 来确定 $z_n(\omega,x,v)$, 而 $V_{n-1}(\omega)$ 与不等式 (21) 相对应.

这以后, 我们定义 Q'_{n-1} 为向量 $(\Delta S_{n-1}, V_{n-1})$ 的 $\mathscr{F}_{n-1}$-条件分布, 如此等等.

记

$$\widetilde{z}_n(\omega) = z_n(\omega, \Delta S_n(\omega), V_n(\omega)), \tag{22}$$

以及

$$\widetilde{Z}(\omega) = \prod_{n=1}^{N} \widetilde{z}_n(\omega). \tag{23}$$

于是, 由 (21) 和 (22),

$$\widetilde{z}_n(\omega) \leqslant \frac{V_{n-1}(\omega)}{V_n(\omega)}. \tag{24}$$

由 (23) 和 (24), 并考虑到 $V_N(\omega) = W_N(\omega) = 1$, 我们求得

$$\widetilde{Z}(\omega) \leqslant V_0(\omega), \tag{25}$$

其中 $V_0(\omega) < \infty$ (P-a.s.). 由于 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \omega\}$, 故 $V_0(\omega)$ 是常数 (P-a.s.).

又由 Q'_n 的定义以及条件 (19) 和 (20), 我们求得, (P-a.s.)

$$\mathsf{E}(\widetilde{z}_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega) = 1 \tag{26}$$

和

$$\mathsf{E}(\Delta S_n \widetilde{z}_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega) = 0. \tag{27}$$

由 (26) 得到, $\mathsf{E}\widetilde{Z}(\omega) = 1$, 而这就是说, 可定义新的概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 令

$$\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = \widetilde{Z}(\omega)\mathsf{P}(d\omega). \tag{28}$$

由 (25), 显然有 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$.

由于

$$\widetilde{\mathsf{E}}|\Delta S_n| = \mathsf{E}\widetilde{Z}|\Delta S_n| \leqslant V_0 \mathsf{E}|\Delta S_n| < \infty,$$

以及根据 "Bayes 公式" (参见 §3a 中的公式 (4)) 和 (27),

$$\widetilde{\mathsf{E}}(\Delta S_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(\Delta S_n \widetilde{z}_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0,$$

故关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $S = (S_n)$ 是鞅.

由所引入测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的构造我们得到, $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}_b(\mathsf{P})$. 从而, 蕴涵关系 e) $\Longrightarrow$ b) 成立.

c) $\Longrightarrow$ a$''$) **的证明.** 设 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$. 于是 $S = (S_n)_{n \leqslant N}$ 是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅. 假定 π 是使 $X_0^\pi = 0$ 和 $X_N^\pi \geqslant 0$ 的自融资策略.

由于 $\Delta X_n^\pi = \gamma_n \Delta S_n$, 故 $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\leqslant N}$ 是鞅变换, 而这意味着, 根据第二章 §1c 中的引理, X^π 是鞅. 因此, $\mathsf{E}X_N^\pi = \mathsf{E}X_0^\pi = 0$, 而这就是说, $X_N^\pi = 0$ (P-a.s.), 它证明了蕴涵关系 c) $\Longrightarrow$ a″).

定理 A* 得证.

注 2. 如果不假定 $B_n \equiv 1$, $n \leqslant N$, 那么取代对正则条件概率

$$\mathsf{Q}_n(\omega, dx) = \mathsf{P}(\Delta S_n \in dx \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$$

的运作, 应该直接涉及下列条件概率的正则文本:

$$\overline{\mathsf{Q}}_n(\omega, dx) = \mathsf{P}\left(\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) \in dx \,\middle|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)(\omega).$$

相应的讨论要考虑到 $B_n > 0$ 和 B_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, $n \leqslant N$, 其他都一样, 没有任何本质变化.

3. 借助绝对连续测度替换来构造鞅测度

§3a. 基本定义. 密度过程

1. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ 为渗透概率空间, $n \geqslant 1$.

我们说, 在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上定义的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 关于测度 P *绝对连续* (记为: $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$), 是指对于每个 $A \in \mathscr{F}$, 由 $\mathsf{P}(A) = 0$ 导出 $\widetilde{\mathsf{P}}(A) = 0$:

$$\mathsf{P}(A) = 0 \Longrightarrow \widetilde{\mathsf{P}}(A) = 0.$$

给定在同一个可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度 P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 称为等价 (记为: $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$), 是指 $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$ 和 $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$.

在许多情形下, 绝对连续性或测度等价性的要求看起来太强, 并且往往简直就是不必要的, 因为, 其实只要把握下列意义下的较弱的局部绝对连续性概念.

设 $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} \mid \mathscr{F}_n$ 是概率测度 P 在 σ-代数 $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}$ 上的局限. 换句话说, P_n 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}_n)$ 上的测度, 并且满足对于每个 $A \in \mathscr{F}_n$, 有

$$\mathsf{P}_n(A) = \mathsf{P}(A).$$

我们说, 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 关于测度 P *局部绝对连续* (记为: $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$), 是指对于每个 $n \geqslant 1$, 有

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n.$$

测度P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 称为*局部等价* (记为 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\sim} \mathsf{P}$), 是指 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 和 $\mathsf{P} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \widetilde{\mathsf{P}}$.

比如, 若 $\Omega = \mathbb{R}^\infty$, 即有坐标的序列空间 $\omega = (x_1, x_2, \cdots)$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\omega\colon x_1, \cdots, x_n)$ 为由前 n 个坐标生成的 σ-代数, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$, 而 P, $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率测度, 那么局部绝对连续性 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 无非就是有限维概率分布的绝对连续性.

我们察觉, 如果先验假定, $n \leqslant N < \infty$, 那么局部绝对连续性概念和 (简单) 绝对连续性重合. 这样, 引入 "局部性" 的概念对于那些时间参数可取无限值 ($n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$) 的模型有意义.

除了测度 P 在 σ-代数 $\mathscr{F}_n$ 上的局限 $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}_n$ 以外, 还可考察测度 P 在 σ-代数 $\mathscr{F}_\tau$ 上的局限 $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}_\tau$, 它由这样的集合 $A \in \mathscr{F}$ 所组成, 对于它们来说, 对每个 $n \geqslant 1$, $\{\tau(\omega) \leqslant n\} \cap A \in \mathscr{F}_n$. 我们强调, 如通常一样, $\mathscr{F}_\infty = \mathscr{F}$ (以及 $\mathscr{F}_{\infty-} = \bigvee \mathscr{F}_n$); 参见 [250; 第 I 章, §1a].

2. 设 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$. 那么 $\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n$ 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 并且如所周知 (参见例如, [439]), 存在 *Radon-Nikodym* 导数, 它们记为

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n} \quad \text{或} \quad \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}(\omega)$$

并且定义为这样的 $\mathscr{F}_n$-可测函数 $Z_n = Z_n(\omega)$:

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n(A) = \int_A Z_n(\omega)\mathsf{P}_n(d\omega), \qquad A \in \mathscr{F}_n. \tag{1}$$

注. Radon-Nikodym 导数 $\dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$ 以唯一方式确定只能精确到 P_n-不可区分, 即, 如果 (1) 对于 $Z_n(\omega)$ 满足, 并且 (1) 同样对于 $Z'_n(\omega)$ 也满足 (把 $Z_n(\omega)$ 替换为 $Z'_n(\omega)$), 那么 $\mathsf{P}(Z_n(\omega) \neq Z'_n(\omega)) = 0$.

在这一含义下, $Z_n(\omega)$ 和 $Z'_n(\omega)$ 都是 Radon-Nikodym 导数的 "文本". 当我们说到 "Z_n 是 Radon-Nikodym 导数", 并记为 $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$ 时, 那么这自然理解为选取了某个文本, 并且我们对它进行运作. 这时, 不难看出, 所选取的文本总可以不仅满足 $\mathsf{P}(Z_n(\omega) \geqslant 0) = 1$, 并且也满足 $Z_n(\omega) \geqslant 0$ 对于所有 $\omega \in \Omega$ 和每个 $n \geqslant 1$ 成立. 正因为如此, 非负性要求通常干脆就包含在概率测度的 Radon-Nikodym 导数的定义中.

以后, 我们称离散时间过程

$$Z = (Z_n)_{n \geqslant 1}$$

为 (测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ 关于 P_n ($n \geqslant 1$) 的) "密度过程" (或者测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 关于满足 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的 P 的 "密度过程").

为了引用方便而引入的下列定理, 尽管很简单, 但对于密度过程来说是必要的重要性质.

定理. 设 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$.

a) 密度过程 $Z=(Z_n)$ 是非负 $(\mathsf{P},(\mathscr{F}_n))$-鞅, 满足 $\mathsf{E}Z_n=1$.

b) 设 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_{\infty-}$, 其中 $\mathscr{F}_{\infty-}=\bigvee\mathscr{F}_n$. 那么下列条件等价:

(i) $\widetilde{\mathsf{P}}\ll\mathsf{P}$;

(ii) 过程 $Z=(Z_n)$ 是一致可积 $(\mathsf{P},(\mathscr{F}_n))$-鞅;

(iii) $\widetilde{\mathsf{P}}\left(\sup\limits_n Z_n<\infty\right)=1$.

c) 设 $\tau=\inf\{n\colon Z_n=0\}$ 是密度过程首次转换为零的时刻. 那么也对于所有后来的时刻, 该过程在下列含义下"停留在零上":

$$\mathsf{P}\{\omega\colon \exists n\geqslant\tau(\omega),\ 使得\ Z_n(\omega)\neq 0\}=0.$$

d) 设 τ 是停时. 在集合 $\{\tau<\infty\}$ 上, 局限 $\widetilde{\mathsf{P}}_\tau=\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_\tau$, $\mathsf{P}_\tau=\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_\tau$ 在 σ-代数 $\mathscr{F}_\tau$ 上(参见第二章 §1f 中的定义 2) 满足 $\widetilde{\mathsf{P}}_\tau\ll\mathsf{P}_\tau$ 以及 (P-a.s.)

$$Z_\tau=\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_\tau}{d\mathsf{P}_\tau}. \tag{2}$$

e) 下列等式成立:

$$\widetilde{\mathsf{P}}\left(\inf_n Z_n>0\right)=1. \tag{3}$$

f) 如果 $\mathsf{P}(Z_n>0)=1$ 对于每个 $n\geqslant 1$ 成立, 那么 $\mathsf{P}\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\widetilde{\mathsf{P}}$ 以及

$$\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\mathrm{loc}}{\sim}\mathsf{P}.$$

证明. a) 由 (1), 对于 $A\in\mathscr{F}_n$, 有

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n(A)=\mathsf{E}(I_AZ_n)=\widetilde{\mathsf{P}}_{n+1}(A)=\mathsf{E}(I_AZ_{n+1}),$$

而这就是说, $\mathsf{E}I_AZ_n=\mathsf{E}I_AZ_{n+1}$. 因此, $\mathsf{E}(Z_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)=Z_n$ (P-a.s.) 对于每个 $n\geqslant 1$ 成立. 同样明显的是, $\mathsf{E}Z_n=\widetilde{\mathsf{P}}_n(\Omega)=1$. 从而, Z 是 $(\mathsf{P},(\mathscr{F}_n))$-鞅.

b) (i) $\Longrightarrow$ (ii). 我们重提下列鞅论的经典结果 ([109], 对于连续时间情形也参见第三章 §3b 第 4 节):

Doob 收敛定理. 设 $X=(X_n)$ 是关于测度 P 和流 $(\mathscr{F}_n)$ 的上鞅, 并存在可积随机变量 Y, 使得 $X_n\geqslant\mathsf{E}(Y\,|\,\mathscr{F}_n)$ (P-a.s.) 对于所有 $n\geqslant 1$ 成立.

那么 X_n (P-a.s.) 收敛于有限极限, 比如, X_∞:

$$\lim_n X_n=X_\infty\qquad(\text{P-a.s.}).$$

(证明参见 [109] 和许多教科书, 例如, [439; 第 VII 章 §4].)

为证明蕴涵关系 (i) $\Longrightarrow$ (iii) 只需注意到, 由于 $Z_n\geqslant 0$, 故由所陈述的 Doob 定理, 以概率 1 存在有限极限 $\lim\limits_n Z_n$. 但 $\widetilde{\mathsf{P}}\ll\mathsf{P}$, 因而这个极限也对测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 存在且有限, 而这就是说, $\widetilde{\mathsf{P}}\left(\sup\limits_n Z_n<\infty\right)=1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). 随机变量族 (ξ_n) 的一致可积性意味着

$$\lim_N \sup_n \mathsf{E}\left(|\xi_n| I(|\xi_n| > N)\right) = 0.$$

在所考察的情形下 $(\xi_n = Z_n)$, 由 (iii), 我们有

$$\mathsf{E}(Z_n I(Z_n > N)) = \widetilde{\mathsf{P}}(Z_n > N) \leqslant \widetilde{\mathsf{P}}\left(\sup_n Z_n > N\right) \to 0, \qquad N \to \infty,$$

这就证明了 (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). 由 Doob 定理, $Z_n \to Z_\infty$ (P-a.s.). 族 (Z_n) 的一致可积性于是也保证了在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中的收敛性, 即 $\mathsf{E}|Z_n - Z_\infty| \to 0$, $n \to \infty$.

对于集合 $A \in \mathscr{F}_m$ 和 $n \geqslant m$,

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{E} I_A Z_m = \mathsf{E} I_A Z_n.$$

但 $\mathsf{E}|Z_n - Z_\infty| \to \infty$. 因此, 对于每个 $A \in \mathscr{F}_m$,

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{E} I_A Z_\infty.$$

应用通常的 "单调类" 技巧 ([439; 第 II 章 §2]), 由此得到这个等式在 $\bigcup \mathscr{F}_n$ 和在 $\mathscr{F} = \sigma(\bigcup \mathscr{F}_n)$ $(\equiv \mathscr{F}_{-\infty} = \bigvee \mathscr{F}_n)$ 上保持成立.

这样一来, $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, 并且尤其有

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}} = Z_\infty,$$

其中 $Z_\infty = \lim Z_n$.

c) 为了证明这一性质, 我们需要另一个鞅论的经典结果 ([109], 对于连续时间再参见第三章 §3b 第 4 节):

Doob 停止定理.① *设上鞅 $X = (X_n)$ 满足下列性质: 存在可积随机变量 Y 使得*

$$X_n \geqslant \mathsf{E}(Y \mid \mathscr{F}_n), \qquad n \geqslant 1.$$

那么对于任何两个 Markov 时刻 σ 和 τ, 随机变量 X_σ 和 X_τ 可积, 且在集合 $\{\sigma \leqslant \tau\}$ 上,

$$\mathsf{E}(X_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma) \leqslant X_\sigma \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

(证明参见 [109], [439; 第 VII 章 §2].)

注. 在集合 $\{\omega\colon \tau(\infty) = \infty\}$ 上 $X_\tau(\omega)$ 的值被假定为等于 $X_\infty(\omega)$, 其中 $X_\infty(\omega)$ 是根据 Doob 收敛性定理存在的极限 $\lim X_n(\omega)$.

①英文版中称此定理为 Doob optional stopping theorem (Doob 可选停止定理). ——译者注

除了时刻 $\tau = \inf\{n \geqslant 1\colon Z_n = 0\}$ 以外, 我们引入时刻 $\sigma_m = \inf\{n \geqslant 1\colon Z_n > 1/m\}$. 不难断定, τ 和 σ_m 是停时, 即集合 $\{\tau \leqslant n\}$ 和 $\{\sigma_m \leqslant n\}$ 对于每个 $n \geqslant 1$ 和所有 $m \geqslant 1$ 都属于 $\mathscr{F}_n$. (我们记得, 如果 $Z_n(\omega) > 0$ 对所有 $n \geqslant 1$ 成立, 通常就认为 $\tau(\omega) = \infty$.)

由 Doob 停止定理,

$$\mathsf{E}(Z_{\sigma_m} \mid \mathscr{F}_\tau) \leqslant Z_\tau = 0 \text{ 在集合 } \{\omega\colon \tau(\omega) < \infty\} \text{ 上成立.}$$

这就是说, $Z_{\sigma_m} I(\tau < \infty) = 0$, $m \geqslant 1$, 因此, $\sigma_m = \infty$ (P-a.s.), $m \geqslant 1$, 而这意味着下列所要求的性质满足:

$$\mathsf{P}\{\omega\colon \exists n \geqslant \tau(\omega), \text{ 使得 } Z_n(\omega) \neq 0\} = 0.$$

d) 设 $A \in \mathscr{F}_\tau$. 于是

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[I_A \cdot I_{\{\tau<\infty\}} \cdot Z_\tau] &= \sum_{n\geqslant 1} \mathsf{E}[I_A \cdot I_{\{\tau=n\}} \cdot Z_\tau] = \sum_{n\geqslant 1} \mathsf{E}[I_A \cdot I_{\{\tau=n\}} \cdot Z_n] \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \widetilde{\mathsf{P}}(A \cap I(\tau = n)) = \widetilde{\mathsf{P}}(A \cap \{\tau < \infty\}),\end{aligned}$$

这就证明了所要求的断言.

e) 记

$$\tau_m = \inf\left\{n\colon Z_n < \frac{1}{m}\right\}.$$

于是, 由 d),

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\tau_m < \infty) = \mathsf{E}(Z_{\tau_m} I(\tau_m < \infty)) \leqslant \frac{1}{m},$$

而这就是说,

$$\widetilde{\mathsf{P}}\left(\bigcap_m \{\tau_m < \infty\}\right) = 0,$$

它等价于所要求的断言 $\widetilde{\mathsf{P}}\left(\inf_n Z_n > 0\right) = 1$.

f) 如果 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 以及 $\mathsf{P}(Z_n > 0) = 1$, $n \geqslant 1$, 那么也有 $\widetilde{\mathsf{P}}(Z_n > 0) = 1$.

对于 $A \in \mathscr{F}_n$, 令

$$\mathsf{Q}_n(A) = \int_A Z_n^{-1} \widetilde{\mathsf{P}}(d\omega).$$

于是, 由于 $\widetilde{\mathsf{P}}_n(d\omega) = Z_n \mathsf{P}_n(d\omega)$, 故

$$\mathsf{Q}_n(A) = \int_A Z_n^{-1} Z_n \mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{P}_n(A), \qquad n \geqslant 1.$$

从而,

$$\mathsf{P}_n(A) = \int_A Z_n^{-1} \widetilde{\mathsf{P}}_n(d\omega),$$

而这就是说, $\mathsf{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \widetilde{\mathsf{P}}$.

这样, 定理的所有断言 a)–f) 都已得证.

3. 下列 "技巧性" 引理对于按各种测度计算条件数学期望时有用. 以后它将被多次运用, 并为了引用方便, 称它为 "重算引理". 下面经常引用的公式 (4) 称为 "Bayes 公式" 或者 "广义 Bayes 公式" ([303; 第 7 章]).

引理. 设 $\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n$, Y 为有界 (或 $\widetilde{\mathsf{P}}$-可积) $\mathscr{F}_n$-可测随机变量. 那么对于每个 $m \leqslant n$,

$$\widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_m) = \frac{1}{Z_m} \mathsf{E}(Y Z_n \mid \mathscr{F}_m) \qquad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s.}). \tag{4}$$

证明. 首先注意到, 在 (4) 的右端的表达式中, $\widetilde{\mathsf{P}}(Z_m > 0) = 1$ (参见上一定理中的断言 e)). 同时, 在集合 $\{\omega\colon Z_m(\omega) = 0\}$ 上也有 $Z_n(\omega) = 0$, $n \geqslant m$ (P-a.s.). 考虑到这一点, 我们将认为 (4) 的右端在这个集合上等于零.

根据定义, $\widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_m)$ 是 $\mathscr{F}_m$-可测随机变量, 并满足对于任何 $A \in \mathscr{F}_m$, 有

$$\widetilde{\mathsf{E}}[I_A \cdot \widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_m)] = \widetilde{E}[I_A \cdot Y], \tag{5}$$

以至只需断定, 对于 (4) 的右端中的 $\mathscr{F}_m$-可测函数, 有

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left[I_A \cdot \frac{1}{Z_m} \mathsf{E}(Y Z_n \mid \mathscr{F}_m)\right] = \widetilde{\mathsf{E}}[I_A \cdot Y]. \tag{6}$$

由下面一串等式可导出, 这实际上是成立的:

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}\left[I_A \cdot \frac{1}{Z_m} \mathsf{E}(Y Z_n \mid \mathscr{F}_m)\right] &= \mathsf{E}\left[I_A \cdot \frac{1}{Z_m} \mathsf{E}(Y Z_n \mid \mathscr{F}_m) \cdot Z_m\right] \\
&= \mathsf{E}[I_A \cdot \mathsf{E}(Y Z_n \mid \mathscr{F}_m)] \\
&\overset{(\alpha)}{=} \mathsf{E}[I_A Y Z_n] \overset{(\beta)}{=} \mathsf{E}[I_A Y Z_m] = \widetilde{\mathsf{E}}[I_A Y],
\end{aligned}$$

其中等式 (α) 由条件数学期望 $\mathsf{E}(Y Z_n \mid \mathscr{F}_m)$ 的定义得到, 而 (β) 由 $I_A Y$ 的 $\mathscr{F}_m$-可测性和序列 $Z = (Z_n)$ 的鞅性而成立.

§3b. Girsanov 定理的离散版本. I. 条件高斯情形

1. 关于渗透空间

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 1}, \mathsf{P})$$

中原来的 "基底" 测度 P (局部) 绝对连续或等价的概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的构造的一般问题的讨论, 适宜于从 Girsanov 定理的离散 (时间) 版本开始; Girsanov 定理是 I. V. Girsanov 在著作 [183] 中对于扩散型过程建立的, 并用来作为对于鞅、局部鞅、随机测度、半鞅等等的各种定理的原型 (参见例如, [250] 的第 II 章.)

设时间参数 $n \geqslant 1$, 而 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots)$ 是有下列分布的 $\mathscr{F}_n$-可测随机变量序列:

$$\operatorname{Law}(\varepsilon_n \mid \mathscr{F}_{n-1}; \mathsf{P}) = \mathscr{N}(0,1). \tag{1}$$

特别是, 这意味着序列 ε 由独立标准正态分布随机变量 $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$ 所组成.

除了序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 以外, 又设给定可料序列 $\mu = (\mu_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $\sigma = (\sigma_n)_{n\geqslant 1}$, 满足 μ_n 和 σ_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测 ($\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$), 并且我们将认为 $\sigma_n > 0$, 以便把这个参数赋以 "波动率" 的含义, 而 $\sigma_n = 0$ 的观察值可干脆在讨论中排除.

令 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$, 其中

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n. \tag{2}$$

由 (1) 得到, (正则) 条件分布 $\mathsf{P}(h_n \leqslant \cdot \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 由下列公式来定义:

$$\mathsf{P}(h_n \leqslant x \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}} dy, \tag{3}$$

或者以记号的形式记作

$$\operatorname{Law}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}; \mathsf{P}) = \mathscr{N}(\mu_n, \sigma_n^2), \tag{4}$$

它是把序列 $h = (h_n)$ 称为 (关于测度 P 的) 条件高斯序列的基础, 其 (条件) 均值和方差分别为

$$\mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mu_n, \tag{5}$$

$$\mathsf{D}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2. \tag{6}$$

由 (4) 或 (5) 和 (6) 我们求得

$$\mathsf{E}(h_n - \mu_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \tag{5$'$}$$

$$\mathsf{D}(h_n - \mu_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2. \tag{6$'$}$$

如果记

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} h_k, \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k, \qquad M_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \varepsilon_k,$$

那么可以说, 在条件高斯情形下, 量 H_n 可表示为下列形式:

$$H_n = A_n + M_n,$$

其中 $A = (A_n)$ 为可料序列, 而 $M = (M_n)$ 为条件高斯局部鞅, 其平方特征为

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

记 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$, $\Delta = 1$. 于是 (2) 可改写为差分形式

$$\Delta H_n = \mu_n \Delta + \sigma_n \Delta W_n,$$

它自然可看作下列某个由维纳过程 $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ 所生成的 "Itô 过程 $H = (H_t)$ 的随机微分 (参见例如, [303; 第 4 章] 和第三章 §3d) 的离散类似:

$$dH_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

其中 $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ 是局部漂移, 而 $(\sigma_t)_{t \geqslant 0}$ 为局部波动率.

把它用到所考察的条件高斯序列 (2) 上, "Girsanov 定理" (正如我们所注意到, I. V. Girsanov 是在连续时间情形下得到它的) 的离散类似所联系的问题在于, 是否可求得这样的对于测度 P 绝对连续或等价的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得关于它, 序列 $h = (h_n)$ 变为 (局部) 鞅差. 在这一联系中, 有益的是要强调, (2) 中的右端包含两项: "漂移" μ_n 和 "离散扩散" $\sigma_n \varepsilon_n$, 后者 (关于测度 P) 是鞅差. 所陈述的问题本质上在于能否求得这样的测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, 使得关于它 (h_n) 没有 "漂移" 成分, 而只有 "离散扩散", 即 (h_n) 是 (局部) 鞅差.

2. 在构造测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 时, 起关键作用的是下列 (正) 随机变量序列:

$$Z_n = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\}, \qquad n \geqslant 1. \tag{7}$$

引理. 1) 序列 $Z = (Z_n)_{n \geqslant 1}$ 是有 $\mathsf{E} Z_n = 1$ $(n \geqslant 1)$ 的 $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$-鞅.

2) 设 $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$, 且满足 "Novikov 条件"

$$\mathsf{E}\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right) < \infty. \tag{8}$$

那么 $Z = (Z_n)_{n \geqslant 1}$ 是有 (P-a.s.) 极限值 $Z_\infty = \lim Z_n$ 的一致可积鞅, 满足

$$Z_\infty = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\}, \tag{9}$$

以及

$$Z_n = \mathsf{E}(Z_\infty \mid \mathscr{F}_n). \tag{10}$$

证明. 1) 这一断言显然, 因为对于任何 $k \geqslant 1$ $(\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\})$,

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2 \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\right\} = 1, \tag{11}$$

这一等式由 $\dfrac{\mu_k}{\sigma_k}$ 的 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测性和条件高斯性 (1) 得到.

2) 在条件 (8) 的假定下, 族 (Z_n) 的一致可积性的证明相当复杂, 它可在 A. A. Novikov 的原创著作 [368] 以及许多专著 (参见例如, [303; 第 7 章], [402]) 中找到.

然而, 在略强的条件下: 对于某个 $\varepsilon > 0$,

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\} < \infty, \tag{12}$$

族 $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ 的一致可积性的证明就比较初等. 因此, 提出这一证明就比较合适; 我们将在本节的最后来这样做 (参见第 5 点).

3. 固定某个 $N \geqslant 1$, 并且我们将只考察对于 $n \leqslant N$ 的序列 (h_n). 为了简化记号, 我们将认为 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_N$, 并且 $\mathsf{P}_N = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_N = \mathsf{P}$.

由于 $Z_N > 0$ 以及 $\mathsf{E}Z_N = 1$, 故在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上可引入概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)$; 令

$$\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega)\mathsf{P}(d\omega). \tag{13}$$

我们强调, 这里不仅有 $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, 并且也有 $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$. 因此, $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$.

我们考察序列 $(h_n)_{n\leqslant N}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的性质.

由 §3a 中的 "Bayes 公式" (4), 对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $n \leqslant N$, 我们有 ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{E}}\left(e^{i\lambda h_n}\,|\,\mathscr{F}_{n-1}\right) &= \mathsf{E}\left(e^{\left(i\lambda\sigma_n - \frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)\varepsilon_n + i\lambda\mu_n - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2}\,\Big|\,\mathscr{F}_{n-1}\right)\\
&= \mathsf{E}\Bigg(e^{\left(i\lambda\sigma_n - \frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)\varepsilon_n - \frac{1}{2}\left(i\lambda\sigma_n - \frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2}\\
&\qquad\qquad \times e^{\frac{1}{2}\left(i\lambda\sigma_n - \frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2 + i\lambda\mu_n - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2}\,\Big|\,\mathscr{F}_{n-1}\Bigg)\\
&= e^{-\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}},
\end{aligned} \tag{14}$$

其中利用了

$$\mathsf{E}e^{\left(i\lambda\sigma_n - \frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)\varepsilon_n - \frac{1}{2}\left(i\lambda\sigma_n - \frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2} = 1$$

以及 σ_n^2 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测.

所得到的等式

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left(e^{i\lambda h_n}\,|\,\mathscr{F}_{n-1}\right) = e^{-\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}} \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s.}) \tag{15}$$

说明, 关于新测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $h = (h_n)$ 仍然是条件高斯序列, 但已经有零 "漂移" 项:

$$\mathrm{Law}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}; \widetilde{\mathsf{P}}) = \mathscr{N}(0, \sigma_n^2), \tag{16}$$

而这样一来, (5) 和 (6) 的类似关系式在这里变为

$$\widetilde{\mathsf{E}}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = 0, \tag{17}$$

$$\widetilde{\mathsf{D}}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2. \tag{18}$$

从直观的视角来看, 可以说, 从测度 P 到测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的转换, 零化 (“消灭”) 了序列 $h=(h_n)_{n\leqslant N}$ 的漂移 $\mu=(\mu_n)_{n\leqslant N}$, 并保持同样的条件方差.

由 (16) 也可断定, 如果 $\widetilde{\varepsilon}=(\widetilde{\varepsilon}_n)_{n\leqslant N}$ 是有分布为

$$\operatorname{Law}(\widetilde{\varepsilon}_n \mid \mathscr{F}_{n-1}; \widetilde{\mathsf{P}}) = \mathscr{N}(0,1) \tag{19}$$

的 $\mathscr{F}_n$-可测随机变量的序列 (这样的序列总可构建, 当然, 其中要考虑扩充原来的概率空间), 那么

$$\operatorname{Law}(h_n, n\leqslant N \mid \widetilde{\mathsf{P}}) = \operatorname{Law}(\sigma_n\widetilde{\varepsilon}_n, n\leqslant N \mid \widetilde{\mathsf{P}}). \tag{20}$$

由此可见, 关于新的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $(h_n)_{n\leqslant N}$ 本身作为局部鞅差 $(\sigma_n\widetilde{\varepsilon}_n)_{n\leqslant N}$ 来引入, 同时, 关于原来的测度 P, 类似的性质 (20) 有这样的形式:

$$\operatorname{Law}(h_n-\mu_n, n\leqslant N \mid \mathsf{P}) = \operatorname{Law}(\sigma_n\varepsilon_n, n\leqslant N \mid \mathsf{P}). \tag{21}$$

我们现在改变考察的顺序.

我们将认为测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 和序列 $h=(h_n)$ 是原来的, 而对于它们来说, 性质 (20) 成立. 于是在测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 向测度 P 转换时 (与公式 (13) 相对应), 我们得到性质 (21), 它可以解释为局部鞅差 $(\sigma_n\widetilde{\varepsilon}_n)_{n\leqslant N}$ 出现了漂移. 正是这样的解释, 看来对于陈述在测度的绝对连续替换下关于局部鞅变换的相应的一般结果来说, 最为适用 (参见以后的 §3d).

在概述所得到的结果以前, 我们注意下列关系.

设 $\sigma_n^2(\omega)$ 不依赖于 ω $(=\sigma_n^2)$. 那么由 (14), 我们用递推的方式求得, 对于 $\lambda_k\in\mathbb{R}$, $k\in\{1,\cdots,N\}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{E}}\left(e^{i\sum_{k=1}^{N}\lambda_k h_k}\right) &= \widetilde{\mathsf{E}}\left(e^{i\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k h_k}\widetilde{\mathsf{E}}\left(e^{i\lambda_N h_N} \mid \mathscr{F}_{N-1}\right)\right)\\ &= e^{-\frac{\lambda_N^2\sigma_N^2}{2}}\widetilde{\mathsf{E}}\left(e^{i\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k h_k}\right)=\cdots=e^{-\frac12\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2\sigma_k^2}.\end{aligned}$$

从而, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 序列 $(h_n)_{n\leqslant N}$ 是有零均值的独立正态分布随机变量 $h_n\sim\mathscr{N}(0,\sigma_n^2)$ 的序列. (这点也可由 (17)–(20) 来断定.)

这样, 我们以下列定理的形式引入所得到的结果, 它自然称为 Girsanov 定理的离散类似.

定理. *设 $h=(h_n)_{n\leqslant N}$ 为条件高斯序列, 满足*

$$\operatorname{Law}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}; \mathsf{P}) = \mathscr{N}(\mu_n,\sigma_n^2), \qquad n\leqslant N.$$

设 $\mathscr{F}_N=\mathscr{F}$ 以及测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 以密度 Z_N 用公式 (13) 来定义, 而 Z_N 用公式 (7) 来给定. 那么:

1) 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $h=(h_n)_{n\leqslant N}$ 是条件高斯序列:

$$\operatorname{Law}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}; \widetilde{\mathsf{P}}) = \mathscr{N}(0,\sigma_n^2), \qquad n\leqslant N;$$

2) 如果 $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$ $(n \leqslant N)$ 不依赖于 ω, 那么关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 序列 $h = (h_n)_{n\leqslant N}$ 是独立高斯量的序列:

$$\mathrm{Law}(h_n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) = \mathscr{N}(0, \sigma_n^2), \qquad n \leqslant N;$$

3) 如果 $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$, 并满足条件 (8), 那么性质 1) 和 2) 对于所有 $n \geqslant 1$ 对测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 保持成立, 使得 $\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_\infty(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$, 其中 $Z_\infty(\omega)$ 在 (9) 中定义.

4. 我们察觉, 在按公式 (13) 和 (7) 来构造测度时, 直接参与的是在 h_n $(= \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n)$ 的定义中的序列 (μ_n) 和 (σ_n). 在这一联系中, 同时也为确立在考察 Esscher 变换时的值 $a_n(\omega)$ 的特殊选择程序 (参见 §2d) 的联系, 我们考察由下列量来定义的过程族 $Z^{(b)} = (Z_n^{(b)})_{1\leqslant n\leqslant N}$:

$$Z_n^{(b)}(\omega) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^n b_k\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n b_k^2\right\}, \tag{22}$$

其中 $b_k = b_k(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测.

由于 $\mathsf{E}Z_N^{(b)}(\omega) = 1$, 故可在 $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$ 上定义概率测度

$$\widetilde{\mathsf{P}}^{(b)}(d\omega) = Z_N^{(b)}(\omega)\mathsf{P}(d\omega). \tag{23}$$

关于这个测度, 条件数学期望

$$\widetilde{\mathsf{E}}^{(b)}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = -b_n - \frac{\mu_n}{\sigma_n}. \tag{24}$$

由此很明显, 在 "Girsanov 定理" 中对特殊值 $b_n = -\dfrac{\mu_n}{\sigma_n}$ $(n \leqslant N)$ 的选择, 正是为了使得在这样的选择下, 序列 $h = (h_n)_{n\leqslant N}$ 变为*局部鞅差*.

同时, 如果 $X_n = \mu_n + \varepsilon_n$, 那么函数

$$\varphi_n(a;\omega) \equiv \mathsf{E}(e^{aX_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = e^{\frac{1}{2}a^2 - a\mu_n}.$$

由此可见,

$$\inf_a \varphi_n(a;\omega) = \varphi_n(a_n(\omega);\omega),$$

只要 $a_n(\omega) = \mu_n$, $n \leqslant N$.

正是在 §2d 中借助于 "Esscher 变换" 构建使序列 (X_n) 变为鞅差的测度时曾经利用过这些 "极端" 值 $a_n(\omega)$.

因此, 在所考察的情形 $(\sigma \equiv 1)$ 下, 无论是 "Girsanov 变换", 还是 "Esscher 变换", 都导致同一个测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$.

5. 我们引入下列命题的证明: 在条件 (12) 的假定下, (7) 中定义的 Z_n 所形成的族 $Z = (Z_n)_{n\geqslant 1}$ 一致可积.

设 $\beta_n = -\dfrac{\mu_n}{\sigma_n}$. 于是条件 (12) 取下列形式: 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\right\} < \infty. \tag{25}$$

对应于 (7),

$$Z_n = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\}, \qquad n \geqslant 1. \tag{26}$$

设 $\varepsilon > 0$ 和 $p > 1$. 令

$$\psi_n^{(1)} = \exp\left\{(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varepsilon_k - \frac{p(1+\varepsilon)^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\}, \tag{27}$$

$$\psi_n^{(2)} = \exp\left\{\left(\frac{p(1+\varepsilon)^2}{2} - \frac{1+\varepsilon}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\}. \tag{28}$$

为证明所要求的族 $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ 的一致可积性, 只需指出 (参见例如, [439; 第 II 章, §6, 引理 3]), 对于某个 $\varepsilon > 0$,

$$\sup_n \mathsf{E}Z_n^{1+\varepsilon} < \infty. \tag{29}$$

由于

$$Z_n^{1+\varepsilon} = \psi_n^{(1)}\psi_n^{(2)},$$

故由 Hölder 不等式 $(1/p + 1/q = 1)$,

$$\mathsf{E}Z_n^{1+\varepsilon} = \mathsf{E}\psi_n^{(1)}\psi_n^{(2)} \leqslant \left[\mathsf{E}(\psi_n^{(1)})^p\right]^{1/p}\left[\mathsf{E}(\psi_n^{(2)})^q\right]^{1/q} = \left[\mathsf{E}(\psi_n^{(2)})^q\right]^{1/q}, \tag{30}$$

其中我们利用了 (参见 (11))

$$\mathsf{E}(\psi_n^{(1)})^p = 1.$$

令 $p = 1+\delta$, $q = (1+\delta)/\delta$, 其中 $\delta > 0$, 满足条件 (25). 选取 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\varepsilon(1+\varepsilon) \leqslant \frac{\delta^2}{(1+\delta)(1+2\delta)}. \tag{31}$$

于是

$$\begin{aligned}(\psi_n^{(2)})^q &\leqslant \exp\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon q(1+\varepsilon)(1+q)+1}{2(q-1)}\right)\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\}\\ &\leqslant \exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\} \leqslant \exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\right\},\end{aligned}$$

而这就是说, 由条件 (25),

$$\sup_n \mathsf{E}Z_n^{1+\varepsilon} \leqslant \left[\sup_n \mathsf{E}(\psi_n^{(2)})^q\right]^{1/q} \leqslant \left[\mathsf{E}\exp\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\right]^{1/q} < \infty,$$

这就证明了所要求的族 (Z_n) 的一致可积性.

§3c. 条件高斯分布和对数条件高斯分布情形下的价格的鞅性质

1. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ 为原来的渗透概率空间, $n \geqslant 0$. 在考察使规范价格 $\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)$ 为鞅的鞅测度问题时, 我们先转向带点理想化的 (B, S)-市场模型, 认为 $B = (B_n)$ 有 $B_n \equiv 1$ 以及 $S = (S_n)$, 其中

$$S_n = S_0 + H_n, \qquad n \geqslant 1, \tag{1}$$

其中 $H_n = \sum_{k=1}^n h_k$, $S_0 = \text{Const}$. 我们也将认为, $h = (h_n)$ 是条件高斯序列, $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$, 其中 μ_n 和 σ_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 为独立 $\mathscr{N}(0,1)$-分布 $\mathscr{F}_n$-可测随机变量 ε_n $(n \geqslant 1)$ 的序列 (参见更详尽的上一节).

尤其是, 现在假设, 价格 S_n 可取负值. 这里也带有上面提到的 "理想化". 然而, 我们察觉, 正是 L. Bachelier 在 [12] 中也考察了类似的模型. (关于这方面的详情参见第一章 §2a.)

假定 $\mu_n \equiv 0$. 于是

$$S_n = S_0 + \sum_{k \leqslant n} \sigma_k \varepsilon_k. \tag{2}$$

由量 σ_k 的 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测性和性质 $\mathsf{E}(\varepsilon_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) = 0$, 由 (2) 得到, 在所考察的情形下, 价格序列 $S = (S_n)$ 是鞅变换, 因而, 它是局部鞅 (参见第二章 §1c 中的定理). 如果补充假定, 比如 $\mathsf{E}|\sigma_k \varepsilon_k| < \infty$, $k \geqslant 1$, 那么序列 $S = (S_n)$ 将关于原来的测度 P 是鞅. (关于局部鞅是鞅的一般条件, 参见第二章中的 §1c.)

现在设 μ_n 对所有 $n \leqslant N$ 来说不恒等于零.

在这一情形下, Girsanov 定理的离散版本 (§3b) 给出测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 的构造方法 (参见 §3b 中的 (8) 和 (6)), 使得关于该测度, 当 $\widetilde{\mathsf{E}}|\sigma_n \varepsilon_n| < \infty$ 对所有 $n \leqslant N$ 成立时, 序列 $(S_n)_{n \leqslant N}$ 是局部鞅以及 (简单) 鞅.

2. 现在我们考察更现实的局面, 认为在 (B, S)-市场上

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \tag{3}$$

以及 $B_n \equiv 1$, $n \leqslant N$.

在第二章 §1a 中, 已经注意到, 从统计分析的视角来看适用的 "复利 (compound return)" ①型表示式 (3), 对于随机分析 的目标来说, 并非总是适用的. 原因在于, 在研究序列 $S = (S_n)$ 的 "鞅性" 时, 期待这样类型的断言: "为使表示为形式 (3) 的序列 $S = (S_n)$ 为鞅, 只需序列 $H = (H_n)$ 为鞅." 然而, 一般来说并非如此, 以至这也解释了为什么要转向 ("单利 (simple return)") 表示式

$$S_n = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})_n, \tag{4}$$

①英文版把这里和下面 "单利" 的英文术语中的 return 都改为 interest. —— 译者注

其中 (参见第二章中的 §1a)

$$\widehat{H}_n = H_n + \sum_{k \leqslant n} (e^{\Delta H_k} - \Delta H_k - 1), \tag{5}$$

以及 $\mathscr{E}(\widehat{H}) = (\mathscr{E}(\widehat{H})_n)_{n \geqslant 0}$ 为随机指数, 它根据 $\widehat{H} = (\widehat{H}_n)$ 按照下列公式来确立:

$$\mathscr{E}(\widehat{H})_n = e^{\widehat{H}_n} \prod_{k \leqslant n} (1 + \Delta \widehat{H}_k) e^{-\Delta \widehat{H}_k}, \qquad n \geqslant 1, \tag{6}$$

以及 $\mathscr{E}(\widehat{H})_0 \equiv 1$.

无论是在 (5) 中, 还是在 (6) 中, 右端当然都可以简化改写为下列形式:

$$\widehat{H}_n = \sum_{k \leqslant n} (e^{\Delta H_k} - 1), \tag{7}$$

$$\mathscr{E}(\widehat{H})_n = \prod_{k \leqslant n} (1 + \Delta \widehat{H}_k). \tag{8}$$

然而, 有益的是要再次注意到 (参见第二章中的 §1a 和第三章中的 §5c), 在考察对于连续时间的类似表示式时, “正确” 形式是 (5) 和 (6) 类型的表达式, 而不是 (7) 和 (8) 类型的表达式, 其中联系着对应 “求和 $\sum_{s \leqslant t}$” 和 “求积 $\prod_{s \leqslant t}$” 中的收敛性问题, 因为在连续时间情形下, 一般来说, 对于每个 $t > 0$, 就已经有无限多项.

与 (3) 相比较, 表示式 (4) 的优点在于下列命题成立:

命题. 为了 (4) 中所定义的序列 $S = (S_n)$ 为鞅, 只需序列 $\widehat{H} = (\widehat{H}_n)_{n \geqslant 1}$ 为局部鞅, 且 $\Delta \widehat{H}_n \geqslant -1$ 对于每个 $n \geqslant 1$ 成立.

事实上, 由 (6) 或 (8), 对于 $n \geqslant 1$,

$$\Delta \mathscr{E}(\widehat{H})_n = \mathscr{E}(\widehat{H})_{n-1} \Delta \widehat{H}_n. \tag{9}$$

假定 $(\widehat{H}_n)$ 是局部鞅, 而这就是说, 作为鞅变换 (参见第二章 §1c 中的引理), 它有下列表示式:

$$\widehat{H}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta M_k, \tag{10}$$

其中有 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测的 a_k 和某个鞅 $M = (M_n)$.

由 (9) 和 (10) 可见,

$$\Delta \mathscr{E}(\widehat{H})_n = a_n \mathscr{E}(\widehat{H})_{n-1} \Delta M_n,$$

即 $\mathscr{E}(\widehat{H})$ 是鞅变换, 而这就是说, 它也是局部鞅.

如果 $\Delta \widehat{H}_n \geqslant -1$, 那么显然有 $\mathscr{E}(\widehat{H})_n \geqslant 0$. 因此, 根据第二章 §1c 中的引理, 局部鞅 $\mathscr{E}(\widehat{H})$ 其实就是 (简单) 鞅.

在我们所考察的情形下, 条件 $\Delta \widehat{H}_n \geqslant -1$ 满足, 因为

$$\Delta \widehat{H}_n = e^{\Delta H_n} - 1 \geqslant -1.$$

3. 我们将假定, 量 $h_n = \Delta H_n$ 是条件高斯变量, 并且 $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$. 在这一情形下, 有 $S_n = S_0 e^{H_n}$ 的序列 $S = (S_n)$ 自然称为对数条件高斯序列, 它与 §3c 中的名称相呼应.

我们先提出这样的问题: 在怎样的条件下, 序列 $S = (S_n)$ 将关于原来的测度P为鞅?

为此, 正如我们上面所看到, 只需有 $\Delta \widehat{H}_n = e^{\Delta H_n} - 1$ 的序列 $\widehat{H} = (\widehat{H}_n)$ 为局部鞅, 即 $\mathsf{E}(|\Delta \widehat{H}_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$ 和 $\mathsf{E}(\Delta \widehat{H}_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0$, 或者等价的

$$\mathsf{E}(e^{\Delta \widehat{H}_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 1 \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.}). \tag{11}$$

由于我们假定 $\Delta H_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$, 故条件 (11) 可赋以下列形式:

$$\mathsf{E}(e^{\mu_n + \sigma_n \varepsilon_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 1, \tag{12}$$

它等价于

$$\mathsf{E}(e^{\sigma_n \varepsilon_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}) = e^{-\mu_n}. \tag{13}$$

左端等于 $e^{\frac{1}{2}\sigma_n^2}$. 尤其是, 我们得到条件

$$\mu_n + \frac{\sigma_n^2}{2} = 0 \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \qquad n \geqslant 1. \tag{14}$$

这时, 对数条件高斯序列

$$S_n = S_0 \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} (\mu_k + \sigma_k \varepsilon_k)\right\}, \qquad n \geqslant 1,$$

关于原来的测度 P 是鞅. 这一结果当然容易预见, 因为正如我们已经注意到, 序列

$$\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_k \varepsilon_k - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)\right\}\right)_{n \geqslant 1} \tag{15}$$

是鞅.

4. 现在转向条件 (14) 不满足的情形.

设 $n \leqslant N$. 我们将在 $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$ 上借助于条件 Esscher 变换构造下列形式的所要求的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$:

$$\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega) \mathsf{P}(d\omega),$$

其中 $Z_N(\omega) = \prod_{1 \leqslant n \leqslant N} z_n(\omega)$ 以及 ($\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$)

$$z_n(\omega) = \frac{e^{a_n h_n}}{\mathsf{E}(e^{a_n h_n} \mid \mathscr{F}_{n-1})}, \tag{16}$$

其中 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测量 $a_k = a_k(\omega)$ 将选择为使序列 $(S_n)_{n \leqslant N}$ 为 $(\widetilde{\mathsf{P}}, (\mathscr{F}_n))$-鞅.

在所考察的情形下, 当价格由公式 (3) 给定时, 这就意味着必定满足条件

$$\mathsf{E}\left[e^{(a_n+1)h_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right] = \mathsf{E}\left[e^{a_n h_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right]. \tag{17}$$

考虑到 $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$, 我们求得, 等式 (17) 满足, 只要把 a_n 选择为使得

$$\mu_n + \frac{\sigma_n^2}{2} = -a_n \sigma_n^2, \tag{18}$$

即

$$a_n = -\frac{\mu_n}{\sigma_n^2} - \frac{1}{2}. \tag{19}$$

如果对所有 $n \leqslant N$ 条件 (14) 满足, 那么 $a_n = 0$ 以及 $Z_N = 1$, 即测度 $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P}$.

在选择 a_n 时, 根据 (19),

$$\mathsf{E}(e^{a_n h_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \exp\left\{-\frac{\mu_n^2}{2\sigma_n^2} + \frac{\sigma_n^2}{8}\right\}.$$

从而,

$$z_n = \frac{e^{a_n h_n}}{\mathsf{E}(e^{a_n h_n} \mid \mathscr{F}_{n-1})} = \exp\left\{-\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\sigma_n}{2}\right)\varepsilon_n - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\sigma_n}{2}\right)^2\right\},$$

以及

$$Z_N = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{N}\left[\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\sigma_n}{2}\right)\varepsilon_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\sigma_n}{2}\right)^2\right]\right\}. \tag{20}$$

这样, 由

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad H_n = h_1 + \cdots + h_n, \quad h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$$

所组成的序列 $S = (S_n)_{n \leqslant N}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是鞅, 其中 $\widetilde{\mathsf{E}} S_n = S_0$, $\widetilde{\mathsf{P}}$ 关于测度 P 的密度 Z_N 由公式 (20) 给出. 在对于 $n \leqslant N$ 满足条件 (14) 的情形下, 测度 $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P}$, 并且序列 $(S_n)_{n \leqslant N}$ 为 $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$-鞅, 即关于原来的测度 P 为鞅.

§3d. Girsanov 定理的离散版本. II. 一般情形

1. 正如我们在上面已经注意到, 对于条件高斯情形的 Girsanov 定理的离散版本可用来作为对于有 $h_n = \Delta H_n$ 的随机序列 $H = (H_n)$ 的相应结果的原型; 这是比 "$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$" 更一般的结构.

为了求得推广的 "正确" 形式, 我们再来分析上面引入的 (在条件高斯情形下的) 下列命题的证明:

$$\text{“如果 } \widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}, \text{ 那么 } \mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mu_n \Longrightarrow \widetilde{\mathsf{E}}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0,\ n \geqslant 1.\text{”}$$

在 §3b 中给出的这个性质的证明本质上依靠条件数学期望的计算公式 (参见 §3a 中的 (4)); (在 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的假定下) 把它用于 $Y = H_n$ 以及 $\widetilde{E}|H_n| < \infty$, $m = n-1$, 就有这样的形式:

$$\widetilde{\mathsf{E}}(H_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \frac{1}{Z_{n-1}} \mathsf{E}(H_n Z_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s.}), \qquad n \geqslant 1. \tag{1}$$

这里 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 是关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 求均值, 而当 $Z_{n-1}(\omega) = 0$ 时, 右端被认为是零. 我们也认为, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $Z_0(\omega) \equiv 1$.

我们指出, 怎样可由公式 (1) 容易导出下列结果:

$$\text{“如果 } \widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}, \text{ 那么 } H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \Longleftrightarrow HZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P})\text{”}, \tag{2}$$

其中 $\mathscr{M}(\mathsf{P})$ 和 $\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$ 分别表示关于测度 P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的鞅类 (参见第二章 §1c).

其实, 如果 $H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$, 那么 $\widetilde{\mathsf{E}}(H_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = H_{n-1}$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.), 并且由 (1) 可得, $H_{n-1}Z_{n-1} = \mathsf{E}(H_n Z_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.). 这个 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s. 成立的等式也将 P-a.s. 成立.

事实上, 在集合 $\{Z_{n-1} = 0\}$ 上, 等式的左端和右端都为零, 因为在这个集合上也有 $Z_n = 0$ (P-a.s.). 在集合 $\{Z_{n-1} > 0\}$ 上测度 P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 等价 (其含义为 $\mathsf{P}(\{Z_{n-1} > 0\} \cap A) = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{\mathsf{P}}(\{Z_{n-1} > 0\} \cap A) = 0$ 对于 $A \in \mathscr{F}_{n-1}$ 成立), 而这就是说, 所指出的关系式的左端和右端也对于测度 P 重合. 因此, (2) 中的蕴涵关系 $\Longrightarrow$ 得证.

类似地有, 如果 $HZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$, 那么 $H_{n-1}Z_{n-1} = \mathsf{E}(H_n Z_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ (P-a.s. 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.). 因为 $Z_{n-1} > 0$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 成立, 故

$$H_{n-1} = \frac{1}{Z_{n-1}} \mathsf{E}(H_n Z_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s.}).$$

由此和公式 (1) 得到, $H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

值得注意的是, §3a 中的 "Bayes 公式" (4) (以及特别是公式 (1)) 可由断言 (2) 中的蕴涵关系 $\Longrightarrow$ 来导出.

其实, 设 $\mathscr{F}_n$-可测量 Y 满足 $\widetilde{\mathsf{E}}|Y| < \infty$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$.

我们以 $H_m = \widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_m)$ 来构成鞅 $(H_m, \mathscr{F}_m, \widetilde{\mathsf{P}})_{m \leqslant n}$. 于是, 根据 (2),

$$\mathsf{E}(Y Z_n \mid \mathscr{F}_m) = H_m Z_m \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

特别是, $\mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = H_{n-1}Z_{n-1}$ (P-a.s. 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.).

由此得到, 由于 $\widetilde{\mathsf{P}}(Z_{n-1} > 0) = 1$, 故

$$\frac{1}{Z_{n-1}}\mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = H_{n-1} \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s.}).$$

它与等式 $H_{n-1} = \widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_{n-1})$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.) 一起就证明了 "重算引理" 中的 §3a 中的 "Bayes 公式" (4):

"如果 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 那么 $\widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \dfrac{1}{Z_{n-1}}\mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.)."

这样一来, 性质 (2) 可看作 "重算引理" 对测度的绝对连续替换的独特的 "鞅" 文本.

2. 结果 (2) 很有用, 它的某个 "局部" 文本也一样, 后者可陈述为下列命题形式 (比较 [250] 中的第 III 章 §3b).

引理. 设 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $Z = (Z_n)$ 为密度过程,

$$Z_n = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n},$$

其中 $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}} \mid \mathscr{F}_n$, $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} \mid \mathscr{F}_n$.

设 $H = (H_n, \mathscr{F}_n)$ 为随机序列.

a) 序列 H 是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 ($H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$) 当且仅当 $HZ = (H_nZ_n, \mathscr{F}_n)$ 是 P-鞅 ($HZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$), 即蕴涵关系 (2) 成立:

$$H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff HZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P}).$$

b) 此外, 如果 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, 那么序列 H 是局部 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 ($H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$) 当且仅当 HZ 是局部 P-鞅 ($HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$):

$$H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}). \tag{3}$$

证明. a) 这个断言已经通过导出公式 (1) (其本身也有意义) 而得证. 但它也可只利用鞅的定义来证明.

取 $m \leqslant n$ 和 $A \in \mathscr{F}_m$. 于是 $\widetilde{\mathsf{E}}(I_AH_n) = \mathsf{E}(I_AZ_nH_n)$, 而这就是说,

$$\widetilde{\mathsf{E}}(I_AH_n) = \widetilde{\mathsf{E}}(I_AH_m) \iff \mathsf{E}(I_AZ_nH_n) = \mathsf{E}(I_AZ_nH_m).$$

但 $\mathsf{E}(I_AZ_nH_m) = \mathsf{E}(I_AZ_mH_m)$. 因此, $H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff HZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$.

b) 设 (τ_n) 为对于 $HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ 的局部化序列, 并且 $\tau = \lim \tau_n$.

我们指出, $HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}) \implies H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$ (甚至仅仅在 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的假定下).

设 (τ_n) 是对于 HZ 的局部化序列. 于是如果 $\tau = \lim \tau_n$, 那么 $\mathsf{P}(\tau = \infty) = 1$, 并且 (由 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 和 §3a 中的定理的性质 d)) $\widetilde{\mathsf{P}}(\tau < \infty) = \mathsf{E}Z_\tau I(\tau < \infty) = 0$.

因此, $\widetilde{\mathsf{P}}(\tau = \infty) = 1$.

我们察觉,

$$(H^{\tau_n} Z)_k = H_k^{\tau_n} Z_k = (H_k Z_k)^{\tau_n} + H_{\tau_n}(Z_k - Z_{\tau_n} I(k \geqslant \tau_n)).$$

由此可见, $H^{\tau_n} Z$ 是 P-鞅, 并且根据断言 a), $H^{\tau_n} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. 但 $\widetilde{\mathsf{P}}(\lim \tau_n = \infty) = 1$. 这就是说, $H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

反之, 我们指出, 在 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 的假定下, 蕴涵关系 $H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \Longrightarrow HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ 成立.

设 (σ_n) 是对于 $H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$ 的局部化序列. 因此, $\widetilde{\mathsf{P}}(\lim \sigma_n = \infty) = 1$ 以及 $H^{\sigma_n} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. 于是根据性质 a), $H^{\sigma_n} Z \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$, 并且由于 (比较上述对于 $(H^{\tau_n} Z)_k$ 的公式), 有

$$(HZ)_k^{\sigma_n} = H_k^{\sigma_n} Z_k - H_{\sigma_n}(Z_k - Z_{\sigma_n} I(k \geqslant \tau_n)),$$

故 $(HZ)_k^{\sigma_n} \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$. 但由 $\mathsf{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \widetilde{\mathsf{P}}$, 概率 $\mathsf{P}(\lim \sigma_n = \infty) = 1$. 因此, $HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$.

引理得证.

3. 性质 (1), (2) 和 (3) 在检验序列 $(H_n), (\widehat{H}_n), (S_n)$ 等等关于某个测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的问题上起关键作用, 因为它使得有可能把这种检验变为建立序列 $(H_n Z_n)$, $(\widehat{H}_n Z_n)$, $(S_n Z_n)$ 等等关于原来的基底测度 P 的鞅性质.

在实质上, 我们已经在条件高斯情形下证明 Girsanov 定理的离散类似时用过这一点, 其中 $H_n = h_1 + \cdots + h_n$ 以及 $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$, $n \leqslant N$, 而测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 的构建是借助于密度

$$Z_N = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_k}{\sigma_k} \varepsilon_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\} \tag{4}$$

来实现的, 而密度是根据 (μ_k) 和 (σ_k) 明确构造的.

然而, 在一般情形下, 对应的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 的构建问题是相当复杂的. 在条件高斯情形下, 密度 Z_N 的形式简单实质上是因为所给定的量 H_n 的简单, 其中 $\Delta H_n \equiv h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$.

Girsanov 定理对于离散时间情形的推广有各种不同的形式.

为了更好地理解以后的作为 Girsanov 定理的推广的结果, 把上面所引入的对于条件高斯情形的结果 (§3b 中的定理) 适当改变陈述是有益的.

令

$$\alpha_n = \frac{Z_n}{Z_{n-1}} I(Z_{n-1} > 0). \tag{5}$$

于是

$$\alpha_n = \exp\left\{-\frac{\mu_n}{\sigma_n} \varepsilon_n - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2\right\}, \tag{6}$$

并且如果 $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k \varepsilon_k$, 那么 $M = (M_n) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ 以及不难指出

$$\mathsf{E}(\alpha_n \Delta M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = -\mu_n. \tag{7}$$

尤其是, 不触及这里的可积性问题, 我们可把 §3b 中的对于条件高斯情形下的定理结果表示为下列形式:

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}) &\iff \mathsf{E}(\sigma_n \varepsilon_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad n \leqslant N, \\ &\iff \mathsf{E}(\mu_n + \sigma_n \varepsilon_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mu_n, \quad n \leqslant N, \\ &\iff \mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mu_n, \quad n \leqslant N, \\ &\Longrightarrow \widetilde{\mathsf{E}}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad n \leqslant N, \\ &\iff \widetilde{\mathsf{E}}(\Delta M_n + \mu_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad n \leqslant N, \\ &\iff \widetilde{\mathsf{E}}(\Delta M_n - \mathsf{E}(\alpha_n \Delta M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad n \leqslant N. \end{aligned}$$

换句话说, 由 $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ 导出, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$, 序列 $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n)_{n \leqslant N}$,

$$\widetilde{M}_n = M_n - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \tag{8}$$

是局部鞅:

$$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}) \implies \widetilde{M} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}). \tag{9}$$

在刚才叙述的材料中, 重要的是要区分出下列状况, 它联系着在这里考察的序列 $H = (H_n)$, 其中 $\Delta H_n = \mu_n + \Delta M_n$, 其基本重点在于 H 的 "鞅" 成分. 按其实质, 我们是在 "追踪" 测度的绝对连续替换怎样改变鞅部分. 正如我们所看到, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 序列 (M_n) 已经不将是鞅: 它表示为形式

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) + \widetilde{M}_n,$$

其中 $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n)$ 是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅, 而 $A = (A_n)$ 是某个 "可料" 漂移, 这里

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \mid \mathscr{F}_{k-1}).$$

正是在测度的绝对连续替换时出现这一补充 "漂移" 项, 才有可能在原来的序列 $H = (H_n)$ 中通过向满足 $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$ 或 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的转换来 "减少" 漂移成分.

4. 在上面给出的 (对于条件高斯情形的) Girsanov 定理的离散版本的陈述中的着眼点, 在于有可能对于不具体化的局部鞅 $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k \varepsilon_k$ 陈述下列一般结果.

定理 1. 设序列 $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$, $M_0 = 0$. 假定 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 其密度 $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, $n \geqslant 1$, 并设 $\alpha_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}} I(Z_{n-1} > 0)$, 且 $Z_0 \equiv 1$. 又设

$$\mathsf{E}(|\Delta M_n| \alpha_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \qquad n \geqslant 1. \tag{10}$$

那么在 (8) 中定义的过程 $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$, 即它是局部 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅.

证明. 再次运用 §3a 中的 "Bayes 公式" (4) (正如在 §3b 中对条件高斯情形所证明的那样):

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{E}}(M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= \mathsf{E}(M_n \alpha_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= \mathsf{E}(\alpha_n (M_n - M_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1}) + \mathsf{E}(\alpha_n M_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= \mathsf{E}(\alpha_n \Delta M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) + M_{n-1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

因此, 由假定 (10), 有 (P-a.s. 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.)

$$\widetilde{\mathsf{E}}(|M_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant \mathsf{E}(|\alpha_n \Delta M_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) + |M_{n-1}| < \infty.$$

由 (11) 和 (8) 直接可得, $\widetilde{\mathsf{E}}(|\widetilde{M}_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$ 以及

$$\widetilde{\mathsf{E}}(\widetilde{M}_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \widetilde{M}_{n-1}, \tag{12}$$

即 $\widetilde{M}$ 是广义鞅, 而这就是说 (第二章 §1c), $\widetilde{M}$ 也是局部 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅.

5. 现在设原来的序列 $H = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 由下列方式给出:

$$H_n = A_n + M_n, \tag{13}$$

其中 $A = (A_n)_{n\geqslant 1}$ 是可料序列 (A_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, $n \geqslant 1$; $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $A_0 = 0$) 并且 $M = (M_n)_{n\geqslant 1} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$.

由于对于局部鞅 $\mathsf{E}(|\Delta M_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$, 故

$$\mathsf{E}(|\Delta H_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant |\Delta A_n| + \mathsf{E}(|\Delta M_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) < \infty,$$

而这就是说, 对于 H_n, $n \geqslant 1$, 下列表示式成立:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta H_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} [\Delta H_k - \mathsf{E}(\Delta H_k \mid \mathscr{F}_{k-1})], \tag{14}$$

我们称它为序列 $H = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 的广义 *Doob* 分解 (参见第二章中的 §1b).

正如在通常的 Doob 分解中那样, 带有可料 (A_n) 的形为 (13) 的表示式是唯一的, 因而, 在 (13) 中

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta H_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{15}$$

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} [\Delta H_k - \mathsf{E}(\Delta H_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1})]. \tag{16}$$

前面的定理 1 有下列简单的推广.

定理 2. 设 $H = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 有广义 Doob 分解 (14), 且满足条件 (10).
那么关于满足 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $H = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 有表示式

$$H_n = \widetilde{A}_n + \widetilde{M}_n, \tag{17}$$

或者, 等价的

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\mathsf{E}}(\Delta H_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} [\Delta H_k - \widetilde{\mathsf{E}}(\Delta H_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1})] \tag{18}$$

(广义 Doob 分解), 其中

$$\widetilde{A}_n = A_n + \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{19}$$

而序列 $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n)$,

$$\widetilde{M}_n = M_n - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta H_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{20}$$

是局部 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 ($\widetilde{M} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$).

证明. 由定理 1 中取 $M = (M_n)_{n\geqslant 1}$ 为 $M_n = H_n - A_n$ 而得到.

6. 在定理 2 的条件下假定 M 和 Z 是 (局部) 平方可积鞅. 在这一假定下, 定义它们的可料二次变差 $\langle M, Z\rangle = (\langle M, Z\rangle_n)_{n\geqslant 0}$, 其中

$$\langle M, Z\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta M_k \Delta Z_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{21}$$

它在第三章 §5b 中曾经称为 M 和 Z 之间的 “角括号”. 我们记得, 还有序列 $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $Y = (Y_n)_{n\geqslant 0}$ 之间的方括号, 它是指如下定义的随机变量序列 $[X, Y] = ([X, Y]_n)_{n\geqslant 0}$:

$$[X, Y]_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \Delta Y_k. \tag{22}$$

由 (21) 和 (22) 得到, 在 (局部) 平方可积鞅的情形下, 差 $[M,Z]-\langle M,Z\rangle$ 是局部鞅. (参见 [250; 第 I 章, §4e].) 我们也将假定 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$. 于是 $Z_n>0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s. 和 P-a.s.) 以及

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta\langle M,Z\rangle_n}{Z_{n-1}} = \frac{\mathsf{E}[\Delta M_n \Delta Z_n \mid \mathscr{F}_{n-1}]}{Z_{n-1}} &= \mathsf{E}[(\alpha_n-1)\Delta M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] \\
&= \mathsf{E}[\alpha_n \Delta M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}]. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

我们察觉, 如果平方特征 $\langle M\rangle$ $(\equiv\langle M,M\rangle)$ 满足 $\langle M\rangle_n(\omega)=0$, 那么也有 $\langle M,Z\rangle_n(\omega)=0$. 因此, (23) 中的左端可表示为下列形式:

$$
\frac{\Delta\langle M,Z\rangle_n}{Z_{n-1}} = -a_n\Delta\langle M\rangle_n, \qquad (24)
$$

其中

$$
a_n = -\frac{\Delta\langle M,Z\rangle_n}{\Delta\langle M\rangle_n Z_{n-1}},
$$

如果 $\Delta\langle M\rangle_n=0$, 则认为 $\dfrac{\Delta\langle M,Z\rangle_n}{\Delta\langle M\rangle_n}$ 比如等于 1.

这样一来, (19) 可记为下列形式:

$$
\widetilde{A}_n = A_n - \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta\langle M\rangle_k. \qquad (25)
$$

由此可作出关于原来序列 H 的 (对测度 P 的) 结构的有意思的结论: 如果关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 这个序列变为局部鞅 ($\widetilde{A}\equiv 0$), 那么必定有

$$
H_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\Delta\langle M\rangle_k + M_n, \qquad n\geqslant 1, \qquad (26)
$$

或者, 用增量的术语来说,

$$
\Delta H_n = a_n\Delta\langle M\rangle_n + \Delta M_n, \qquad n\geqslant 1. \qquad (27)
$$

7. 直到现在为止, 我们所有的讨论都是从具有没有具体化的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 出发的, 其结构或序列 $\alpha=(\alpha_n)$ 的结构由下列 Radon-Nikodym 导数来定义:

$$
\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n}\alpha_k, \qquad n\geqslant 1. \qquad (28)
$$

由 (23) 和 (24) 可见,

$$
a_n\Delta\langle M\rangle_n = \mathsf{E}[(1-\alpha_n)\Delta M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}], \qquad (29)
$$

由此可观察到, 把这个关系式看作关于 ($\mathscr{F}_n$-可测的) α_n 的方程, 它有下列 (一般来说不唯一的) 解:

$$
\alpha_n = 1 - a_n\Delta M_n. \qquad (30)
$$

自然, 对于我们的目标来说, 适用的仅仅是那些满足 $\mathsf{P}(\alpha_n > 0) = 1$ $(n \geqslant 1)$ 的解. 如果是这样, 那么就有

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n}(1 - a_k\Delta M_k) = \mathscr{E}\left(-\sum_{k\leqslant\cdot} a_k\Delta M_k\right)_n, \tag{31}$$

其中 $\mathscr{E} = (\mathscr{E}(R)_n)$ 是随机指数 (参见第二章 §1):

$$\mathscr{E}(R)_n = e^{R_n}\prod_{k\leqslant n}(1 + \Delta R_k)e^{-\Delta R_k} = \prod_{k\leqslant n}(1 + \Delta R_k). \tag{32}$$

设 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是概率测度, 对于它来说, 其局限 $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n$ 按公式 (31) 来建立. 关于这个测度, 原来的序列 $H = (H_n)$ 满足关系式 (27), 并变为*局部鞅*, 因为 $\Delta\widetilde{A}_n = a_n\Delta\langle M\rangle_n + \mathsf{E}(\alpha_n\Delta M_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = 0$, $n \geqslant 1$ 以及 $\widetilde{A}_0 = 0$.

正如上面所注意到, 这一概率测度 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 称为*鞅* (*风险中性*) *测度*, 一般来说, 它不是唯一的. 然而, 它有一定的优点: 首先它可用系数 $a = (a_n)$ 来用显式建立; 其次, 具有某种 "最小" 性质, 这使得它有*最小鞅测度*的名称, [429]. (也参见第六章 §3d 第 6 点.)

§3e. 整值随机测度及其补偿量. 在绝对连续测度替换下的补偿量变换. "随机积分"[①]

1. 设 $H = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 是给定在渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的随机变量 $H_n = H_n(\omega)$ 的随机序列. 我们将假定 $H_0 = 0$ 和 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

序列 H 的概率分布记为 $\mathrm{Law}(H)$, 它可用两种方法来描述: 或者是用量 H_1, $H_2, \cdots, H_n$ 的*无条件分布*:

$$\mathrm{Law}(H_1, H_2, \cdots, H_n), \qquad n \geqslant 1, \tag{1}$$

(等价于给定 $\mathrm{Law}(\Delta H_1, \Delta H_2, \cdots, \Delta H_n)$, $n \geqslant 1$) 或者是用量 ΔH_n 的 (正则) *条件分布*:

$$\mathsf{P}(\Delta H_n \in \cdot\,|\,\mathscr{F}_{n-1}), \qquad n \geqslant 1. \tag{2}$$

在一定的含义下, 第二种方法更有优势, 因为有了条件分布, 当然就可求得无条件分布. 同时, 条件分布更为直观地指出量 ΔH_n 与 "过去" 的依赖关系.

同时, (关于 $\mathscr{F}_{n-1}$ 的) 条件分布的值给出在知晓*所有*过去信息时的 ΔH_n 的分布表示式. 而无条件分布 (1) 可能重构的仅仅是条件概率 $\mathsf{P}(\Delta H_n \in \cdot\,|\,\mathscr{F}^H_{n-1})$, 其中 $\mathscr{F}^H_{n-1} = \sigma(\omega\colon H_1, \cdots, H_{n-1})$, 并且 $\mathscr{F}^H_{n-1} \subseteq \mathscr{F}_{n-1}$ (包含可能是严格的).

①随机积分上的引号 " " 是英文版加上的, 以强调这不是通常意义下的随机积分. —— 译者注

2. 设

$$X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0} \tag{3}$$

是某个给定在渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的 d-维随机序列. 我们将认为 $X_0 = 0$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

我们把序列 X 与如下定义的整值随机测度序列 $\mu = (\mu_n(\cdot))_{n\geqslant 1}$ 相联系:

$$\mu_n(A;\omega) = I_A(\Delta X_n(\omega)), \qquad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),$$

即

$$\mu_n(A;\omega) = \begin{cases} 1, & 当\ \Delta X_n(\omega) \in A, \\ 0, & 当\ \Delta X_n(\omega) \notin A. \end{cases}$$

同时, 设 $\nu = (\nu_n(\cdot))_{n\geqslant 1}$ 是由量 ΔX_n 关于 $\mathscr{F}_{n-1}$ 的正则条件分布 $\nu_n(\cdot)$ 所组成的序列; 即对于 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 和 $\omega \in \Omega$ 所定义的函数 $\nu_n(A;\omega)$ 满足

1) $\nu_n(\cdot;\omega)$ 对于每个 $\omega \in \Omega$ 是 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的概率分布;
2) $\nu_n(A;\omega)$ 对于每个 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 作为 ω 的函数是条件概率 $\mathsf{P}(\Delta X_n \in A \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ 的版本之一:

$$\nu_n(A;\omega) = \mathsf{P}(\Delta X_n \in A \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega) \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

(这样的条件概率文本的存在性证明参见例如, [439; 第 II 章, §7].)

对于正则条件概率来说, 条件数学期望 $\mathsf{E}[f(\Delta X_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}](\omega)$ 对非负或有界函数 f 可以关于正则条件分布 $\nu_n(\cdot)$ 对每个 ω 可积:

$$\mathsf{E}[f(\Delta X_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}](\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\nu_n(dx;\omega) \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

尤其是, 在我们所考察的情形下,

$$\nu_n(A;\cdot) = \mathsf{E}[\mu_n(A;\omega) \mid \mathscr{F}_{n-1}](\cdot),$$

因而, 对于每个 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, 序列

$$(\mu_n(A) - \nu_n(A))_{n\geqslant 1}$$

是关于测度P 和流 $(\mathscr{F}_n)$ 的鞅差, 其中 $\mu_n(A) = \mu_n(A;\omega)$, $\nu_n(A) = \nu_n(A;\omega)$.

如果令

$$\mu_{(0,n]}(A;\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(A;\omega), \qquad \nu_{(0,n]}(A;\omega) = \sum_{k=1}^{n} \nu_k(A;\omega),$$

那么显然, 对每个 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, 序列

$$(\mu_{(0,n]}(A;\omega) - \nu_{(0,n]}(A;\omega))_{n\geqslant 1}$$

将是鞅. 这一性质说明, 为什么 (随机) 测度 $\nu_{(0,n]}(\cdot)$ 称为 (随机) 测度 $\mu_{(0,n]}(\cdot)$ 的补偿量, 而序列

$$\mu - \nu = (\mu_{(0,n]}(\cdot) - \nu_{(0,n]}(\cdot))_{n\geqslant 1}$$

称为随机鞅测度.

注意到以下这点是有益的: 对于测度 $\mu = (\mu_{(0,n]})_{n\geqslant 1}$ 和可料测度 $\nu = (\nu_{(0,n]})_{n\geqslant 1}$, 表示式

$$\mu = \nu + (\mu - \nu)$$

可看作 μ 对可料成分和鞅成分的 *Doob* 分解 (第二章 §1b).

注. 对序列 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 也可联系整值随机跳跃测度 $\mu^X = (\mu_{(0,n]}(\cdot))_{n\geqslant 1}$, 其中 $\mu^X_{(0,n]}(A;\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu^X_k(A;\omega)$, 而

$$\mu^X_k(A:\omega) = I(\Delta X_k(\omega) \in A, \Delta X_k(\omega) \neq 0).$$

很明显, 如果 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, 那么 $\mu_n(A;\omega) = \mu^X_n(A;\omega)$.

这些测度在值上的全部差别仅仅在于 "无跳跃" 事件, 即事件 $\{\omega\colon \Delta X_n(\omega) = 0\}$, 而在 $\mathsf{P}\{\omega\colon \Delta X_n(\omega) = 0\} = 0$ 的情形下, 测度 μ 和 μ^X 之间实质上没有区别.

我们察觉, 在连续时间情形下, 通过引入整值随机测度来描述随机过程的跳跃成分性质, 起基本作用的正是随机测度 μ^X , 而不是测度 μ. (也参见第七章中的 §3a, 以及更详细的 [250; 第 II 章, 1.16].)

3. 在这点上, 将通过引入随机测度 μ, ν 和 $\mu - \nu$ 来考察随机积分

$$w * \mu, \qquad w * \nu, \qquad w * (\mu - \nu).$$

设 $w = (w_k(\omega, x))_{k\geqslant 1}$ 是 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可测函数. 我们以 $w * \mu$ 来表示 (对每个 ω 的) Stieltjes 积分和的序列:

$$(w * \mu)_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} w_k(\omega, x)\mu_k(dx;\omega).$$

由对所考察的整值随机测度 μ_k 的只取两个值 0 和 1 的规定,

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_k(\omega, x)\mu_k(dx;\omega) = w_k(\omega; \Delta X_k(\omega)).$$

因此, 实际上,

$$(w * \mu)_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} w_k(\omega; \Delta X_k(\omega)).$$

用类似的方式根据测度 ν 和 $\mu-\nu$ 通过 Stieltjes 积分来定义随机积分 $w*\nu$ 和 $w*(\mu-\nu)$. 这时, 为使对应积分的存在, 需要对函数 $w_k(\omega,x)$ 加上可积性要求:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |w_k(\omega,x)|\nu_k(dx;\omega)<\infty$$

对于所有 (或者几乎所有) $\omega\in\Omega$ 和 $k\geqslant 1$ 成立.

不难看出, 于是有

$$w*(\mu-\nu)=w*\mu-w*\nu.$$

(我们提请读者注意, 不要把这一性质自动转移到一般整值随机测度上, 例如转移到连续时间过程的跳跃测度上; 可能遇到这样的情形: 积分 $w*(\mu-\nu)$ 有定义, 同时, $w*\mu$ 和 $w*\nu$ 等于无限大, 因而, 它们的差没有意义; 详情参见 [250; 第 III 章].)

如果补充假定函数 $w_k(\omega,x)$ 对每个 $x\in\mathbb{R}^d$ 为 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测, 那么 $(w*\nu)_n$ 将可料, 即 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测.

如果同时对每个 $k\geqslant 1$ 有

$$\mathsf{E}\int_{\mathbb{R}^d} |w_k(\omega,x)|\nu_k(dx;\omega)<\infty, \tag{4}$$

那么不难看出, 序列 $w*(\mu-\nu)=(w*(\mu-\nu)_n)_{n\geqslant 1}$ 形成鞅.

把条件 (4) 替代为条件

$$\mathsf{E}\int_{\mathbb{R}^d} |w_{k\wedge\tau_n}(\omega,x)|\nu_{k\wedge\tau_n}(dx;\omega)<\infty, \qquad k\geqslant 1, \quad n\geqslant 1, \tag{4$'$}$$

其中 (τ_n) 为某个 Markov 时刻局部化序列 $(\tau_n\leqslant\tau_{n+1},\ \tau_n\uparrow\infty)$, 我们得到, 序列 $w*(\mu-\nu)$ 是局部鞅.

4. 我们转向序列 $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ 的 Doob 分解, 并令 $h_n=\Delta H_n$ 满足 $\mathsf{E}|h_n|<\infty$, $n\geqslant 1$. 于是 (参见第二章中的 §1b)

$$H_n=A_n+M_n, \tag{5}$$

其中

$$A_n=\sum_{k\leqslant n}\mathsf{E}(h_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}), \tag{6}$$

以及

$$M_n=\sum_{k\leqslant n}[h_k-\mathsf{E}(h_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})]. \tag{7}$$

借助于所引入的跳跃测度 $\mu=(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ 及其补偿量 $\nu=(\nu_n)_{n\geqslant 1}$, 量 A_n 和 M_n 可记为下列形式:

$$A_n=\sum_{k\leqslant n}\int_{\mathbb{R}} x\nu_k(dx;\omega), \tag{8}$$

$$M_n = \sum_{k \leqslant n} \int_{\mathbb{R}} x(\mu_k(dx;\omega) - \nu_k(dx;\omega)), \tag{9}$$

为紧凑起见, (8) 和 (9) 的右端相应地记为 (参见 [250; 第 II 章])

$$(x * \nu)_n \tag{10}$$

和

$$(x * (\mu - \nu))_n. \tag{11}$$

这样一来,

$$H_n = (x * \nu)_n + (x * (\mu - \nu))_n, \tag{12}$$

或者以无坐标记号记为

$$H = x * \nu + x * (\mu - \nu). \tag{13}$$

当然, 在所考察的情形下, $H = x * \mu$. 这样, (13) 无非就是等式

$$x * \mu = x * \nu + x * (\mu - \nu),$$

如同 Doob 分解那样, 它在 $\mathsf{E}|h_n| < \infty$ $(n \geqslant 1)$ 的假定下相当明显.

取代条件 "$\mathsf{E}|h_n| < \infty$, $n \geqslant 1$", 现在假定, (P-a.s.)

$$\mathsf{E}(|h_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty, \qquad n \geqslant 1. \tag{14}$$

在这一条件下, 显然, (用公式 (6) 和 (7)) 可定义序列 $A = (A_n)$ 和 $M = (M_n)$, 并且 M 是局部鞅, 因为 $\mathsf{E}(|\Delta M_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$, 并且 $\mathsf{E}(\Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0$.

从而, 可以断定, 在条件 (14) 满足的假定下, 序列 $H = (H_n)$ 的下列广义 Doob 分解成立:

$$H = A + M, \tag{15}$$

其中 $A = (A_n)$ 和 $M = (M_n)$ 在 (6) 和 (7) 中定义.

这时, A 是可料序列, 而 M 是局部鞅. 运用测度 μ 和 ν, 表示式 (15) 可记为形式 (13).

注. 我们记得 (参见第二章中的 §1b), 在公式 (6) 和 (7) 中, $\mathsf{E}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$ 是广义条件数学期望, 它在集合 $\{\omega\colon \mathsf{E}(|h_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\}$ 上定义为 $\mathsf{E}(h_n^+ \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) - \mathsf{E}(h_n^- \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$, 而在集合 $\{\omega\colon \mathsf{E}(|h_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \infty\}$ 上取任意值 (比如, 等于零).

在条件 (14) 可能不满足的一般情形下, 为得到表示式 (15) 或 (13) 的类似, 可用下列方式来达到 (正如在第二章 §1b 中已经解释的那样).

设 $\varphi = \varphi(x)$ 是有界的 "截断" 函数, 即在零的邻域等于 x、且有紧支集的函数. 下列 "标准截断函数" 可作为典型例子:

$$\varphi(x) = xI(|x| \leqslant 1). \tag{16}$$

于是

$$
\begin{aligned}
H_n=\sum_{k=1}^{n}h_k&=\sum_{k=1}^{n}\varphi(h_k)+\sum_{k=1}^{n}(h_k-\varphi(h_k))\\
&=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}[\varphi(h_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}]\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}[\varphi(h_k)-\mathsf{E}(\varphi(h_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1})]+\sum_{k=1}^{n}(h_k-\varphi(h_k))\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int\varphi(x)\nu_k(dx)+\sum_{k=1}^{n}\int\varphi(x)(\mu_k(dx)-\nu_k(dx))\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}\int(x-\varphi(x))\mu_k(dx).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

运用与 (12) 和 (13) 中一样的记号, 我们得到下列表示式:

$$
H_n=(\varphi(x)*\nu)_n+(\varphi(x)*(\mu-\nu))_n+((x-\varphi(x))*\mu)_n,\tag{18}
$$

或者以无坐标形式表示为

$$
H=\varphi*\nu+\varphi*(\mu-\nu)+(x-\varphi)*\mu.\tag{19}
$$

定义. 表示式 (18) 和 (19) 称为序列 $H=(H_n)_{n\geqslant 0}$ 的典范表示, 其中 $H_0=0$, 截断函数 $\varphi=\varphi(x)$.

有益的是把这个定义与连续时间情形下的半鞅典范表示的定义相比较, 后者在第二章 §2c、专著 [250] 以及后面第六章 §3a 中给出.

5. 设 $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ 有广义 Doob 分解

$$
H_n=A_n+M_n,
$$

并且满足 §3d 中的条件 (10). 于是由这里的 §3d 中的定理 2, 下列关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\ll}\mathsf{P}$ 的表示式成立:

$$
\begin{aligned}
H_n&=\left[A_n+\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(\alpha_k\Delta M_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\right]\\
&\qquad+\left[M_n-\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(\alpha_k\Delta M_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\right]\\
&\equiv\widetilde{A}_n+\widetilde{M}_n,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中 $\widetilde{M}\in\mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

我们记 H 关于测度 P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的典范表示分别为:

$$H = \varphi * \nu + \varphi * (\mu - \nu) + (x - \varphi) * \mu \qquad (\text{关于测度}\mathsf{P}) \tag{21}$$

和

$$H = \varphi * \widetilde{\nu} + \varphi * (\mu - \widetilde{\nu}) + (x - \varphi) * \mu \qquad (\text{关于测度 }\widetilde{\mathsf{P}}), \tag{22}$$

其中 μ 为序列 H 的跳跃测度.

在随机分析的许多基于典范表示 (21) 和 (22) 的问题中, 重要的是要知道怎样根据补偿量 ν 和密度过程 $Z = (Z_n)$ 的特征来换算补偿量 $\widetilde{\nu}$. 特别是, 令人感兴趣的是下列问题: 怎样通过测度替换来变换 "漂移" 项 $\varphi * \nu$ 和 $\varphi * \widetilde{\nu}$.

我们来详细讨论这点; 假定 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 并记

$$\nu_n(\cdot;\omega) = \mathsf{P}(h_n \in \cdot \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$$

和

$$\widetilde{\nu}_n(\cdot;\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}(h_n \in \cdot \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$$

为对应的条件概率的正则版本.

对 §3a 中的 "Bayes 公式" (4) 取 $Y = I_A(h_n)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $m = n-1$, 在这里就有下列形式:

$$\widetilde{\mathsf{E}}(I_A(h_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\left(I_A(h_n)\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right), \tag{23}$$

它作出了一个十分合理的假设: 对于每个 $\omega \in \Omega$, 条件分布 $\widetilde{\nu}_n(\cdot;\omega)$ 关于 $\nu(\cdot;\omega)$ 绝对连续, 即, 存在这样的 (对每个 $\omega \in \Omega$) $\mathscr{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$-可测函数 $Y_n = Y_n(x,\omega)$, 使得

$$\widetilde{\nu}_n(A;\omega) = \int_A Y_n(x,\omega)\nu_n(dx;\omega). \tag{24}$$

如果这个等式确实成立, 那么

$$\frac{d\widetilde{\nu}_n(\cdot;\omega)}{d\nu_n(\cdot;\omega)}(x) = Y_n(x,\omega), \tag{25}$$

即函数 $Y_n(x,\omega)$ 起着一个测度 (更确切地说, 一个正则条件分布) 对另一个测度的密度作用.

我们引入公式 (24) 成立的证明 (假定 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$), 同时还给出密度 $Y_n = Y_n(x,\omega)$ $(n \geqslant 1)$ 的 "显式".

我们考察 (23) 右端中的条件数学期望. 按照它的定义, 对于任何 $B \in \mathscr{F}_{n-1}$,

$$
\begin{aligned}
\int_B \mathsf{E}\left(I_A(h_n)\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)(\omega)(\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) \\
&= \int_B I_A(h_n)\frac{Z_n(\omega)}{Z_{n-1}(\omega)}(\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) \\
&= \int_B \left[\int_A \frac{Z_n(\omega)}{Z_{n-1}(\omega)}\mu_n(dx;\omega)\right](\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) \\
&= \int_{B\times A} \frac{Z_n(\omega)}{Z_{n-1}(\omega)}\mu_n(dx;\omega)(\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(d\omega).
\end{aligned} \tag{26}
$$

记 $M_n(dx, d\omega) = \mu_n(dx;\omega)(\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(d\omega)$ 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}$ 上的 "斜积测度", 并设 $\mathsf{E}_{M_n}(\cdot\,|\,\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1})$ 为 (关于 $\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}$ 的) 对于测度 $M_n = M_n(dx, d\omega)$ 的条件 "数学期望", 它通常 (参见例如, [439; 第 II 章, §7]) 借助于 Radon-Nikodym 定理来定义.

于是由 (26), 根据 Fubini 定理,

$$
\begin{aligned}
&\int_B \mathsf{E}\left(I_A(h_n)\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)(\omega)(\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) \\
&= \int_{B\times A} \frac{Z_n(\omega)}{Z_{n-1}(\omega)} M_n(dx;d\omega) \\
&= \int_{B\times A} \mathsf{E}_{M_n}\left(\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}\right)(x,\omega) M_n(dx;d\omega) \\
&= \int_B \left[\int_A \mathsf{E}_{M_n}\left(\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}\right)(x,\omega)\mu_n(dx;\omega)\right](\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) \\
&= \int_B \left[\int_A \mathsf{E}_{M_n}\left(\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}\right)(x,\omega)\nu_n(dx;\omega)\right](\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(d\omega).
\end{aligned}
$$

由 $B \in \mathscr{F}_{n-1}$ 的任意性, 由此求得 (P-a.s.)

$$
\mathsf{E}\left(I_A(h_n)\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)(\omega) = \int_A Y_n(x,\omega)\nu_n(dx;\omega), \tag{27}
$$

这里

$$
Y_n(x,\omega) = \mathsf{E}_{M_n}\left(\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}\right)(x,\omega). \tag{28}
$$

把 $\widetilde{\mathsf{E}}(I_A(h_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = \int_A \widetilde{\nu}_n(dx;\omega)$ 的 (23) 与 (27), (28) 相比较, 我们看到 $\widetilde{\nu}_n(\cdot;\omega) \ll \nu_n(\cdot;\omega)$ 对于每个 $\omega\in\Omega$ 成立, 以至公式 (25) 成立.

由这个公式我们得到上面提出的问题的答案: 在 (22) 和 (23) 中的 "漂移" 成分 $\varphi * \widetilde{\nu}$ 和 $\varphi * \nu$ 通过下列关系式相联系 (至少在 $(|\varphi(x)(Y-1)| * \nu)_n < \infty$ $(n \geqslant 1)$ 的假定下):

$$
\varphi * \widetilde{\nu} = \varphi * \nu + \varphi(Y-1) * \nu. \tag{29}
$$

§3f. (B,S)-市场上无套利机会的可料判别准则

1. 根据金融资产定价理论的基本定理 (§2b), 在由银行账户 $B=(B_n)$ 和 d 种资产 $S=(S^1,\cdots,S^d)$ $(S^i=(S^i_n), 0\leqslant n\leqslant N)$ 所组成的 (B,S)-市场 上, 无套利机会的充要条件为在原来的渗透概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N},\mathsf{P})$[①] 上可求得等价于测度 P 的概率 (鞅) 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得关于该测度, 规范价格的 d-维序列

$$\frac{S}{B}=\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{0\leqslant n\leqslant N}$$

是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅.

我们对描述所有这样的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\sim\mathsf{P}$ 的类 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 很感兴趣, 因为, 正如我们已经在 §1c 中所看到, 在求出上价格和下价格时涉及关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 的类求 sup 和 inf.

在寻求这样的测度时, 自然要从更为一般的关于鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的构造问题开始; 其中 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 关于测度 P 为*局部*绝对连续, 随后再来揭示, 所构造的测度是否满足 $\mathsf{P}\sim\widetilde{\mathsf{P}}$.

2. 在上节所叙述的材料中, 已经给出为考察这个测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\ll}\mathsf{P}$ 的构造所必须的 "测度绝对连续替换" 理论方面的知识.

我们从 $d=1$, $B_n\equiv 1$ 以及 $S=(S_n)$ 为唯一的 "风险" 资产的情形出发,

$$S_n=S_0e^{H_n}. \tag{1}$$

假定渗透概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathsf{P})$ 给定, 且量 H_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测. 正如前面那样, 我们将记 $h_n=\Delta H_n$, $H_0=0$. 以后处处假定 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$.

运用 §3c 的记号和结果, 令 $\widehat{H}_0=0$ 和

$$\widehat{H}_n=\sum_{k=1}^{n}(e^{\Delta H_k}-1),\qquad n\geqslant 1, \tag{2}$$

$$\mathscr{E}(\widehat{H})_n=\prod_{k=1}^{n}(1+\Delta\widehat{H}_k),\qquad n\geqslant 1. \tag{3}$$

我们察觉,

$$\Delta\mathscr{E}(\widehat{H})_n=\mathscr{E}(\widehat{H})_{n-1}\Delta\widehat{H}_n. \tag{4}$$

在构造使得 $S=(S_n)$ 变为鞅的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\ll}\mathsf{P}$ 时, 可直接运用上面叙述过的模式: 写出 $S=(S_n)$ 的 (§3e 中的 (13) 类型的) 典范表示, 然后求出测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\ll}\mathsf{P}$, 使得对于该测度来说, 漂移项 "消失". 当然, 这样做是可能达到的, 但我们要补充假定价格的正性, 使得有可能用它们的对数 (即用 $H=(H_n)$) 来进行讨论; 正如统计分析所指出的, 比起价格 $S=(S_n)$ 本身来, 后者更容易构建.

①原版和英文版在这里都误为 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant N},\mathsf{P})$. —— 译者注

设 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是某个满足 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的测度.

记 $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}}$, 其中 $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_n$, $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n$. 我们以后总假定 $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathsf{P}_0$. 从而, $Z_0 = 1$. 设 $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ 为某个满足有 $\mathscr{F}_n$-可测的 X_n $(n \geqslant 1)$ 和 $X_0 = 0$ 的序列.

根据 §3d 中的引理:

如果 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 那么

$$X \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff XZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P}), \tag{5}$$

以及

如果 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, 那么

$$X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff XZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}). \tag{6}$$

假定 $X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$. 根据第二章 §1c 中的定理, 序列 X 是鞅变换, 而这就是说, $\Delta X_n = a_n \Delta M_n$, 其中 a_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 而 M 为某个鞅 (关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$). 从而, $\Delta\mathscr{E}(X)_n = \mathscr{E}(X)_{n-1}\Delta X_n = a_n \mathscr{E}(X)_{n-1}\Delta M_n$. 由此得到, $\mathscr{E}(X)$ 也是鞅变换, 因而, 再由第二章 §1c 中的定理, $\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$. 这样一来,

$$X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \implies \mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}). \tag{7}$$

如果假定 $\mathscr{E}(X) \neq 0$, 那么考察

$$\Delta X_n = \Delta\mathscr{E}(X)_n / \mathscr{E}(X)_{n-1},$$

我们就用类似的方式求得

$$\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \implies X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}).$$

这样一来, 考虑到 (6), 我们得到下列引理成立:

引理 1. *设* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ *以及* $\mathscr{E}(X) \neq 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.). *那么*

$$\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff XZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}).$$

现在假定 $\mathscr{E}(X) \geqslant 0$ 和 $\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. 于是由第二章 §1c 中的引理, $\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. 因此, 考虑到 (5), 下列引理成立:

引理 2. *设* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ *以及* $\mathscr{E}(X) \geqslant 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.). *那么*

$$\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(X)Z \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}).$$

我们察觉, 由 (3), 下列蕴涵关系成立 (按坐标来理解):

$$\Delta X \neq -1 \iff \mathscr{E}(X) \neq 0,$$

$$\Delta X \geqslant -1 \iff \mathscr{E}(X) \geqslant 0$$

和

$$\Delta X > -1 \iff \mathscr{E}(X) > 0.$$

把引理 1 和 2 的断言应用于 $X = \widehat{H}$ 的情形, 其中 $\widehat{H}$ 由公式 (2) 按照 H 来定义, 那么就有下列结果.

引理 3. 设 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$, 其中

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \qquad H_0 = 0, \tag{8}$$

$\Delta \widehat{H}_n = e^{\Delta H_n} - 1$, $\widehat{H}_0 = 0$.

那么

$$S_n = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})_n, \tag{9}$$

并且

如果 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 那么

$$S \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(\widehat{H})Z \in \mathscr{M}(\mathsf{P}); \tag{10}$$

如果 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, 那么

$$S \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \widehat{H}Z \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}). \tag{11}$$

3. 这些蕴涵关系指出了可求出使得 $S \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的途径.

关于测度 P 序列 $Z = (Z_n)$ 是 P-鞅. 根据 (10) 和 (11), 需要描述这样的非负 P-鞅 Z, 它满足 $\mathsf{E}Z_n \equiv 1$, 并具有下列性质: 如果所求的测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 那么 $\mathscr{E}(\widehat{H})Z \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$, 以及如果所求的测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, 那么 $\widehat{H}Z \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$.

在条件高斯情形下, 对应的鞅 $Z = (Z_n)$ 的类由下列形式的鞅所组成:

$$Z_n = \exp\left\{\sum_{k=1}^n b_k \varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n b_k^2\right\} \tag{12}$$

(其中 b_k 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测; 参见例如, §3b 中的 (7)), 它们满足差分方程

$$\Delta Z_n = Z_{n-1}\Delta N_n, \tag{13}$$

其中

$$\Delta N_n = e^{b_n\varepsilon_n - \frac{1}{2}b_n^2} - 1, \tag{14}$$

它们形成广义鞅差:

$$\mathsf{E}(|\Delta N_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty, \qquad \mathsf{E}(\Delta N_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0.$$

因此, 在一般情形下, 寻求密度过程 $Z = (Z_n)$ 的自然途径可如下构成.

我们将寻求感兴趣的满足 (13) 的密度 $Z = (Z_n)$, 即, 认为

$$Z_n = \mathscr{E}(N)_n, \qquad Z_0 = 1, \tag{15}$$

其中 N 为某个稍后定义的局部鞅, 且满足 $N_0 = 0$, $\Delta N_n \geqslant -1$ 和 $\mathsf{E}\mathscr{E}(N)_n = 1$; 然后再根据它按照公式 $\widetilde{\mathsf{P}}_n(d\omega) = Z_n(\omega)\mathsf{P}_n(d\omega)$ 来构造测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$.

关于用这样的方式得到的有点广的测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的类的问题远不是一个简单问题. 首先涉及的不简单问题是: 是否可能根据 "有限维" 分布 $\{\widetilde{\mathsf{P}}_n\}$ 的构成族来定义测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得 $\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$, $n \geqslant 1$. (对应的反例参见例如, [439; 第 II 章 §3].) 其次, 一个在原理上不简单的问题是: 怎样构建在 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}, \mathsf{P})$ 上的鞅或局部鞅. (关于这方面参见 [250; 第 III 章].)

下面我们将沿着这一途径来讨论; 尽管这样做并不能对所有测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 或 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 的结构问题给出彻底的回答, 至少也能在技巧方面足够简单地导出这类测度的一个广类. 首先我们作出下列注记.

由上节的结果很明显, 对于给定的测度 P, 所有具有性质 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 从它们的 "有限维" 分布 $\{\widetilde{\mathsf{P}}_n\}$ 的视角来看, 由其密度序列 $Z = (Z_n)$ 来描述密度. 由假定 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 导出 $\mathsf{P}(Z_n > 0) = 1$, 而这就是说, 根据 $Z = (Z_n)$ 可定义新的序列 $N = (N_n)$, 其中令 $N_0 = 0$, 以及

$$\Delta N_n = \frac{\Delta Z_n}{Z_{n-1}}. \tag{16}$$

显然, $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$, 这时在 Z 和 N 之间存在互为单值的对应 $Z_n = \mathscr{E}(N)_n$.

因此, 在构建有性质 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 时, 可运作的不是密度 $Z = (Z_n)$, 其中 $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, 而是对应的序列 $N = (N_n)$, 它必须满足性质 $\Delta N_n > -1$, 以保证 $Z_n > 0$ (P-a.s.), $n \geqslant 1$.

这样, 我们将假定, $S_0 > 0$, $S_n = S_0\mathscr{E}(\widehat{H})_n$, $n \geqslant 1$; 这时, $S_n > 0$, 它等价于 $\Delta\widehat{H}_n > -1$.

又设 $Z = (Z_n)$, $Z_n = \mathscr{E}(N)_n$, 其中 $\Delta N_n > -1$, 而这就是说, $Z_n > 0$ (P-a.s.).

我们将假定存在测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得其局限 $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n$ 满足 $\widetilde{\mathsf{P}}_n \sim \mathsf{P}_n$, $n \geqslant 1$, 即 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$.

于是由 (10),

$$S \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(\widehat{H})\mathscr{E}(N) \in \mathscr{M}(\mathsf{P}). \tag{17}$$

4. 下列 *Yor* 公式可直接验证 (参见例如, [402]):

$$\mathscr{E}(\widehat{H})\mathscr{E}(N) = \mathscr{E}(\widehat{H} + N + [\widehat{H}, N]), \tag{18}$$

其中

$$[\widehat{H}, N]_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta\widehat{H}_k \Delta N_k.$$

由假定 $\mathscr{E}(\widehat{H}) > 0$, $\mathscr{E}(N) > 0$ 和 (17) 导出

$$S \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(\widehat{H} + N + [\widehat{H}, N]) \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$$
$$\iff \widehat{H} + N + [\widehat{H}, N] \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}).$$

因此, 如果 $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$, $\Delta N > -1$, $Z_n = \mathscr{E}(N)_n$ 和 $d\widetilde{\mathsf{P}}_n = Z_n d\mathsf{P}$, 那么

$$S \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \widehat{H} + [\widehat{H}, N] \in \mathscr{M}(\mathsf{P}).$$

由于 $\Delta(\widehat{H} + [\widehat{H}, N]) = \Delta\widehat{H}(1 + \Delta N)$, 故条件 $\widehat{H} + [\widehat{H}, N] \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ 等价于序列 $\Delta\widehat{H}(1 + \Delta N) = (\Delta\widehat{H}_n(1 + \Delta N_n))_n$ 为局部 P-鞅差, 或者等价于 (第二章 §1c 中的引理) 这一序列形成广义 P-鞅差, 即对于任何 $n \geqslant 1$, 有

$$\mathsf{E}[|\Delta\widehat{H}_n(1 + \Delta N_n)| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] < \infty \tag{19}$$

和

$$\mathsf{E}[\Delta\widehat{H}_n(1 + \Delta N_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] = 0. \tag{20}$$

注意, 条件 (19) 和 (20) 是通过引入条件数学期望 $\mathsf{E}(\cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$ 来定义的, 并且在这一含义下, 它们用 "可料的" 术语来表达.

条件 (19) 和 (20) 可用不同的形式来给出. 例如, 考虑 $\Delta Z_n = Z_{n-1}\Delta N_n$, $\Delta N_n > -1$ 和 $\Delta\widehat{H}_n = e^{\Delta H_n} - 1$, 我们求得, (20) 等价于对 Z 的下列条件:

$$\mathsf{E}\left[e^{\Delta H_n}\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] = 1. \tag{21}$$

我们察觉, 这个条件当然也可直接得到, 因为根据 "Bayes 公式" (§3a 中的 (4) 或者 §3d 中的 (1)), 在 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的假定下,

$$\widetilde{\mathsf{E}}[e^{\Delta H_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] = \mathsf{E}\left[e^{\Delta H_n}\frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \tag{22}$$

而这就是说, (20) 等价于 $\widetilde{\mathsf{E}}(S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = S_{n-1}$ (P-a.s. 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.). 类似地可证明, (19) $\iff \widetilde{\mathsf{E}}(S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$. 由 S_n $(n \geqslant 1)$ 的非负性, 由此得到, 条件 (19) 和 (20) 确保关于根据序列 $N = (N_n)$ 构建的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 序列 $S = (S_n)$ 是鞅.

上面应用的方法可容易地推广到 $S = (S^1, \cdots, S^d)$ 的高维情形, 并且我们对关于某个测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\sim} \mathsf{P}$,

$$\frac{S}{B} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$$

的问题感兴趣.

我们现在就来讨论这一问题.

5. 作为价格规范因子的银行账户 $B = (B_n)$ 的选取要便于使得量 B_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 而这点正如上面已经注意到, 有一定的技巧上的简化. 然而, 一般来说, 并没有

任何理由不取任何其他资产来扮演银行账户 B 的角色, 这些资产完全没有必要是银行账户.

在这一联系中, 先考察下列局面.

设有两种资产 $S^0 = (S_n^0)$ 和 $S^1 = (S_n^1)$. 假定

$$S_n^i = S_0^i e^{H_n^i}, \qquad i = 0, 1,$$

并设 $\Delta Z_n = Z_{n-1}\Delta N_n$, $\Delta \widehat{H}_n^i = e^{\Delta H_n^i} - 1$, $H_0^i = 0$.

我们考察关系式

$$\frac{S^1}{S^0} = \left(\frac{S_n^1}{S_n^0}\right)_{n\geqslant 0},$$

其中认为 S_0^1 和 S_0^0 为常数, 并且我们将对什么时候 $\dfrac{S^1}{S^0} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$ 的问题感兴趣. (为了不产生有性质 $\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的存在问题, 可以认为 $n \leqslant N$ 和 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_N$, 这里 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ 如下构建: $\widetilde{\mathsf{P}}_n(d\omega) = Z_n(\omega)\mathsf{P}_n(d\omega)$.)

显然, (以无坐标记法)

$$\frac{S^1}{S^0} Z = \frac{S_0^1}{S_0^0} Z_0 \cdot \mathscr{E}(\widehat{H}^1) \cdot \mathscr{E}^{-1}(\widehat{H}^0) \cdot \mathscr{E}(N). \tag{23}$$

容易直接验证,

$$\mathscr{E}^{-1}(\widehat{H}^0) = \mathscr{E}(-\widehat{H}^*), \tag{24}$$

其中

$$\widehat{H}_n^* = \widehat{H}_n^0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\Delta \widehat{H}_k^0)^2}{1 + \Delta \widehat{H}_k^0} \quad \left(= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta \widehat{H}_k^0}{1 + \Delta \widehat{H}_k^0}\right). \tag{25}$$

因此, $\dfrac{S^1}{S^0} Z$ 是三个随机指数的乘积:

$$\frac{S^1}{S^0} Z = \frac{S_0^1}{S_0^0} Z_0 \cdot \mathscr{E}(\widehat{H}^1) \cdot \mathscr{E}(-\widehat{H}^*) \cdot \mathscr{E}(N), \tag{26}$$

由此借助于 *Yor* 公式 (18) 逐次求得

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}(\widehat{H}^1) \cdot \mathscr{E}(-\widehat{H}^*) \cdot \mathscr{E}(N) \\ &\qquad = \mathscr{E}\left(\widehat{H}^1 - \widehat{H}^0 + N + \sum_{k\leqslant \cdot} \frac{(\Delta \widehat{H}_k^0 - \Delta \widehat{H}_k^1)(\Delta \widehat{H}_k^0 - \Delta N_k)}{1 + \Delta \widehat{H}_k^0}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

由此可见, 确保 $\dfrac{S^1}{S^0} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$ 在 N 上的充要条件为序列

$$\widehat{H}^1 - \widehat{H}^0 + \sum_{k\leqslant \cdot} \frac{(\Delta \widehat{H}_k^0 - \Delta \widehat{H}_k^1)(\Delta \widehat{H}_k^0 - \Delta N_k)}{1 + \Delta \widehat{H}_k^0} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}), \tag{28}$$

或者等价地有

$$\left(\frac{(\Delta\widehat{H}_k^1-\Delta\widehat{H}_k^0)(1+\Delta N_k)}{1+\Delta\widehat{H}_k^0}\right)_{k\geqslant 1}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}). \tag{29}$$

由于在 d 种资产 $S^1,\cdots,S^d$ 的情形下规范价格向量

$$\frac{S}{S^0}=\left(\frac{S^1}{S^0},\cdots,\frac{S^d}{S^0}\right)$$

的鞅性问题归结为按分量来考察, 故由 (29) 我们得到下列一般结果.

定理 1. 设在具有 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_N$ 的 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N},\mathsf{P})$ 上给定 $d+1$ 种资产 $(S^0,S^1,\cdots,S^d)$, 其表示式为

$$S_n^i=S_0^ie^{H_n^i},\qquad H_0^i=0,\quad i=1,\cdots,d,\quad 1\leqslant n\leqslant N,$$

或者等价地有

$$\Delta S_n^i=S_{n-1}^i\Delta\widehat{H}_n^i, \tag{30}$$

其中

$$\Delta\widehat{H}_n^i=e^{\Delta H_n^i}-1,\qquad \widehat{H}_0^i=0. \tag{31}$$

假定对于所有 $i=0,1,\cdots,n$, 常数 $S_0^i>0$.

又设 $Z=(Z_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ 为随机变量序列, 满足

$$\Delta Z_n=Z_{n-1}\Delta N_n,\qquad Z_0=1, \tag{32}$$

其中 $\Delta N_n>-1$.

为使关于满足

$$\widetilde{\mathsf{P}}_N(d\omega)=Z_N(\omega)\mathsf{P}(d\omega) \tag{33}$$

的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$, 比 $\dfrac{S}{S^0}$ 是 d-维鞅的充要条件为: 对于所有 $i=1,\cdots,d$ 和 $1\leqslant n\leqslant N$ (P-a.s.)

$$\mathsf{E}\left[\left|\frac{(\Delta\widehat{H}_n^i-\Delta\widehat{H}_n^0)(1+\Delta N_n)}{1+\Delta\widehat{H}_n^0}\right|\Big|\mathscr{F}_{n-1}\right]<\infty, \tag{34}$$

$$\mathsf{E}\left[\frac{(\Delta\widehat{H}_n^i-\Delta\widehat{H}_n^0)(1+\Delta N_n)}{1+\Delta\widehat{H}_n^0}\Big|\mathscr{F}_{n-1}\right]=0. \tag{35}$$

推论. 假定, 资产 $S^0=(S_n^0)$ 是在下列含义下 “无风险”: S_n^0 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测. (例如, $S^0=B$ 为有常利率的银行账户 $(\Delta\widehat{H}_n^0\equiv r)$.) 那么, 由于 $\widehat{H}_n^0$ 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 条件 (34) 和 (35) 能以下列形式给出: 对于 $i=1,\cdots,d$, $1\leqslant n\leqslant N$,

$$\mathsf{E}[|\Delta\widehat{H}_n^i(1+\Delta N_n)|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}]<\infty, \tag{36}$$

$$\mathsf{E}[\Delta\widehat{H}_n^i(1+\Delta N_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}]=\Delta\widehat{H}_0. \tag{37}$$

特别是, 如果 $\Delta\widehat{H}_n^0 \equiv 0$, 那么这些条件取下列形式:

$$\mathsf{E}[|\Delta\widehat{H}_n^i(1+\Delta N_n)|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] < \infty, \tag{38}$$

$$\mathsf{E}[\Delta\widehat{H}_n^i(1+\Delta N_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] = 0, \tag{39}$$

它重合于以前求得的条件 (19), (20).

如果此外还有 $\Delta N_n \equiv 0$, 那么这些条件归结为条件

$$\mathsf{E}[|\Delta\widehat{H}_n^i|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] < \infty, \tag{40}$$

$$\mathsf{E}[\Delta\widehat{H}_n^i\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] = 0, \tag{41}$$

并且 (41) 等价于条件 (比较 §3c 中的 (11))

$$\mathsf{E}[e^{\Delta H_n^i}\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] = 1,$$

它是使 $S^i \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$ 的显然条件.

6. 我们考察某些例子来解释所得到的判别准则. 为此我们先注意下列情况.

设 (B,S)-市场由两种资产组成: 银行账户 $B=(B_n)$ 满足

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1},$$

其中 r_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 而资产 $S=(S_n)$ 满足

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1},$$

其中 ρ_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

于是条件 (36) 和 (37) 取下列形式:

$$\mathsf{E}[|\rho_n(1+\Delta N_n)|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] < \infty, \tag{42}$$

$$\mathsf{E}[\rho_n(1+\Delta N_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] = r_n. \tag{43}$$

如果认为, (B,S)-市场以下列方式给出:

$$B_n = B_{n-1}e^{r_n}, \qquad S_n = S_{n-1}e^{\rho_n}, \tag{44}$$

那么条件 (36) 和 (37) 将可记成下列形式:

$$\mathsf{E}[|(e^{\rho_n}-1)(1+\Delta N_n)|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] < \infty, \tag{45}$$

$$\mathsf{E}[(e^{\rho_n}-1)(1+\Delta N_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}] = e^{r_n}-1. \tag{46}$$

例 1. 我们考察 $n=0$ 和 1 的一步模型, 并认为 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $Z_0=1$. 于是 $1+\Delta N_1 = Z_1$, 并且根据 (46),

$$\mathsf{E}e^{\rho_1}Z_1 = e^r.$$

我们将认为 $\Omega = \mathbb{R}$, $\rho_1(x) = x$, $Z_1 = Z(x)$, 并设 $F = F(x)$ 为 Ω 上的概率分布. 于是所引入的条件等价于

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x Z_1(x) dF(x) = e^r. \tag{47}$$

这样一来, 很明显, 求出所有等价 (在由它们生成的测度等价的含义下) 于 $F = F(x)$ 的分布 $\widetilde{F} = \widetilde{F}(x)$, 相当于描述满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z_1(x) dF(x) = 1 \tag{48}$$

的方程 (47) 的所有正解 $Z_1 = Z_1(x)$. 如果, 例如, $F \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, 其中 $\sigma^2 > 0$, 那么 (45) 和 (46) 取下列形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x Z_1(x) \varphi_{m,\sigma^2}(x) dx = e^r, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(x) \varphi_{m,\sigma^2}(x) dx = 1, \tag{49}$$

其中 $\varphi_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 为正态分布的密度.

由 (49) 我们看到, 如果 “鞅” 测度在有 $\widetilde{\sigma}^2 > 0$ 的正态分布 $\mathcal{N}(\widetilde{m}, \widetilde{\sigma}^2)$ 的类中求出, 即

$$Z_1(x) = \frac{\varphi_{\widetilde{m},\widetilde{\sigma}^2}(x)}{\varphi_{m,\sigma^2}(x)}, \tag{50}$$

那么 “容许” $(\widetilde{m}, \widetilde{\sigma}^2)$ 必定由下列条件来求出:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x \varphi_{\widetilde{m},\widetilde{\sigma}^2}(x) dx = e^r,$$

它等价于

$$\widetilde{m} + \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2} = r. \tag{51}$$

换句话说, 所有满足条件 (51) 的带 $\widetilde{\sigma}^2 > 0$ 的数对 $(\widetilde{m}, \widetilde{\sigma}^2)$ 都是 “容许的”. 我们已经在 §3c 中遇到过 $r = 0$ 的这种条件 (参见 (14)).

注意, 方程组 (49) 除了形为 (50) 的解 $Z_1(x)$ 以外, 还有别的解, 其一般形式看来还不知道. 这一注记表明, 甚至对于我们刚考察过的这样简单的 “一步” 模式, 描述所有 “鞅” 测度的问题也可能相当复杂.

与此有关的是下列情形可能被看作 “过分简单”, 因为对它来说, “鞅” 测度是唯一的, 并且容易求得.

例 2. *CRR*-模型 (Cox-Ross-Rubinstein; [82]).

设

$$\begin{aligned} \Delta B_n &= r B_{n-1}, \\ \Delta S_n &= \rho_n S_{n-1}, \end{aligned} \tag{52}$$

其中 $n \leqslant N$ 以及 B_0, S_0 为正数.

在所考察的模型中, 假定 (ρ_n) 为只取两个值 b 和 a 的独立同分布随机变量序列,

$$-1 < a < r < b$$

且

$$\mathsf{P}_N(\rho_n = b) = p, \qquad \mathsf{P}_N(\rho_n = a) = q, \tag{53}$$

其中 $0 < p < 1, p + q = 1$.

由于在所考察的模型中的所有 "随机性" 都体现在量 ρ_n $(n \geqslant 1)$ 中, 故可看作为基本事件空间的是空间 $\Omega = \{a, b\}^N$, 即序列 $(x_1, \cdots, x_N)$ 的空间, 其中 $x_i = a$ 或 b, 并且对于 $x = (x_1, \cdots, x_N)$, 用坐标方式定义量 $\rho_n = \rho_n(x)$: $\rho_n(x) = x_n$.

使得 $\rho_1, \cdots, \rho_n$ 独立且满足性质 (53) 的概率测度 $\mathsf{P}_N = \mathsf{P}_N(x_1, \cdots, x_N)$ 用下列标准方式来定义:

$$\mathsf{P}_N(x_1, \cdots, x_N) = p^{\nu_b(x_1, \cdots, x_N)} q^{N - \nu_b(x_1, \cdots, x_N)},$$

其中 $\nu_b(x_1, \cdots, x_N) = \sum\limits_{i=1}^{N} I_b(x_i)$ 为等于 b 的 x_i 的个数.

测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N \sim \mathsf{P}_N$ 将通过递推方式来构建: 先是 $\widetilde{\mathsf{P}}_1$, 然后是按照下列公式 ($\mathsf{P}_n = \mathsf{P}_N \,|\, \mathscr{F}_n, \mathscr{F}_n = \sigma(\rho_1, \cdots, \rho_n)$) 构建 $\widetilde{\mathsf{P}}_2, \cdots, \widetilde{\mathsf{P}}_N$:

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n(x_1, \cdots, x_n) = Z_n(x_1, \cdots, x_n)\mathsf{P}_n(x_1, \cdots, x_n),$$

其中 Z_n 将 (一步一步地) 由公式 (43) 来求出; 考虑到 $1 + \Delta N_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}}$, 它可记为下列形式:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\left[\rho_n \frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] = r. \tag{54}$$

当 $n = 1$ (其中 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$) 时, 由 (54) 我们求得

$$pbZ_1(b) + qaZ_1(a) = r, \tag{55}$$

它与规范条件

$$pZ_1(b) + qZ_1(a) = 1 \tag{56}$$

一起, 就唯一地给出值

$$Z_1(b) = \frac{r - a}{b - a} \cdot \frac{1}{p}, \qquad Z_1(a) = \frac{b - r}{b - a} \cdot \frac{1}{q}. \tag{57}$$

记

$$\widetilde{p} = \frac{r - a}{b - a}, \qquad \widetilde{q} = \frac{b - r}{b - a}.$$

那么

$$\widetilde{\mathsf{P}}_1(b) = Z_1(b)\mathsf{P}_1(b) = \widetilde{p},$$
$$\widetilde{\mathsf{P}}_1(a) = Z_1(a)\mathsf{P}_1(a) = \widetilde{q}. \tag{58}$$

为了求出 $\widetilde{\mathsf{P}}_2$ (以及类似地求出 $\widetilde{\mathsf{P}}_3, \cdots, \widetilde{\mathsf{P}}_N$) 再次运用公式 (54). 利用关于测度 P_2 的 ρ_1 和 ρ_2 的独立性, 我们由 (52) 求得

$$bp\frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} + aq\frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = r. \tag{59}$$

对于值 $Z_2(b,b)$ 和 $Z_2(b,a)$ 的定义的补充条件由下列鞅性条件求得:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2}[Z_2(\rho_1,\rho_2)\,|\,\rho_1 = b] = Z_1(b),$$

它给出等式

$$p\frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} + q\frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = 1. \tag{60}$$

把 (59) 和 (60) 与 (55) 和 (56) 相对应比较, 我们看到,

$$\frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} = \frac{r-a}{b-a}\cdot\frac{1}{p} = \frac{\widetilde{p}}{p}, \qquad \frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = \frac{\widetilde{q}}{q}.$$

用类似的方式我们求得

$$\frac{Z_2(a,b)}{Z_1(a)} = \frac{\widetilde{p}}{p}, \qquad \frac{Z_2(a,a)}{Z_1(a)} = \frac{\widetilde{q}}{q}.$$

这就是说,

$$\widetilde{\mathsf{P}}_2(a,a) = Z_2(a,a)q^2 = Z_1(a)\frac{\widetilde{q}}{q}\cdot q^2 = \widetilde{q}^2,$$

$$\widetilde{\mathsf{P}}_2(a,b) = \widetilde{q}\,\widetilde{p}, \qquad \widetilde{\mathsf{P}}_2(b,a) = \widetilde{p}\,\widetilde{q}, \qquad \widetilde{\mathsf{P}}_2(b,b) = \widetilde{p}^2.$$

由此很明显, 量 ρ_1 和 ρ_2 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_2$ 独立同分布, 并且 $\widetilde{\mathsf{P}}_2(\rho_i = b) = \widetilde{p}$, $\widetilde{\mathsf{P}}_2(\rho_i = a) = \widetilde{q}$, $i = 1, 2$.

后面求出 $\widetilde{\mathsf{P}}_3, \cdots, \widetilde{\mathsf{P}}_N$ 的步骤类似, 并由此导得下列结果.

定理 2. 在 (52) 和 (53) 中定义的 *CRR*-模型中, 鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 存在唯一, 且由下列公式来确定:

$$\widetilde{\mathsf{P}}_N(x_1, \cdots, x_N) = \widetilde{p}^{\nu_b(x_1,\cdots,x_N)}\widetilde{q}^{N-\nu_b(x_1,\cdots,x_N)}, \tag{61}$$

其中

$$\widetilde{p} = \frac{r-a}{b-a}, \qquad \widetilde{q} = \frac{b-r}{b-a}. \tag{62}$$

注. 我们注意下列先验上并不显然的结果: 鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 是 "一维" 分布的直积:

$$\widetilde{\mathsf{P}}_N = \underbrace{\widetilde{\mathsf{P}}_1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{\mathsf{P}}_1}_{N\text{个}},$$

即, 关于原来的测度 P_N 独立同分布的量 $\rho_1, \cdots, \rho_N$ 也将关于 "鞅" 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 独立同分布.

4. 完全和完善无套利市场

§4a. 完全市场的鞅判别准则. I. 第二基本定理的陈述. 必要性证明

1. 对应于 §1b 中引入的定义, 给定在滲透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ (其中 $0 \leqslant n \leqslant N$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$) 上的 (B, S)-市场称为完全市场 (完善市场) 或者N-完全市场 (N-完善市场), 是指每个 $\mathscr{F}_N$-可测有界 (有限) 偿付索求 $f_N = f_N(\omega)$ 可达. 换句话说, 可求得自融资策略 π 和初始资本 x, 使得 $X_0^\pi = x$ 以及

$$X_N^\pi = f_N \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

我们将以 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 记所有鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$ 的全体; 关于这些测度, 规范价格 $\dfrac{S}{B}$ 为鞅. 假定 (参见 §§1a, 2a) $B = (B_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 为无风险资产, $S = (S_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 为多维风险资产, 并且 $S_n = (S_n^1, \cdots, S_n^d)$ 以及 $d < \infty$.

资产 B 通常被解释为银行账户; 资产 S^i 称为股票.

以后假定, $B_n > 0$, $n \geqslant 0$. 由此得到, 不妨碍一般性, 可认为 $B_n \equiv 1$, $n \geqslant 0$.

下列定理相当重要, 它自然被称为"金融资产定价理论第二基本定理" (The second Fundamental Asset Pricing Theorem; [214], [215]).

定理 B. 无套利金融 (B, S)-市场 (其中 $N < \infty$, $d < \infty$) 的完全性成立当且仅当鞅测度集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 仅由一个测度构成.

这样一来, 如果无套利意味着

$$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing,$$

那么无套利市场的完全性可 (有条件地) 记作下列形式:

$$|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1.$$

我们对该定理的证明提出某些注记.

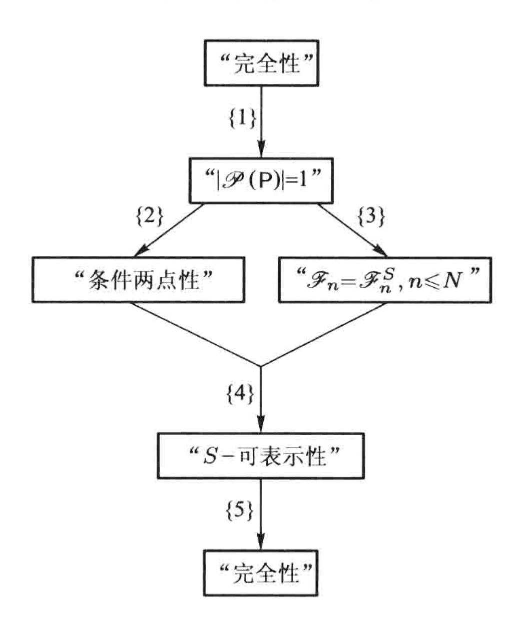
在随机分析中如所周知 (参见例如, [250; 第 III 章]), 与鞅测度的唯一性最直接地联系在一起的是局部鞅关于某个基底鞅的 "表示性" 问题. 在 "技巧" 方面, 对应

的结果 (特别是对于连续时间情形下; 参见后面的第七章 §2d) 涉及许多困难, 因为它们的证明本质上依赖于半鞅和随机测度的随机分析观念和技巧.

同时, 在离散时间的情形下, 可对联系局部鞅的 “可表示性” 问题及其有最直接关系的 (B,S)-市场的完全性问题等方面的课题给出比较初等的叙述. 我们从 $d=1$ 的情形开始 (§§4a–4e). §4f 讨论 $d\geqslant 1$ 的情形.

2. 在 $d=1$ 的情形下的定理 B 的证明思想在于确立下面的蕴涵关系链, 其中 “条件两点性” 和 “S-可表示性” 在 §§4b, 4e 中阐述, 而等式 $\mathscr{F}_n=\mathscr{F}_n^S$ 意味着 σ-代数 $\mathscr{F}_n$ 在精确到 P-测度为零的集合时重合于由随机变量 $S_1,\cdots,S_n$ 所生成的 σ-代数

$$\mathscr{F}_n^S=\sigma(S_1,\cdots,S_n).$$



蕴涵关系 {1}, 即定理 B 中的必要性, 其证明比较简单, 可如下导出.

我们取集合 $A\in\mathscr{F}_N$, 并令 $f_N=I_A(\omega)$. 对应于所假定的 “完全性”, 存在自融资策略 π 和初始资本 x, 使得 $X_N^\pi=f_N$ (P-a.s.) 和 $X_0^\pi=x$.

如果 π 是自融资策略, 那么

$$X_n^\pi=X_0^\pi+\sum_{k=1}^n\gamma_k\Delta S_k.$$

设 P_i $(i=1,2)$ 为族 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 的两个鞅测度. 于是 $(X_n^\pi)_{n\leqslant N}$ 是鞅变换, 并且由于 $X_N^\pi=I_A$, 故根据第二章 §1c 中的引理, 序列 $X^\pi=(X_n^\pi)_{n\leqslant N}$ 是关于鞅测度 P_i $(i=1,2)$ 中的每一个都是鞅.

于是对于 $i=1,2$,

$$x=X_0^\pi=\mathsf{E}_{\mathsf{P}_i}(X_N^\pi\mid\mathscr{F}_0)=\mathsf{E}_{\mathsf{P}_i}I_A=\mathsf{P}_i(A),$$

从而, $\mathsf{P}_1(A)=\mathsf{P}_2(A)$, $A\in\mathscr{F}_N$.

因此, 测度 P_1 和 P_2 其实是重合的; 这就证明了由 (B,S)-市场的无套利性而得到的非空集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 由不多于一个元素所组成 ($|\mathscr{P}(\mathsf{P})|=1$).

定理 B 中的必要性 (蕴涵关系 $\{1\}$) 得证.

在下一节中, 将考察出现在蕴涵关系 $\{4\}$ 和 $\{5\}$ 中的 "可表示性" 问题.

§4b. 局部鞅的可表示性. I ("S-可表示性")

1. 从 "鞅和随机分析的一般理论" 的视角来看 (参见 [102], [103], [250], [304]), "完全性" 假定在实质上等价于所谓局部鞅的 "S-可表示性". (关于 "可表示性" 的一般问题, 参见 [250; 第 III 章]).

定义. 设在渗透概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathsf{P})$ 上给定:

$$d\text{-维 (基底) 鞅 } S=(S_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P})$$

和

$$\text{(一维) 局部鞅 } X=(X_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P}).$$

我们说, 局部鞅 X 在 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathsf{P})$ 上容许有 "S-表示", 或者关于P-鞅 S 的表示, 是指可求得这样的可料 $\gamma=(\gamma_n)$, $\gamma_n=(\gamma_n^1,\cdots,\gamma_n^d)$, 使得对于每个 $n\geqslant 1$, P-a.s.

$$X_n=X_0+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Delta S_k\quad\left(=X_0+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{d}\gamma_k^j\Delta S_k^j\right)\right),\tag{1}$$

即, X 是由 P-鞅 S 对可料序列 γ 的 "积分" 得到的 "鞅变换"; 参见第 II 章中的 §1c.

下列引理有关在前面的蕴涵关系链中引入的蕴涵关系 $\{5\}$.

引理. 设 (B,S) 为带有限时间视野 N 的无套利市场, $B_n\equiv 1$, $n\leqslant N$, $\mathscr{F}(\mathsf{P})$ 是 (在有 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_N$ 的 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上) 等价于测度 P 的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 族, 关于它们 $S=(S_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅.

这样的市场完全的充要条件为可求得 $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})$, 使得每个有界鞅 $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})$ ($|X_n(\omega)|\leqslant C$, $n\leqslant N$, $\omega\in\Omega$) 在 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\widetilde{\mathsf{P}})$ 上有 "S-表示", 或者关于 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 S 的表示.

证明. a) 设 (无套利) 市场完全. 我们取 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的任意测度作为所求的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$. 设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})_{n\leqslant N}$ 是某个鞅, 它满足 $|X_n(\omega)|\leqslant C$, $n\leqslant N$, $\omega\in\Omega$.

在完全性定义中令 $f_N=X_N$. 完全性假定意味着, 存在自融资组合 π 和初始资本 x, 使得 (P-a.s. 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.)

$$X_n^\pi=x=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Delta S_k,\tag{2}$$

以及 $X_N^\pi = f_N = X_N$. 但由于 $|f_N| \leqslant C$, 故 $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\leqslant N}$ 是 P-鞅 (第二章 §1c 中的引理), 因而, $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 X^π 和 X 有同样的终端值 f_N, 以至它们其实是 (P-a.s. 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.) 重合的. 从而, 鞅 X 有 "S-表示".

b) 现在设 $f_N = f_N(\omega)$ 是某个 $\mathscr{F}_N$-可测有界函数, $|f_N| \leqslant C < \infty$ (P-a.s.). 需要指出, 可求出自融资组合 π 和初始资本 x, 使得对应的资本 $X_N^\pi = f_N$ (P-a.s.).

根据假定, 存在测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, 使得关于该测度, 每个有界 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅有 "S-表示".

取带有 $X_n = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(f_N \mid \mathscr{F}_n)$ 的 $X = (X_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})_{n\leqslant N}$ 作为这样的鞅. 由于 $|f_N| \leqslant C$, 故 X 是个有界 (Lévy) 鞅, 并且关于某些 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测随机变量 γ_k^j, $j = 1, \cdots, d$, $k \leqslant N$, 表示式 (1) 成立.

我们对这些量构建组合 $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, 其中 $\gamma^* = \gamma$ 以及 $\beta_n^* = X_n - \sum\limits_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j$.

由 (1) 得到, β_n^* 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测. 这时,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{d} S_{n-1}^j \Delta\gamma_n^{*j} + \Delta\beta_n^* &= \sum_{j=1}^{d} S_{n-1}^j \Delta\gamma_n^j + \left(\Delta X_n - \Delta\left(\sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{d} S_{n-1}^j \Delta\gamma_n^j + \sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j \Delta S_n^j - \Delta\left(\sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j\right) = 0.
\end{aligned}$$

从而, π^* 为自融资组合, 并且

$$X_n^{\pi^*} = \beta_n^* + \sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j = X_n,$$

以及特别有, $X_N^{\pi^*} = X_N = f_N$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s., P-a.s.), 即 (B, S)-市场是完全的.

引理得证.

注. 如果不假定 $B_n \equiv 1$, $n \leqslant N$, 那么把 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 $S = (S_n)_{n\leqslant N}$ 替换为 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 $\dfrac{S}{B} = \left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\leqslant N}$, 所有断言仍成立.

§4c. 局部鞅的可表示性. II ("μ-可表示性", "$(\mu - \nu)$-可表示性")

1. "S-可表示性" 什么时候成立的问题, 正如我们在上一节中所看到, 紧密联系对应市场的 "完全性" 以及资本 X^π 的演变用关系式 (2) 来描述的事实.

在 §4d 中将指出, CRR-模型中有 "S-可表示性" 成立, 因而, 在这一情形下, 市场是完全的. 一般来说, 完全性, 也就是 "S-可表示性", *更可能是例外, 而不是常规*. 也就是在这样的含义下, 有意思的是现在要考察另一种 "局部鞅的可表示性" 的形式, 其中运用了随机测度 μ 和鞅随机测度 $\mu - \nu$ 的概念; 参见 §3e. 以后会变得很明显的是, 比起 S-表示式来, μ-表示式和 $(\mu - \nu)$-表示式经常会得到满足. 因此, 常常先宣告获得 μ-表示式或 $(\mu - \nu)$-表示式, 然后再试图把它们转化为 S-表示式.

2. 我们将假定在渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ ($\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$) 上给定的随机序列 $S = (S^1, \cdots, S^d)$ 是 d-维鞅 (关于原来的测度 P 和流 $(\mathscr{F}_n)$).

设

$$\mathscr{F}_n^S = \sigma(S_k^j, k \leqslant n, j = 1, \cdots, d)$$

是由价格生成的 σ-代数, $n \geqslant 1$, 以及

$$X = (X_n, \mathscr{P}_n^S, \mathsf{P})$$

是局部鞅.

增量 $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ 为 $\mathscr{F}_n^S$-可测, 因而, 可求得这样的 Borel 函数 $f_n = f_n(x_1, \cdots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^d$, 使得

$$\Delta X_n(\omega) = f_n(\Delta S_1(\omega), \cdots, \Delta S_n(\omega)), \qquad \omega \in \Omega.$$

(由假定 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, 向量 S_0 是非随机的, 并且在 $(S_1, \cdots, S_n)$ 和 $(\Delta S_1, \cdots, \Delta S_n)$ 之间存在一一对应.)

对于每个 $n \geqslant 1$ 定义函数

$$W_n(\omega, x) = f_n(\Delta S_1(\omega), \cdots, \Delta S_{n-1}(\omega), x).$$

这个函数显然关于 (ω, x) 可测, 且对于每个 $\omega \in \Omega$ 关于 x 为 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可测, 以及对于每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 为 $\mathscr{F}_{n-1}^S$-可测.

设 $\mu_n(A; \omega) = I(\Delta S_n(\omega) \in A)$ ($A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$) 为按增量 $\Delta S_n(\omega)$ ($n \geqslant 1$) 构建的整值随机测度. 于是

$$\Delta X_n(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} W_n(\omega, x) \mu_n(dx; \omega), \tag{1}$$

因而, 对于 X 我们得到所谓 "μ-表示式":

$$X_n(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} W_k(\omega, x) \mu_k(dx; \omega), \tag{2}$$

或者以更紧凑的形式记为

$$X = X_0 + W * \mu \tag{3}$$

(参见 §3e).

现在我们察觉, 由于按假定, X 是局部鞅, 故

$$\mathsf{E}(|\Delta X_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}^S) < \infty, \quad \mathsf{E}(\Delta X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}^S) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

因此, 如果

$$\nu_n(A; \omega) = \mathsf{E}(\mu_n(A; \cdot) \mid \mathscr{F}_{n-1}^S)(\omega), \tag{4}$$

那么我们看到

$$\int_{\mathbb{R}^d} W_k(\omega, x)\nu_k(dx;\omega) = \mathsf{E}(\Delta X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}^S)(\omega) = 0.$$

从而, 除了 (2) 和 (3) 以外, 我们得到所谓 "$(\mu - \nu)$-表示式":

$$X_n(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} W_k(\omega, x)(\mu_k(dx;\omega) - \nu_k(dx;\omega)), \tag{5}$$

或者以更紧凑的形式记为

$$X = X_0 + W * (\mu - \nu). \tag{6}$$

这里可能看来有点奇怪, 取代自然的表示式 (3), 我们改为考察由它以简易方式得到的表示式 (6), 还称其谓 "$(\mu - \nu)$-表示式", 来突出其重要性.

对此解释如下.

首先, 在更一般的局面下 (连续时间, 比 $(\mathscr{F}_n^S)$ 更一般的 σ-代数流等等) 相应的局部鞅表示式可以基于引入型为 $W*(\mu-\nu)$ 的随机积分. (参见例如, [250; 第 III 章, 4.23 和 4.24].) 其次, 在型为 $W*(\mu-\nu)$ (而不是型为 $W*\mu$) 的表达式的运用中, 要说的是这样的状况: 在这些表示式中的函数 W 一般来说不是唯一的, 而在 $W*(\mu-\nu)$ 的表达式中, 它们经常可选得相当简单.

我们引入例子来说明这点.

取某个集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, 并形成这样的鞅 $X^{(A)} = (X_n^{(A)}, \mathscr{F}_n^S, \mathsf{P})$, 它满足 $X_0^{(A)} = 0$ 和

$$\begin{aligned}\Delta X_n^{(A)}(\omega) &= \mu_n(A;\omega) - \nu_n(A;\omega)\\ &= I(\Delta S_n(\omega) \in A) - \mathsf{E}(I(\Delta S_n) \in A \mid \mathscr{F}_{n-1}^S)(\omega).\end{aligned}$$

如果令 $W_n^{(A)}(\omega, x) = I_A(x)$, 那么有

$$\Delta X_n^{(A)}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} W_n^{(A)}(\omega, x)(\mu_n(dx;\omega) - \nu_n(dx;\omega)),$$

从而

$$X^{(A)} = W^{(A)} * (\mu - \nu).$$

另一方面, 如果令

$$W_n(\omega, x) = I_A(x) - \mathsf{E}(I_A(\Delta S_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}^S)(\omega),$$

那么可求得

$$\int_{\mathbb{R}^d} W_n(\omega, x)\mu_n(dx;\omega) = \mu_n(A;\omega) - \nu_n(A;\omega) = \Delta X_n^{(A)}(\omega),$$

而这就是说,

$$X^{(A)} = W * \mu.$$

很明显, 函数 $W^{(A)}$ 比函数 W 容易构建.

上述讨论顺便指出, 如果取代函数 $W_n(\omega, x)$ 来考察函数 $W_n(\omega, x) + g'_n(x)$, 其中 $g'_n(x)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} g'_n(x)\mu_n(dx;\omega) = 0,$$

那么 $W * \mu$ 的值不变.

至于 $W * (\mu - \nu)$ 的值不变, 只要把 $W_n(\omega, x)$ 取代为函数 $W_n(\omega, x) + g''_n(\omega)$, 因为

$$\int_{\mathbb{R}^d} g''_n(x)(\mu_n(dx;\omega) - \nu_n(dx;\omega)) = 0.$$

在下一节中将指出, 正如在 Cox-Ross-Rubinstein 的 CRR-模型中, 由 "$(\mu-\nu)$-表示式" 容易导出 "S-表示式".

§4d. 在二叉树 CRR-模型中的 "S-可表示性"

1. 正如由 §3f (第 5 点, 例 2) 中所得, 在CRR-模型中鞅测度存在 (而这就是说, 市场是无套利的), 同时, (在按坐标给出概率空间的假定下) 鞅测度是唯一的, 正如定理 B 所断定, 它等价于相应的市场是完全的.

有意思的是怎样来理解, 为什么在这个具体模型中鞅测度的唯一性保证了 "S-可表示性", 而与 §4b 中的引理相对应, 这也就是说市场的完全性.

我们先回忆某些记号.

根据第二章中的 §1e, 在渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})_{n\geqslant 0}$ 上定义的 (B, S)-市场模型是由下列两个序列 $B = (B_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 来描述的:

$$B_n = B_{n-1}(1 + r_n), \tag{1}$$

$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n), \tag{2}$$

其中 r_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 而 ρ_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测, 常数 $B_0 > 0$, $S_0 > 0$.

由于

$$\frac{S_n}{B_n} = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \cdot \frac{1 + \rho_n}{1 + r_n}, \tag{3}$$

故很明显, $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为鞅, 只要首先,

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left|\frac{1 + \rho_n}{1 + r_n}\right| < \infty,$$

其中 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 是关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 求均值; 其次,

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{1+\rho_n}{1+r_n}\,\Big|\,\mathscr{F}_{n-1}\right)=1. \tag{4}$$

由量 r_n 的 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测性, 条件 (4) 归结为

$$\widetilde{\mathsf{E}}(\rho_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=r_n. \tag{5}$$

2. 在二叉树 CRR-模型中假定, $r_n\equiv r$, 其中 r 是某个常数, 而 $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ 是以正概率取两个值 b 和 a 的独立同分布随机变量序列:

$$p=\mathsf{P}(\rho_n=b),\qquad q=\mathsf{P}(\rho_n=a), \tag{6}$$

$p+q=1$. (规定 $a<b$.) 我们也将假定, $\mathscr{F}_n=\sigma(\rho_1,\cdots,\rho_n)$, $n\geqslant 1$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\omega\}$.

如果要求序列 $\dfrac{S}{B}=\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ 关于满足 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\mathrm{loc}}{\sim}\mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 有 "鞅性", 那么再由等式 $\widetilde{\mathsf{E}}\rho_n=r$, 我们在值 $\widetilde{p}_n=\widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n=b)$ 和 $\widetilde{q}_n=\widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n=a)$ 上得到条件

$$b\widetilde{p}_n+a\widetilde{q}_n=r,$$

它与规范条件 $\widetilde{p}_n+\widetilde{q}_n=1$ 一起导出值

$$\widetilde{p}_n=\widetilde{p}\equiv\frac{r-a}{b-a},\qquad \widetilde{q}_n=\widetilde{q}\equiv\frac{b-r}{b-a}, \tag{7}$$

为使它们是正的, 需要 $a<r<b$.

我们还将假定 $a>-1$. 于是 $S_n>0$ 对于所有 $n\geqslant 1$ 成立, 因为 $S_0>0$.

设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})_{n\geqslant 0}$ 为鞅, 其中 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$ 以及当 $n\geqslant 1$ 时, $\mathscr{F}_n=\sigma(\rho_1,\cdots,\rho_n)$.

对于 $n\geqslant 1$, 令 $\mu_n(A;\omega)=I(\rho_n(\omega)\in A)$, $\widetilde{\nu}_n(A)=\widetilde{E}_{\mu_n}(A;\omega)$. 由于 ρ_n 只取两个值, 故测度 $\mu_n(\cdot;\omega)$ 和 $\widetilde{\nu}_n(\cdot)$ 聚集在两个点 a 和 b 上. 这时,

$$\mu_n(\{a\};\omega)=I(\rho_n(\omega)=a),\qquad \widetilde{\nu}_n(\{a\})=\widetilde{q},$$

以及

$$\mu_n(\{b\};\omega)=I(\rho_n(\omega)=b),\qquad \widetilde{\nu}_n(\{b\})=\widetilde{p}.$$

设函数 $g_n=g_n(x_1,\cdots,x_n)$ 满足

$$X_n(\omega)=g_n(\rho_1(\omega),\cdots,\rho_n(\omega)),$$

而这就是说,

$$\Delta X_n(\omega)=g_n(\rho_1(\omega),\cdots,\rho_n(\omega))-g_{n-1}(\rho_1(\omega),\cdots,\boldsymbol{\rho}_{n-1}(\omega)).$$

由于 $\widetilde{\mathsf{E}}(\Delta X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0$, 故

$$\widetilde{p} \cdot g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), b) + \widetilde{q} \cdot g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), a) \\ = g_{n-1}(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega)),$$

或等价地有

$$\frac{g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), b) - g_{n-1}(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega))}{\widetilde{q}} \\ = \frac{g_{n-1}(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega)) - g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), a)}{\widetilde{p}}. \tag{8}$$

考虑到 (7), 这个关系式可赋以下列形式:

$$\frac{g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), b) - g_{n-1}(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega))}{b - r} \\ = \frac{g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), a) - g_{n-1}(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega))}{a - r}. \tag{9}$$

现在转向 "μ-表示式". 根据 §4c 中的公式 (1),

$$\Delta X_n(\omega) = W_n(\omega, \rho_n(\omega)) = \int W_n(\omega, x)\mu_n(dx; \omega), \tag{10}$$

其中

$$W_n(\omega, x) = g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), x) - g_{n-1}(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega)).$$

如果令

$$W'_n(\omega, x) = \frac{W_n(\omega, x)}{x - r}, \tag{11}$$

那么由 (10) 求得

$$\Delta X_n(\omega) = \int (x - r) W'_n(\omega, x)\mu_n(dx; \omega). \tag{12}$$

我们察觉, 由 (9), 函数 $W'_n(\omega, x)$ 不依赖于 x. 因此, 记等式 (9) 的右端 (它等价于左端) 为 $\gamma'_n(\omega)$, 我们求得

$$\Delta X_n(\omega) = \gamma'_n(\omega) \int (x - r)\mu_n(dx; \omega) = \gamma'_n(\omega)(\rho_n - r). \tag{13}$$

因此, 对于 $X = (X_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})$, 我们得到表达式

$$X_n(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \gamma'_k(\omega)(\rho_k(\omega) - r). \tag{14}$$

由于

$$\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \cdot \frac{\rho_n - r}{1 + r},$$

故

$$\rho_n - r = (1+r)\frac{B_{n-1}}{S_{n-1}}\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right), \tag{15}$$

因而,

$$X_n(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k(\omega)\Delta\left(\frac{S_k(\omega)}{B_k}\right), \tag{16}$$

其中 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测函数

$$\gamma_k(\omega) = \gamma_k'(\omega)(1+r)\frac{B_{k-1}}{S_{k-1}}. \tag{17}$$

关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 序列 $\left(\frac{S_k}{B_k}\right)_{k\geqslant 0}$ 为鞅. 因此, (16) 无非就是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 X 关于 (基底) $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 $\left(\frac{S_k}{B_k}\right)_{k\geqslant 0}$ 的 "S-表示式".

应用 §4b 中的引理, 我们发现用 CRR-模型描述的 (B,S)-市场对于任何有限视野 N 是完全市场.

3. 注. 注意到下面这点是有益的: §3f (第 5 点, 例 2) 所引入的CRR-模型中鞅测度唯一的证明中, 本质上是利用了原来的概率空间是坐标式的: $\Omega = \{x\}$, $x = (x_1, x_2, \cdots)$, 其中 $x_i = a$ 或 b; $\mathscr{F}_n = \sigma(x_1, \cdots, x_n)$, $n \geqslant 1$, $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$. 后面将看到 (参见 §4f), 在任意的渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ 和假定鞅测度唯一的情形下, 自动得到这一空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ 必定满足 (精确到 P-测度零集) $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \cdots, S_n)$, $n \geqslant 1$.

§4e. 完全市场的鞅判别准则. II. $d=1$ 情形下的必要性证明

1. 对应于 §4a 中的蕴涵关系表, 为证明定理 B 中的充分性 (即, "$|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1$" $\Longrightarrow$ "完全性"), 必须指出 §4a 的第 2 点的图中的蕴涵关系 {2}, {3} 和 {4} 成立. (我们记得, 蕴涵关系 {5} 已经在 §4b 的引理中在 $d=1$ 的假定下得证.)

我们从蕴涵关系 {4} 的证明开始, 其中假定 $B_n \equiv 1$, $n \geqslant 1$ (而这就是说, $r_n \equiv 0$, $n \geqslant 1$), 正如已经注意到, 这不妨碍一般性.

为此我们察觉, 在上节的 CRR-模型的 "S-可表示性" 证明中, 关键在于概率分布 $\mathrm{Law}(\rho_n|\widetilde{\mathsf{P}})$ $(n \geqslant 1)$ 聚集在两个点 (a 和 b, $a<b$) 上.

换句话说, 重要的是, 这些分布是 "两点分布". 看来, 对应的讨论也可对于更一般的模型进行, 只要 (正则) 条件分布 $\mathrm{Law}(\Delta S_n \mid \mathscr{F}_{n-1}; \widetilde{\mathsf{P}})$ 或者等价的条件分布 $\mathrm{Law}(\rho_n \mid \mathscr{F}_{n-1}; \widetilde{\mathsf{P}})$ $\left(其中\ \rho_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right)$ 是 "两点分布" 及 σ-代数 $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \cdots, S_n)$, $n \geqslant 1$.

形式上, 我们把 "条件两点分布" 性质理解为可求出两个随机变量 $a_n = a_n(\omega)$ 和 $b_n = b_n(\omega)$ 的可料序列 $a = (a_n)$ 和 $b = (b_n)$, 使得

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = a_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega) + \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = b_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega) = 1, \tag{1}$$

以及 $a_n(\omega) \leqslant 0$, $b_n(\omega) \geqslant 0$ 对于所有 $\omega \in \Omega$, $n \geqslant 1$ 成立. (在值 $a_n(\omega)$ 和 $b_n(\omega)$ "相粘合" 的情形下, 显然有 $a_n(\omega) = b_n(\omega) = 0$; 这种退化的无意义的情形对应 $\Delta S_n(\omega) = 0$; 不妨碍一般性, 它在讨论中可立即排除.)

设 $\widetilde{p}_n(\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = b_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$, $\widetilde{q}_n(\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = a_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$.

序列 $S = (S_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})$ 的鞅性质导致条件 $\widetilde{\mathsf{E}}(\rho_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0$, $n \geqslant 1$, 由此得到

$$b_n(\omega)\widetilde{p}_n(\omega) + a_n(\omega)\widetilde{q}_n(\omega) = 0, \qquad n \geqslant 1. \tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 我们得到 (比较 §4d 中的 (7))

$$\widetilde{p}_n(\omega) = \frac{-a_n(\omega)}{b_n(\omega) - a_n(\omega)}, \qquad \widetilde{q}_n(\omega) = \frac{b_n(\omega)}{b_n(\omega) - a_n(\omega)}. \tag{3}$$

(如果 $a_n(\omega) = b_n(\omega) = 0$, 那么规定 $\widetilde{p}_n(\omega) = \widetilde{q}_n(\omega) = \frac{1}{2}$.)

设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n^S, \widetilde{\mathsf{P}})$ 为局部鞅, 函数 $g_n = g_n(x_1, \cdots, x_n)$ 满足 $X_n(\omega) = g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_n(\omega))$. 类似于 §4c 中的 (8), 我们看到

$$\begin{aligned} &\frac{g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), b_n(\omega)) - g_{n-1}(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega))}{\widetilde{q}_n(\omega)} \\ &\qquad = \frac{g_{n-1}(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega)) - g_n(\rho_1(\omega), \cdots, \rho_{n-1}(\omega), a_n(\omega))}{\widetilde{p}_n(\omega)}. \end{aligned} \tag{4}$$

同时, 按照 §4c 的 (9)–(17) 中同样的计算, 我们求得对于 X 的下列 "S-表示式" 成立:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(\omega) \Delta S_k(\omega), \tag{5}$$

其中 $\gamma_k(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_{k-1}^S$ 可测函数, $k \geqslant 1$.

这样, 蕴涵关系式 {4} 得证.

现在转向蕴涵关系式 {2} 的证明, 它对应鞅测度的唯一性可由 "条件两点分布" 来导出 (在 $d = 1$ 的情形下).

如果利用正则条件概率 $\widetilde{\mathsf{P}}(\Delta S_n \in \cdot \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ 使计算可 (对于每个 $\omega \in \Omega$) 如同对通常的概率一样来进行, 那么所要求的关于 "条件两点性" 的断言等价于下列断言:

I. 设 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ 是 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上满足 $\int_{\mathbb{R}} |x| \mathsf{Q}(dx) < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} x \mathsf{Q}(dx) = 0$ ("鞅性质") 的概率分布. 设 $\mathscr{P}(\mathsf{Q})$ 等价于测度 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ 且具有性质 $\int_{\mathbb{R}} |x| \widetilde{\mathsf{Q}}(dx) < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} x \widetilde{\mathsf{Q}}(dx) = 0$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{Q}} = \widetilde{\mathsf{Q}}(dx)$ 的族. 如果族 $\mathscr{P}(\mathsf{Q})$ 仅仅由一个 (原来的) 的测度 Q 所构成, 那么这个测度必定是 "两点测度": 存在 $a \leqslant 0$ 和 $b \geqslant 0$, 使得

$$\mathsf{Q}(\{a\}) + \mathsf{Q}(\{b\}) = 1,$$

其中包括有可能它们 "粘合" 在零点 $(a = b = 0)$.

这个断言也可赋以下列等价形式:

II. 设 $Z(\mathsf{Q})$ 为满足下列条件的函数 $z = z(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ 的类:

$$\mathsf{Q}\{x\colon 0 < z(x) < \infty\} = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x| z(x) \mathsf{Q}(dx) < \infty, \qquad \int_{\mathbb{R}} z(x) x \mathsf{Q}(dx) = 0.$$

假定对于测度 Q 这个函数类 $Z(\mathsf{Q})$ 仅由 Q-无区别于 1 的函数 $(\mathsf{Q}\{x\colon z(x) \neq 1\} = 0)$ 所组成. 于是, 测度 Q 必定聚集在不多于两个点上.

最后, 这个断言还可如下变换:

III. 设 $\xi = \xi(x)$ 是按坐标给定的在 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上的分布为 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ 的随机变量.

设 $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}\xi = 0$ 以及测度 Q 具有这样的性质: 如果 $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$ 以及 $\widetilde{\mathsf{E}}|\xi| < \infty$, $\widetilde{\mathsf{E}}\xi = 0$, 那么 $\widetilde{\mathsf{Q}} = \mathsf{Q}$.

于是测度 Q 的支集在不多于两个点上聚集 (比如 $a \leqslant 0$ 和 $b \geqslant 0$), 并且它们也可能在 "零" 点上 "粘合" $(a = b = 0)$.

为了证明这些 (等价) 断言, 我们察觉, 每个在 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上的概率分布 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ 可表示为三个分布的 "混合" 形式:

$$c_1\mathsf{Q}_1 + c_2\mathsf{Q}_2 + c_3\mathsf{Q}_3,$$

其中 Q_1 为纯离散的, Q_2 为绝对连续的, 而 Q_3 为奇异的; c_1, c_2 和 c_3 为其和等于 1 的非负常数.

当测度 Q 被假定为聚集在三个点上时, 比如点 x_-, x_0 和 x_+ 上, 并且它们的排序为 $x_- \leqslant x_0 \leqslant x_+$, 而分别有非零质量 p_-, p_0 和 p_+ 时, 证明的思想就在 "纯离散" 情形下是相当清晰的.

条件 $\mathsf{E}\xi = 0$ 意味着

$$x_-p_- + x_0p_0 + x_+p_+ = 0. \tag{6}$$

如果 $x_0 = 0$, 那么 (6) 取形式为 $x_-p_- + x_+p_+ = 0$.

令

$$\widetilde{p}_- = \frac{p_-}{2}, \quad \widetilde{p}_0 = \frac{1}{2} + \frac{p_0}{2}, \quad \widetilde{p}_+ = \frac{p_+}{2}, \tag{7}$$

它们对应在点 x_- 和 x_+ 上的质量 p_- 和 p_+ 被 "汲取" 到点 $x_0 = 0$ 上的部分.

由 (7) 很明显, "座落" 在三个点 x_-, x_0 和 x_+ 上的测度 $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_-, \widetilde{p}_0, \widetilde{p}_+\}$ 是满足 $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$ 和 $\widetilde{\mathsf{E}}\xi = 0$ 的概率, 并且 $\widetilde{\mathsf{Q}} \neq \mathsf{Q}$, 这与测度 Q 的唯一性矛盾.

因此, 在 $x_0 = 0$ 的情形下, 测度 Q 聚集在三个点上不可能成立.

现在设 $x_0 \neq 0$. 由点 x_- 和 x_+ 向点 $x_0 = 0$ "汲取" 质量的想法例如可通过下列方式来实现.

令

$$\widetilde{p}_- = p_- - \varepsilon_-, \quad \widetilde{p}_0 = p_0 + (\varepsilon_- + \varepsilon_+), \quad \widetilde{p}_+ = p_+ - \varepsilon.$$

对于充分小的 ε_- 和 ε_+, 测度 $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_-, \widetilde{p}_0, \widetilde{p}_+\}$ 是概率, 并需要指出, 可能选择正数 ε_- 和 ε_+, 使得 $\widetilde{\mathsf{E}}\xi = 0$, 即

$$\begin{aligned} &x_-p_- + x_0p_0 + x_+p_+ \\ &\quad = (x_-p_- + x_0p_0 + x_+p_+) - (\varepsilon_-x_- + (\varepsilon_- + \varepsilon_+)x_0 - \varepsilon_+x_+) = 0. \end{aligned}$$

由于 $\mathsf{E}\xi = x_-p_- + x_0p_0 + x_+p_+ = 0$, 故正数 ε_- 和 ε_+ 需要选为

$$\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} = \frac{x_0 - x_-}{x_+ - x_0}.$$

如果记 $\lambda = \dfrac{x_0 - x_-}{x_+ - x_0} (> 0)$, 那么显然, 先选取充分小的 ε_-, 然后再根据它取值 $\varepsilon_+ = \lambda\varepsilon_-$, 就可达到 $\widetilde{p}_- > 0, \widetilde{p}_0 > 0$ 和 $\widetilde{p}_+ > 0$.

因此, 测度 $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_-, \widetilde{p}_0, \widetilde{p}_+\}$ 是概率, $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$, $\widetilde{\mathsf{Q}} \neq \mathsf{Q}$ 和 $\widetilde{\mathsf{E}}\xi = 0$, 再次与鞅测度 Q 的唯一性矛盾, 而这意味着, 分布 Q 不可能取所有三个正值 p_-, p_0 和 p_+.

上述构造不难照搬到聚集在有限或可数点集 $\{x_i, i = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 的纯离散鞅测度 Q 的情形, 其中对应的测度为 $\{p_i, i = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$, 并且如下排序: $\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$.

如果在集合 $\{x_i, i = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 有零值, 比如 $x_0 = 0$, 那么需要令

$$\widetilde{p}_i = \frac{p_i}{2}, \qquad i \neq 0,$$

和

$$\widetilde{p}_0 = \frac{1 - \sum_{i\neq0} p_i}{2}.$$

于是 $\sum\limits_i \widetilde{p}_i = 1$ 以及 $\widetilde{\mathsf{E}}\xi = \sum\limits_i x_i\widetilde{p}_i = \frac{1}{2}\sum\limits_i x_ip_i = 0$.

测度 $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_i, i = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 是概率, $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$, $\widetilde{\mathsf{Q}} \neq \mathsf{Q}$ 和 $\widetilde{\mathsf{E}}\xi = 0$, 与鞅测度的唯一性假定不相容.

现在设在集合 $\{x_i, i = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 上所有 $x_i \neq 0$. 我们构建新分布 $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_i, i = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$, 其中对于 $i = \pm2, \pm3, \cdots$, 令 $\widetilde{p}_i = p_i$, 并且与上面一样, 令

$$\widetilde{p}_{-1} = p_{-1} - \varepsilon_{-1}, \quad \widetilde{p}_{+1} = p_{+1} - \varepsilon_{+1}, \quad \widetilde{p}_0 = p_0 + (\varepsilon_{-1} + \varepsilon_{+1}).$$

于是

$$\widetilde{\mathsf{E}}\xi = \mathsf{E}\xi - \varepsilon_{-1}x_{-1} + (\varepsilon_{-1} + \varepsilon_{+1})x_0 - \varepsilon_{+1}x_{+1},$$

并且与上面考察三点 (x_-, x_0, x_+) 的情形一样选取 ε_- 和 ε_+, 就可构建新的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{Q}}$, 它不同于 Q, 但与它等价; 从而与鞅测度 Q 的唯一性矛盾.

用类似的方式也可考察分布有绝对连续成分和/或奇异成分的情形.

2. 现在转向蕴涵关系 {3} 的证明, 它是指鞅测度的唯一性导致 σ-代数 $\mathscr{F}_n$ 应该由价格来生成:

$$\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n^S \equiv \sigma(S_0, \cdots, S_n), \qquad n \leqslant N.$$

我们将用归纳法来引入证明. (我们察觉, σ-代数 $\mathscr{F}_0$ 和 $\mathscr{F}_0^S$ 相重合, 因为根据假定, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, 而 S_0 是非随机量.)

设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})_{n\leqslant N}$ 为渗透概率空间, $S = (S_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P})_{n\leqslant N}$ 为 (股票) 价格序列, 其中 $S_n = (S_n^1, \cdots, S_n^d)$. 为了不引进新记号, 我们将认为, 鞅测度是测度 P 本身.

假定 $\mathscr{F}_{n-1} = \mathscr{F}_{n-1}^S$, 我们考察集合 $A \in \mathscr{F}_n$. 令

$$z = 1 + \frac{1}{2}(I_A - \mathsf{E}(I_A \,|\, \mathscr{F}_n^S)). \tag{8}$$

显然, $\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant \frac{3}{2}$ 以及 $\mathsf{E}z = 1$. 因此, 有 $\mathsf{P}'(d\omega) = z(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$ 的测度 P' 是概率测度, 且满足 $\mathsf{P}' \sim \mathsf{P}$. 设 $z_i = \mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_i)$. 根据 "Bayes 公式" (参见 §3a 中的 (4)),

$$\mathsf{E}'(\Delta S_i \,|\, \mathscr{F}_{i-1}) = \mathsf{E}\left(\frac{z_i}{z_{i-1}}\Delta S_i \,\middle|\, \mathscr{F}_{i-1}\right). \tag{9}$$

我们察觉, 因为假定 $\mathscr{F}_{n-1} = \mathscr{F}_{n-1}^S$, 由 (8) 得到 $\mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 1$. 这时, z 是 $\mathscr{F}_n$-可测函数. 因此, 当 $i \neq n$ 时, $\dfrac{z_i}{z_{i-1}} = 1$, 而这意味着 $\mathsf{E}'(\Delta S_i \,|\, \mathscr{F}_{i-1}) = 0$ 对所有 $i \neq n$ 成立.

由于 $\dfrac{z_n}{z_{n-1}} = z$, $\mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) = 1$ 和 ΔS_n 为 $\mathscr{F}_n^S$-可测, 故由 (12),

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}'(\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) &= \mathsf{E}(z\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(z\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) \\
&= \mathsf{E}(\mathsf{E}(z\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_n^S) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) \\
&= \mathsf{E}(\Delta S_n \mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_n^S) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) = \mathsf{E}(\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) = 0,
\end{aligned}$$

其中我们也利用了: 根据 (8), $\mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_n^S) = 1$.

这样一来, 价格序列 $(S_n \mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}$ 关于测度 P' 是鞅.

鞅测度P 的唯一性假定导致 $z = 1$ (P-a.s.), 而这就是说, 由 (11), 对于每个 $A \in \mathscr{F}_n$,

$$I_A = \mathsf{E}(I_A \,|\, \mathscr{F}_n^S) \quad (\text{P-a.s.}).$$

由此得到, 精确到 P-测度的零集, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n^S$.

按 n 的归纳法我们求得, 这些关系式对于所有 $n \leqslant N$ 成立, 这就证明了蕴涵关系 {3}.

3. 这样, 鞅测度 P 的唯一性确保导出 "S-可表示性" 的蕴涵关系 {2} 和 {3} 成立, 由此也导出市场的完全性 (由 §4a 的引理). 从而, 定理 B 中的断言 (在 $d = 1$ 的情形) 得证.

注 1. 注意到以下这点是有益的: 所引入的定理 B 的证明表明, 时间上离散的无套利市场 (当 $N < \infty$, $d = 1$ 时) 其实是在下列含义下也按相变量离散: σ-代数 $\mathscr{F}_N$ (关于测度P) 是纯原子的, 其原子个数不超过 2^N 个; 这一结论是 "条件两点性" 的直接推论. (在任意的 $d < \infty$ 的情形下, $\mathscr{F}_N$ 中的原子个数不超过 $(d+1)^N$.)

注 2. 在 $N < \infty$, $d < \infty$ 的情形下, 完全无套利市场具有这样的性质: σ-代数 $\mathscr{F}_N$ 的元素个数不超过 $(d+1)^N$ 个; 这一状况说明在这样的市场上完全性与完善性这两个概念相重合.

§4f. 第二基本定理的推广版本

1. 上面所引入的定理 B 的证明是针对 $d = 1$ 的情形的. (这个假定显然在建立蕴涵关系 $\{2\}$ 和 $\{4\}$ 时用到.) 在 $d \geqslant 1$ 的一般情形下, 有价值的是给出这一定理的推广陈述, 其中除了 "完全性" 与 "鞅测度的唯一性" 的等价性断言以外, 还包括一系列其他的等价特征.

先引入某些记号.

我们将令 $\overline{S}_n = \dfrac{S_n}{B_n}$ (折现价格),

$$\mathsf{Q}_n(\cdot\,;\omega) = \mathsf{P}(\Delta S_n \in \cdot \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega), \quad \overline{\mathsf{Q}}_n(\cdot\,;\omega) = \mathsf{P}(\Delta \overline{S}_n \in \cdot \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega).$$

我们记得, 向量 $a_1, \cdots, a_k$ (其中 $a_i \in \mathbb{R}^d$, $2 \leqslant k \leqslant d+1$) 称为仿射无关, 是指存在 $i \in \{1, \cdots, k\}$, 使得 $k-1$ 个向量 $(a_j - a_i)$ $(j = 1, \cdots, k,\ j \neq i)$ 线性无关. 如果这个性质对于某个 $i \in \{1, \cdots, k\}$ 成立, 那么它们将也对于任何 $i = 1, \cdots, k$ 都成立. 我们察觉, d-维向量 $a_1, \cdots, a_k$ 的仿射无关性等价于包含 $a_1, \cdots, a_k$ 的最小仿射超平面有 $k-1$ 维.

定理 B* (第二基本定理的推广版本; [251]). 设 (B, S)-市场 $(B = (B_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, $B_n > 0$ 且 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, $S = (S_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}, S_n = (S_n^1, \cdots, S_n^d), S_n^i \geqslant 0$ 且 $\mathscr{F}_n$-可测) 无套利; $N < \infty$, $d < \infty$.

那么下列条件等价.

(a) 市场是完全的.

(b) 市场是完善的.

(c) 鞅测度集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 刚好包含一个测度.

(d) 局部鞅测度集合 $\mathscr{P}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ 刚好包含一个测度.

(e) 在集合 $\mathscr{P}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ 中存在测度 P', 使得每个鞅 $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}')_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 有 "$\overline{S}$-表示式"

$$M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta \overline{S}_i, \qquad n \leqslant N,$$

其中 γ_i 为 $\mathscr{F}_{i-1}$-可测.

(f) 精确到 P-测度零集, $\mathscr{F}_n=\sigma(S_1,\cdots,S_n)$, 并且可求得 (对于所有 n 和 ω) 仿射无关的 $d+1$-可料 $\mathbb{R}^d$-值过程 $(a_{1,n},\cdots,a_{d+1,n})$, $1\leqslant n\leqslant N$, 使得 (P-a.s.) 测度 $\mathsf{Q}_n(\cdot;\omega)$ 的支集包含在集合 $\{a_{1,n}(\omega),\cdots,a_{d+1,n}(\omega)\}$ 中.

(g) 精确到 P-测度零集, $\mathscr{F}_n=\sigma(\overline{S}_1,\cdots,\overline{S}_n)$, 并且可求得 (对于所有 n 和 ω) 仿射无关的 $d+1$-可料 $\mathbb{R}^d$-值过程 $(\overline{a}_{1,n},\cdots,\overline{a}_{d+1,n})$, $1\leqslant n\leqslant N$, 使得 (P-a.s.) 测度 $\overline{\mathsf{Q}}_n(\cdot;\omega)$ 的支集包含在集合 $\{\overline{a}_{1,n}(\omega),\cdots,\overline{a}_{d+1,n}(\omega)\}$ 中.

在所考察的情形下, σ-代数 $\mathscr{F}_N$ 是 (关于测度 P) 有不超过 $(d+1)^N$ 个原子的纯原子 σ-代数.

$d=1$ 情形下的证明已经在上节中叙述. 在 $d\geqslant 1$ 的一般情形下, 相应的证明包含在著作 [251] 中. 想了解所有由价格 $S=(S^1,\cdots,S^d)$ $(d\geqslant 1)$ 的向量性所引起的技巧细节的读者在这里只要注意在证明模式中 $d=1$ 与 $d>1$ 有什么不同.

首先我们察觉, 性质 (f) 和 (g) 的等价性是下列 $\overline{a}_{i,n}$ 和 $a_{i,n}$ 之间的关系式的简单推论:

$$\overline{a}_{i,n}=\frac{a_{i,n}}{B_n}+S_{n-1}\left(\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n-1}}\right).$$

同时, 显然有 (b) $\Longrightarrow$ (a), 且由定理 A* (§2e), (d) $\Longleftrightarrow$ (c).

因此, 为证明定理, 需要确立下列蕴涵关系成立:

$$\begin{aligned}
(a) &\Longrightarrow (d),\\
(c) &\Longrightarrow (g),\\
(g) &\Longrightarrow (b),\\
(a)+(g) &\Longrightarrow (e),\\
(e) &\Longrightarrow (a).
\end{aligned}$$

蕴涵关系 (a) $\Longrightarrow$ (d) 的证明与 $d=1$ 的情形完全一样 (参见 §4a 中的第 2 点), 其中鞅测度 P_i $(i=1,2)$ 替换为局部鞅测度.

在蕴涵关系 (c) $\Longrightarrow$ (g) 中的关于 $\mathscr{F}_n=\sigma(\overline{S}_1,\cdots,\overline{S}_n)$ 的断言在 §4e 的第 2 点中为确立 §4a 的第 2 点的蕴涵关系 {3} 时得证. (相应的证明其实是对任何 $d\geqslant 1$ 引进的.)

蕴涵关系 (c) $\Longrightarrow$ (g) 成立的证明中最困难的部分是确立测度 $\overline{\mathsf{Q}}_n(\cdot;\omega)$ 的支集结构. 在 $d=1$ 的情形下, 测度的支集是 "两点测度". 在 $d\geqslant 1$ 的一般情形下, 这些测度的支集至多由 ($\mathbb{R}^d$ 中) 的 $d+1$ 个点所组成. 证明的这一部分在 [251] 中详细叙述, 这里从略. (证明的思路与 $d=1$ 的情形一样, 可如下导出. 设测度 P 本身是鞅测度. 如果 $\overline{\mathsf{Q}}_n(\cdot;\omega)$ 由多于 $d+1$ 个点所组成, 那么再次运用 "汲取" 质量的思想, 用 $\mathsf{P}'(d\omega)=z(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$ 的方式构造新测度 P', 使得 $\mathsf{P}'\sim\mathsf{P}$, 且 $\mathsf{P}'\neq\mathsf{P}$, 这里 $\mathscr{F}_N$-可测函数 $z(\omega)$ 适当选择. 然而, 这将与鞅测度的唯一性假定矛盾. 类似的构造也可确立 $\mathbb{R}^d$-值向量 $(\overline{a}_{1,n},\cdots,\overline{a}_{d+1,n})$ 的仿射无关性.)

现在转向蕴涵关系 (g) $\Longrightarrow$ (b). 设 f_N 为 $\mathscr{F}_N$-可测随机变量, 而原测度 P 自身是鞅测度. 由 (g) 得到, 其实, f_N 是只取有限个值的随机变量.

要求证明 f_N 可表示为下列形式:

$$f_N = x + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \overline{S}_k. \tag{1}$$

由于序列 $\overline{X}_n \equiv x + \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta \overline{S}_i$ $(n \leqslant N)$ 是 P-鞅, 故必定有下列关系式满足: $x = \mathsf{E} f_N$ 以及

$$\gamma_n \Delta \overline{S}_n = \mathsf{E}(f_N \mid \mathscr{F}_n) - \mathsf{E}(f_N \mid \mathscr{F}_{n-1}). \tag{2}$$

因此, 为得到表示式 (1), 我们令 $x = \mathsf{E} f_N$; 然后我们指出 (如同在 $d=1$ 的情形中那样), 由条件 (g) 导出构造有所要求的性质 (2) 的 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测函数 γ_n 的可能性. (详情参见 [251].)

蕴涵关系 (a)+(g) $\Longrightarrow$ (e). 由 (g), σ-代数 $\mathscr{F}_N$ 是纯原子的. 尤其是, 所有 $\mathscr{F}_N$-可测随机变量值只取有限多个值, 而这就是说, 它是有界的.

设 $\mathsf{P}' \in \mathscr{P}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ 以及 $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}')_{n \leqslant N}$ 为鞅. 根据 (a), 存在 $x \in \mathbb{R}$ 和可料过程 $\gamma = (\gamma_n)$, 使得 $M_N = x + \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta \overline{S}_i$.

带有 $M'_n = x + \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta \overline{S}_i$ 的序列 $M' = (M'_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}')_{n \leqslant N}$ 是 P′-局部鞅, 因而也是鞅, 因为这里所有的随机量都有界. 由于 $M_N = M'_N$, 故鞅 M 和 M' 重合 (P′-a.s.), 由此得到断言 (e).

最后, 为证明蕴涵关系 (e) $\Longrightarrow$ (a), 只需注意到下面这点 (比较 §4a 中的引理).

设每个带有 $\mathsf{P}' \in \mathscr{P}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ 的鞅 $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}')$ 允许有 "S-表示式" $M_n = M_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta \overline{S}_i$.

设 f_N 为 $\mathscr{F}_N$-可测有界函数. 我们考察鞅 $M_n = \mathsf{E}'(f_N \mid \mathscr{F}_n)$, $n \leqslant N$, 其中 E' 是关于测度 P′ 的均值. 按假定,

$$f_N = M_N = M_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta \overline{S}_i \quad (\mathsf{P}'\text{-a.s.}).$$

因此, f_N 可表示为下列形式

$$f_N = x + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta \overline{S}_i \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}),$$

其中 $x = M_0$ 以及 $\gamma = (\gamma_i)_{i \leqslant N}$ 是可料序列, 而这意味着市场的完全性.

这就完成了所有上面陈述的在定理 B* 的证明中所要求的蕴涵关系的考察.

2. 我们引入某些既能说明定理 B*, 也能说明定理 A* 的例子.

例 1 ($d=1$). 在有 $B_n \equiv 1$ ($n \leqslant N$) 的 CRR-模型中 (参见 §4d), 假定 $(\rho_n)_{n\leqslant N}$ 为取两个值 a 和 b ($a<b$) 的独立同分布随机变量序列.

由于 $\Delta S_n = S_{n-1}\rho_n$, 故 $\Delta S_n = S_{n-1}a$ 或者 $\Delta S_n = S_{n-1}b$. 对应于对无套利机会的定理 A*, 参数 a 和 b 必定使得集合 (a,b) 包含点 0. 由此得到 $a<0<b$. 为使价格 S 取正值, 还必须要求 $a>-1$.

在所考察的情形下, $\Delta S_n = S_{n-1}\rho_n$, 因而, ΔS_n 取两个值: $S_{n-1}b$ ("价格上扬运动") 和 $S_{n-1}a$ ("价格下降运动"). 因此, 条件分布 $\mathsf{Q}_n(\cdot;\omega)$ 的支集聚集在两个点上: $S_{n-1}(\omega)a$ 和 $S_{n-1}(\omega)b$, 而价格 "树" 本身 $(S_0,S_1,S_2,\cdots)$ 和其上的运动有 "齐次 Markov" 结构 (参见后面引进的图 56): 如果 $(S_0,S_1,\cdots,S_{n-1})$ 为价格的实现, 那么以概率 $p=\mathsf{P}(\rho_n=b)$ 产生向值 $S_n=S_{n-1}B$ 转换, 而以概率 $q=\mathsf{P}(\rho_n=a)$ 向值 $S_n=S_{n-1}A$ 转换, 其中 $B=1+b$ 和 $A=1+a$.

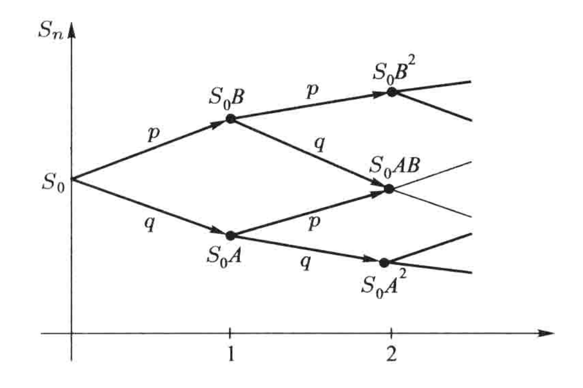


图 56 在 Cox-Ross-Rubinstein 的 CRR-模型中的 "价格树" $(S_0,S_1,S_2,\cdots)$

在 $-1<a<0<b$ 的假定下, 存在唯一的鞅测度, 因而, 对应的 (B,S)-市场是无套利完全市场.

由定理 B* 得到, 在 $d=1$ 的情形下, 每个完全无套利市场都有十分相似的价格的 "二叉树" 结构.

也就是说, 在给定的 "历史" $(S_0,S_1,\cdots,S_{n-1})$ 下, 值 $S_n=S_{n-1}(1+\rho_n)$ 其中量 $\rho_n=\rho_n(S_0,S_1,\cdots,S_{n-1})$ 都只取两个值: $a_n=a_n(S_0,S_1,\cdots,S_{n-1})$ 和 $b_n=b_n(S_0,S_1,\cdots,S_{n-1})$.

在上面所考察的 Cox-Ross-Rubinstein 模型中, 量 a_n 和 b_n 是常数 ($a_n=a, b_n=b$). 在一般情形下, 这些值依赖于价格运动的以前的历史, 但再次为了价格的正值性、完全性和无套利性, 它们必定满足条件 $-1<a_n<0<b_n$.

例 2 ($d=2, N=1$). 设 $B_0=B_1=1$, $S=(S_1,S_2)$ 为两种股票的价格, $S_0^1=S_0^2=2$. 我们将考察一步模型 ($N=1$), 并设

$$\Delta S_1 = \begin{pmatrix} \Delta S_1^1 \\ \Delta S_1^2 \end{pmatrix}$$

为价格增量向量, 且 $\Delta S_1^i = S_1^i - S_0^i = S_1^i - 2, i = 1, 2.$

对应于定理 B*, 为使相应的无套利市场完全, 测度 $\mathsf{P}(\Delta S_1 \in \cdot)$ 的支集必须聚集在平面上的三个点上, 比如,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

并且所对应的 $\mathbb{R}^2$ 上的三个向量必定是仿射无关的. 正如上面所已经注意到, 这等价于向量 $\begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ b_1 - b_3 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_2 - a_3 \\ b_2 - b_3 \end{pmatrix}$ 线性无关.

例如, 设向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

中的每一个的概率为 $\frac{1}{3}$. 这些向量仿射无关, 并且鞅测度是使这些向量上的概率分别为 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$ 的测度.

第六章　随机金融模型中的定价理论. 离散时间

1. 在无套利市场上联系欧式对冲的计算

§1a. 风险及其降低方法

1. 被称为 "均值-方差分析" (参见第一章 §2b) 的 H. Markowitz 理论 ([332], 1952 年) 给出了一种为投资风险定价的途径和降低其 "非系统" 风险成分的方法; 其基础是在构成 (最优) 组合时的分散化观念.

在金融理论中还有别的最优化问题; 由于 "周围环境的不确定性" (正如 H. Markowitz 所考察的情形那样), 它可能有关随机最优化理论的问题. 这时, 立即应该注意的是, 金融论证会带来一系列对冲 (关于 "对冲" 的概念参见第五章 §1b) 的非传统、非标准的最优化问题, 这里的 "非标准性" 在于最优对冲作为控制必须确保满足某些概率为 1 的性质, 而不是比如在平均意义下, 后者是通常在随机最优化理论中所采用的. (关于均方判别准则参见后面的 §1d.)

把对冲看作证券组合的动态控制方法在以后将给以特别的关注. 重要的是要强调, 这种方法例如对于期权那样的 (衍生) 金融工具的定价来说是关键 (参见第 4 节和第 5 节). 但是对此还可说得更多; 也就是说, 在期权合约的定价上, 其重要性已被确认, 并且对冲方法论基础已经被制作成金融风险防范手段.

2. 我们记得, 我们已经在第五章 §1b 中遇到过对冲, 其中在最简单的一步模型中, 曾经既对用来达到所要求的目标的初始资本量给出公式, 也对最优 (对冲) 组合本身给出公式.

联系对冲来求出对应的定价公式, 也在多阶段问题中有很大意义, 其中投资者的目标在于以概率 1 (或者在更一般的讨论中, 只要求以正概率) 在以后的确定时刻 N, 使获得的资本不少于某个值, 而这个值一般来说是在这个时刻的给定的随机目标泛函.

类似的问题以最直接的方式联系着欧式期权的定价, 而这种联系基于 F. Black 和 M. Scholes [44] 以及 R. Merton [345] ①的简明有效的卓越思想: (在完全的无套利市场中)

> 期权价格的动态过程必定可通过在对应的投资问题中的最优对冲策略的动态资本来复制.

在美式期权情形下, 除了对冲作为期权支付方面的 "控制" 以外, 还出现新的 "最优化" 元素.

其实, 购得欧式期权的购买者是被动交易者: 他不进行任何金融活动, 而只是等待期权执行时刻 N. 而对于美式期权来说, 购买者扮演的是主动交易者的角色, 因为根据合约条件, 他可自己 (基于市场上价格的当前值) 来选取期权的执行时刻, 当然,

① "以及 R. Merton [345]" 只有英文版中有. —— 译者注

这要在事先签定的合约所限制的框架下.

这种期权的出售者自然会在构成相应的对冲组合时, 必须考虑购买者在不同的时刻把期权提交执行的选择机会. 这时很明显, 买卖双方利益的对立导致一个带极小极大特征的最优化问题.

这节 (§§1a–1d) 论证欧式对冲. 这个术语是类比欧式期权而提出的, 并且强调它涉及的偿付索求对冲是在以后的固定时刻. 美式对冲在下节中考察 (对此, 参见特别是 §2c 中的相应定义).

3. 正如上面所注意到, 在美式期权中, 购买者的控制归结为合约终止运作的时刻的选择, 或者如同通常所说, 归结为停时的选择.

这时, 如果例如, $f = (f_0, f_1, \cdots, f_N)$ 是支付函数 $f_i = f_i(\omega)$ $(i = 0, 1, \cdots, N)$ 的组, 而购买者选择停时 $\tau = \tau(\omega)$, 那么他得到的量为 $f_\tau = f_{\tau(\omega)}(\omega)$.

我们把 f_τ 表示为下列形式:

$$f_\tau = f_0 + \sum_{k=1}^{\tau} \Delta f_k = f_0 + \sum_{k=1}^{N} I(k \leqslant \tau) \Delta f_k. \tag{1}$$

我们察觉, 事件 $\{k \leqslant \tau\} \in \mathscr{F}_{k-1}$. 因此, (1) 可改写为

$$f_\tau = f_0 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta f_k, \tag{2}$$

其中 $\alpha_k = I(k \leqslant \tau)$ 是 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测随机变量.

换一种说法, 美式期权的具体条件对于购买者来说, 是通过形式刚好为 $\alpha_k = I(k \leqslant \tau)$ 的可料控制 $\alpha = (\alpha_k)_{k \leqslant N}$ 的选择来解决的.

从原理上来说, 容易想象, 购买者也可以通过选取别的 (可料) 控制函数 $\alpha = (\alpha_k)_{k \leqslant N}$ 来作为解决问题的具体条件. 这种 (购买者) 可控期权的例子比如有 "护照期权 (Passport option)" (参见 [6]), 其中支付函数有下列形式:

$$f_N(\alpha) = \left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta S_k \right]^+, \tag{3}$$

其中 $|\alpha_k| \leqslant 1$, 而 $S = (S_k)_{k \leqslant N}$ 为股票价格值.

于是变得很明显, 期权的出售者必定要形成自己的 (对冲) 组合 $\pi = \pi(\alpha(\omega), \omega)$, 使得对于任何对出售者的 (容许) 控制 $\alpha = \alpha(\omega)$ 来说, 在终端时刻 N 的资本 $X_N^{\pi(\alpha(\omega),\omega)}$ 将 (P-a.s.) 不小于 $f_N(\alpha(\omega))$.

4. 在完全市场的情形下, (投资者、期权出售者的) 对冲和比如通过购买期权可实现的控制是两个基本 "最优化" 成分; 在有关衍生金融工具的定价中, 通常涉及的也是这两个基本成分.

在不完全市场的情形下, 除这两个成分外, 还要加上第三个成分, 它由"大自然作用"来确定.

这里的实质在于: 在无套利完全市场上, 只存在一个鞅测度. 然而, 在无套利不完全市场上, "大自然"容许有整个无套利测度的谱族, 而这就是说, 容许有无套利金融市场的各种实现形式.

由这些测度和实现怎样具体"作用"于比如某个期权, 无论是购买者还是出售者, 都不清楚. 因此, 如果没有某种补充设想, 无论是出售者还是购买者的策略 (对冲, 停时选择等等), 都要考虑可能的"最佳大自然作用".

在以后引入的考察中, 形式上, 这将表达为许多公式中都要出现按所有鞅测度类的 sup, 而这些鞅测度可看作"大自然"的状况.

§1b. 对冲价格的基本公式. I. 完全市场

1. 我们将考察 $N<\infty, d<\infty$ 时的无套利完全 (B,S)-市场 (在第五章 §2b 中所采用的模式下). 根据第二基本定理推广版本的断言 (f) (第五章 §2e), 这样的按时间离散的市场也按相变量离散, 从而所有可考察的 $\mathscr{F}_N$-可测随机变量取有限个值, 因为 σ-代数 $\mathscr{F}_N$ 由不多于 $(d+1)^N$ 个原子所构成. 从而, 在所考察的情形下, 进行积分时不会发生任何问题, 而完全性和完善性概念等价.

定义. 下列量称为 ($\mathscr{F}_N$-可测偿付索求 f_N) 的欧式完善对冲价格 (比较第五章 §1b)

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})=\inf\{x\colon \exists\pi, \text{满足 } X_0^\pi=x,\ X_N^\pi=f_N\ (\mathsf{P}\text{-a.s.})\}. \tag{1}$$

由于按假定, 所考察的市场是无套利完全市场, 故

1) 存在等价于测度 P 的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得序列 $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\leqslant N}$ 是鞅 ("第一基本定理");

2) 这个测度是唯一的, 并且每个偿付索求 f_N 可复制, 即, 可求得 ("完善") 对冲 π, 使得 $X_N^\pi=f_N$ ("第二基本定理").

由此得到, 如果 π 是完善 (x,f_N)-对冲, 即 $X_0^\pi=x$ 以及 $X_N^\pi=f_N$ (P-a.s.), 故 (参见第五章 §1a 中的 (18))

$$\frac{f_N}{B_N}=\frac{X_N^\pi}{B_N}=\frac{x}{B_0}+\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{2}$$

而这就是说,

$$\widetilde{\mathsf{E}}\frac{f_N}{B_N}=\frac{x_0}{B_0},$$

即

$$x=B_0\widetilde{\mathsf{E}}\frac{f_N}{B_N}. \tag{3}$$

我们察觉, (3) 的右端不依赖所考察的 (x, f_N)-对冲 π 的结构. 换句话说, 如果 π' 是另一个对冲, 那么初始价格 x 和 x' 重合.

因此, 下列定理成立:

定理 1 (“在完全市场上的完善欧式对冲价格的基本公式”). 在无套利完全市场上, 完善对冲价格 $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$ 由下列公式确定:

$$\boxed{\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) = B_0 \widetilde{\mathsf{E}} \frac{f_N}{B_N}} \tag{4}$$

2. 对冲的论证不仅要求价格值 $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$ 的定义, 并且也要求完善对冲组合的描述.

求出这种组合的标准方法如下 (比较第五章 §4a).

我们构建鞅 $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})_{n \leqslant N}$, 其中 $M_n = \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\right)$. 由于所考察的市场是完全市场, 故由第二基本定理 (或者由第五章 §4b 中的引理), 对于 M 有下列 “$\frac{S}{B}$-表示式” 成立:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{5}$$

其中 γ_k 为 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测.

令 $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, 其中 γ^* 取作 (5) 中的 γ, $\beta_n^* = M_n - \frac{\gamma_n S_n}{B_n}$. 不难验证, 这个组合是自融资的 (不过要参见第五章 §4b 中的引理证明). 同时, 由鞅的构造,

$$\frac{X_0^{\pi^*}}{B_0} = M_0, \tag{6}$$

以及

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n}\right) = \gamma_n^* \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) = \Delta M_n.$$

因此, 对所有满足 $0 \leqslant n \leqslant N$ 的 n,

$$\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n} = M_n = \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\right), \tag{7}$$

特别是

$$X_N^{\pi^*} = f_N \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s. 和 } \mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

这样, 借助于 “$\frac{S}{B}$-表示式” 构建的组合 π^* 是 (对于 f_N) 的完善对冲.

我们把所得到的结果概述为下列命题.

定理 2 (“完善对冲及其资本的基本公式”). 在无套利完全市场上存在初值为

$$X_0^{\pi^*} = \mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) \quad \left(= B_0 \widetilde{\mathsf{E}} \frac{f_N}{B_N}\right)$$

的自融资完善对冲 $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, 实现 f_N 的完善复制:

$$X_N^{\pi^*} = f_N \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

资本 $X_n^{\pi^*}$ 的动态变化由下列公式确定:

$$X_n^{\pi^*} = B_n \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N}\,\Big|\, \mathscr{F}\right), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N,$$

其中的成分 $\gamma^* = (\gamma_n^*)$ 由下列 "$\dfrac{S}{B}$-表示式" 导出:

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N}\,\Big|\, \mathscr{F}\right) = \widetilde{\mathsf{E}}\frac{f_N}{B_N} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^* \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \qquad 1 \leqslant n \leqslant N,$$

而成分 $\beta^* = (\beta_n^*)$ 由下列条件导出:

$$X_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n.$$

3. 我们在某种程度上更一般的模式下来考察对冲价格问题, 其中假定给定的不是一个偿付函数 f_N, 而是一系列偿付函数 $f_0, f_1, \cdots, f_N$, 这里 f_i 为 $\mathscr{F}_i$-可测, $0 \leqslant i \leqslant N$.

设 $\tau = \tau(\omega)$ 为某个固定的在 $\{0, 1, \cdots, N\}$ 中取值的 Markov 时刻, f_τ 是按 τ 和 $f_0, f_1, \cdots, f_N$ 构建的最终 (有限) 偿付函数.

定理 3. 如果无套利 (B, S)-市场是 N-完全的, 那么它将也是 τ-完全的, 即可求得自融资组合 π 和初始资本 x 使得 $X_0^\pi = x$ 和 $X_\tau^\pi = f_\tau$ (P-a.s.).

这一定理的证明很简单: 我们形成新的偿付索求 $f_N^* = f_{\tau \wedge N}$; 对于偿付函数 f_N^* 的完善对冲 π^* 也将是对于原来的偿付函数 f_τ 的完善对冲.

这时, 相应的对冲价格

$$\mathbb{C}(f_\tau; \mathsf{P}) = \min\{x \colon \exists \pi, \text{使得} X_0^\pi = x, X_\tau^\pi = f_\tau \ (\mathsf{P}\text{-a.s.})\}$$

由下列公式确定:

$$\mathbb{C}(f_\tau; \mathsf{P}) = B_0 \widetilde{\mathsf{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau}. \tag{8}$$

4. 关于 "基本公式" (4) 会产生如下的问题.

设所考察的是无套利完全 $(\widetilde{B}, S)$-市场, 而测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是对于规范价格 $\dfrac{S}{\widetilde{B}}$ 的鞅测度. 现在, 有益的是把这个性质改写为下列等价形式: 向量过程 $\left(\dfrac{\widetilde{B}}{\widetilde{B}}, \dfrac{S^1}{\widetilde{B}}, \cdots, \dfrac{S^d}{\widetilde{B}}\right)$, 即 $\left(1, \dfrac{S^1}{\widetilde{B}}, \cdots, \dfrac{S^d}{\widetilde{B}}\right)$, 是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅.

现在假定, 又有另一个 (正) 折现过程 $\overline{B} = (\overline{B}_n)_{n\leqslant N}$ 和等价于原来测度 P 的测度 $\overline{\mathsf{P}}$, 使得规范过程

$$\left(\frac{\widetilde{B}}{\overline{B}}, \frac{S^1}{\overline{B}}, \cdots, \frac{S^d}{\overline{B}}\right)$$

是 $\overline{\mathsf{P}}$-鞅.

很自然, 我们当然期待公式 (1) 中所确定的价格值 $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ 不依赖于对应的对 $(\widetilde{B},\widetilde{P})$ 和 $(\overline{B},\overline{P})$ 的选择.

正是这样的联系, 我们现在对下述问题感兴趣: 为什么实际上下列等式成立:

$$\widetilde{B}_0\widetilde{\mathsf{E}}\frac{f_N}{\widetilde{B}_N} = \overline{B}_0\overline{\mathsf{E}}\frac{f_N}{\overline{B}_N}. \tag{9}$$

甚至下列更一般的事实也成立: "价格过程"

$$\left(\widetilde{B}_n\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\widetilde{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right)\right)_{n\leqslant N} \quad 与 \quad \left(\overline{B}_n\overline{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\overline{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right)\right)_{n\leqslant N} \tag{10}$$

重合.

为此我们假定 $\overline{\mathsf{E}}\dfrac{\widetilde{B}_N}{\overline{B}_N} = 1$ (这不影响讨论的一般性). 于是可引进 ($\mathscr{F}_N$ 上的) 新测度 $\widehat{\mathsf{P}}$, 令

$$d\widehat{\mathsf{P}} = \widetilde{Z}_N d\widetilde{\mathsf{P}},$$

其中 $\widehat{Z}_n = \overline{Z}_n\dfrac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}$, $\overline{Z}_n = \dfrac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}$, $\overline{\mathsf{P}}_n = (\overline{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n)$ 以及 $\widetilde{\mathsf{P}}_n = (\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n)$, $n \leqslant N$.

测度 $\widehat{\mathsf{P}}$ 是概率测度, 并且按 "Bayes 公式" (第五章 §3a 中的引理),

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\widetilde{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right) &= \frac{1}{\widehat{Z}_n}\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\widetilde{B}_N}\widehat{Z}_N\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right)\\
&= \frac{1}{\overline{Z}_n\cdot\frac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}}\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\overline{B}_N}\cdot\frac{\overline{B}_N}{\widetilde{B}_N}\cdot\widehat{Z}_N\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right)\\
&= \frac{1}{\overline{Z}_n\cdot\frac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}}\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\overline{B}_N}\cdot\overline{Z}_N\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right) = \frac{1}{\frac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}}\overline{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\overline{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right) = \frac{S_n}{\widetilde{B}_n},
\end{aligned}$$

因为 $\overline{\mathsf{E}}\left(\dfrac{S_N}{\overline{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right) = \dfrac{S_n}{\overline{B}_n}$.

因此, 序列 $\left(\dfrac{S_n}{\widetilde{B}_n}\right)_{n\leqslant N}$ 不仅按测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是鞅, 并且也按测度 $\widehat{\mathsf{P}}$ 是鞅.

但是如果所考察的市场是完全市场, 那么鞅测度必定是唯一的, 而这意味着, $\widehat{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{P}}$, 即 $\widehat{Z}_n = 1$, $n \leqslant N$, 从而由 $\widehat{Z}_n$ 的定义, 导得等式

$$\overline{Z}_n = \frac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n} = \frac{\overline{B}_n}{\widetilde{B}_n}, \qquad n \leqslant N, \tag{11}$$

由此导出

$$\overline{B}_n \overline{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\overline{B}_n}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right) = \frac{\overline{B}_n}{\overline{Z}_n}\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\overline{B}_N}\overline{Z}_N\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right) = \widetilde{B}_n \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\widetilde{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right).$$

这样, 公式 (9) 和 (10) 得证, 因而, 价格值 $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ 在完全市场上实际上不依赖于折现过程 $(\widetilde{B},\overline{B},\cdots)$ 的选择. 在第七章 §1b 中, 将对于连续时间情形 (更详尽地) 考察折现程序. 这里我们只注意, 在许多情形下, 正确选择折现过程可大大降低求出价格 $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ 和相应的完善对冲时的解析困难. 关于这方面例如参见第八章 §5d 和 §2c 中的有关 "俄国期权" 定价的叙述.

5. 这样, 在无套利完全市场上, 求完善对冲价格值的问题由公式 (4) 彻底解决, 其中只要取过程 B 作为折现过程. 这时, 如果 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是相应的鞅测度 (即, 它使得 $\dfrac{S}{B}$ 为鞅), 那么向新的折现过程 $\overline{B}$ 的转换也改变了鞅测度: 它变为与 (11) 相应的、由公式

$$d\overline{\mathsf{P}} = \frac{\overline{B}_N}{B_N}d\widetilde{\mathsf{P}} \tag{12}$$

所确定的测度 $\overline{\mathsf{P}}$.

在不完全市场情形下, 存在多个鞅测度, 所谓对冲价格问题就已经变得相当不简单, 因为对于两个不同的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_1$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}_2$, 以至对于不同的无套利状态, 表示式 $\widetilde{B}_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_1}\dfrac{f_N}{\widetilde{B}_N}$ 和 $\widetilde{B}_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_2}\dfrac{f_N}{\widetilde{B}_N}$ 一般来说是不重合的 (参见后面的 §1c).

6. 作为上面引入的联系各种折现过程和关于不同测度的条件数学期望换算的讨论的说明, 我们考察下列例子.

设 f_N 为按美元 (USD) 计算的偿付索求的价格. 如果考察无套利完全 (美元计算的) 市场, 那么相应的完善对冲价格将等于 $\widetilde{B}_0\widetilde{\mathsf{E}}\dfrac{f_N}{\widetilde{B}_N}$, 其中 $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_n)_{n\leqslant N}$ 为美元银行账户.

现在考察用德国马克 (DEM) 来确定价格的市场. 于是用马克计算的量 f_N (USD) 将等于 $f_N S_N$ (DEM), 其中

$$S_N = \left(\frac{\text{DEM}}{\text{USD}}\right)_N$$

为时刻 N 的汇率随机变量.

如果 $\overline{B} = (\overline{B}_n)_{n\leqslant N}$ 是马克银行账户, 而相应的市场也是无套利完全市场, 那么偿付索求的价格 $f_N S_N$ 将 (按马克) 等于

$$\overline{B}_0\overline{\mathsf{E}}\frac{S_N f_N}{\overline{B}_N},$$

再把它转换为美元, 就变为

$$S_0^{-1}\overline{B}_0\overline{\mathsf{E}}\frac{S_N f_N}{\overline{B}_N}.$$

我们阐明, 应该满足怎样的条件, 才能使得美元价格与价格 $\widetilde{B}_0\widetilde{\mathsf{E}}\dfrac{f_N}{\widetilde{B}_N}$ 有自然期待的重合, 或者在更一般的形式下, 有等式

$$S_n^{-1}\overline{B}_n\overline{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N f_N}{\overline{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right)=\widetilde{B}_n\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\widetilde{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right). \tag{13}$$

DEM-市场考察的汇率 $S=(S_n)_{n\leqslant N}$ 被假定是无套利的, 其中 $S_n=\left(\dfrac{\text{DEM}}{\text{USD}}\right)_n$, 它必定使得 $\left(\dfrac{S_n}{\overline{B}_n}\right)_{n\leqslant N}$ 是 $\overline{\mathsf{P}}$-鞅. 因此, $\overline{\mathsf{E}}\left(\dfrac{S_N}{\overline{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right)=\dfrac{S_n}{\overline{B}_n}$, 并且如果有 $Z_n=\dfrac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}$, 那么按照 "Bayes 公式",

$$\frac{S_n}{\overline{B}_n}=\frac{1}{Z_n}\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\overline{B}_N}Z_N\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right)\quad(\widetilde{\mathsf{P}}\text{-a.s.}). \tag{14}$$

由此得到,

$$\frac{S_n}{\widetilde{B}_n}\cdot\left(\frac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}Z_n\right)=\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\widetilde{B}_N}\cdot\frac{\widetilde{B}_N}{\overline{B}_N}\cdot Z_N\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right). \tag{15}$$

如果 USD-市场也是无套利的, 那么 $\left(\dfrac{S_n}{\widetilde{B}_n}\right)_{n\leqslant N}$ 是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅, 而这意味着

$$\frac{S_n}{\widetilde{B}_n}=\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\widetilde{B}_N}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right). \tag{16}$$

由 (15) 和 (16) 以及 USD-市场的完全性假定, 即测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的唯一性假定, 这就得到

$$\frac{\widetilde{B}_N}{\overline{B}_N}\cdot\frac{d\overline{\mathsf{P}}}{d\widetilde{\mathsf{P}}}=1 \tag{17}$$

(比较 (12)) 以及对于所有 $n\leqslant N$, 有

$$\frac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}\cdot\frac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}=1. \tag{18}$$

因为带有 $Z_n=\dfrac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}$ 的 $Z=(Z_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})_{n\leqslant N}$ 是鞅, 故 (18) 导出过程 $\left(\dfrac{\overline{B}_n}{\widetilde{B}_n}\right)_{n\leqslant N}$ 也必定是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅. 这一确保按美元计算的偿付索求的价格 f_N 在 USD-市场和 DEM-市场上重合的鞅性质也可不引入上述计算来导出, 而只要把 $\overline{B}=(\overline{B}_n)_{n\leqslant N}$ 理解为带有银行账户 $\widetilde{B}=(\widetilde{B}_n)_{n\leqslant N}$ 的美元市场上的基本证券之一.

§1c. 对冲价格的基本公式. II. 不完全市场

1. 正如在上节中所确立的, 在无套利完全市场中, 完善对冲价格 (价值) $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ 由下列公式确定:

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})=B_0\widetilde{\mathsf{E}}\frac{f_N}{B_N}, \tag{1}$$

其中 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 为按 (唯一的) 鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的均值, 而 $\dfrac{S}{B}$ 关于 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为鞅.

关于对冲价值的类似问题自然也可对不完全市场提出. 然而, 由于在这样的市场上, 对于自融资组合的完善对冲已经可能不存在, 故就要改变对冲价格 (价值) 的定义, 以及也要略为扩充我们在完全市场情形下运作的自融资策略类.

我们记得, 对于完全市场的自融资策略 $\pi = (\beta, \gamma)$ 的资本 X^π 实质上可用两种方法来定义: 或者定义为

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n, \tag{2}$$

或者定义为

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k), \tag{3}$$

详情参见 §1a.

在所定义的关系式中, 形为 (3) 的资本表示式更受重视, 因为它直观地说明了资本形成的动态变化: X_0^π 是在 X_n^π 中初始资本的贡献, 而资本增量为

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n. \tag{4}$$

现在为了考察不完全市场上的对冲问题, 有意义的是除了组合 $\pi = (\beta, \gamma)$ 以外, 还要引入消费过程 $C = (C_n)_{n \geqslant 0}$, 它是有 $\mathscr{F}_n$-可测成分 C_n 和 $C_0 = 0$ 的非负不减过程.

这种情形实质上已经在第五章 §1a 中考察过, 并称之为带消费的情形, 那里取代 (4) 的是假定资本 $X^{\pi,C}$ 的增长动态变化; 它与组合 π 和消费 C 的对应关系式为:

$$\Delta X_n^{\pi,C} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - \Delta C_n, \tag{5}$$

这里 $\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$ 是组合值与 "市场" 变化 ΔB_n 和 ΔS_n 所确定的贡献[①], 而 ΔC_n 刻画了资本在消费上的资本 "流" (也包括例如与组合改变本身相联系的所需费用).

这样一来, 我们现在假定, 策略 (π, C) 对应的资本 $X^{\pi,C}$ (类似于 (3)) 用下列公式来确定:

$$X_n^{\pi,C} = X_0^{\pi,C} + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k) - C_n, \quad n \geqslant 1, \tag{6}$$

它等价于

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\pi,n}}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) - \frac{\Delta C_n}{B_{n-1}}, \quad n \geqslant 1.$$

注 1. 如果令 $\beta_k' = \beta - \dfrac{\Delta C_k}{\Delta B_k}$, 那么由 (6) 求得

$$X_n^{\pi,C} = X_0^{\pi,C} + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k' \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k).$$

---

① 原版和英文版在这里都遗漏 β_n. —— 译者注

这个公式与 (3) 十分相像. 然而, 如果在 (3) 中 β_k 为 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测, 那么 β'_k 为 $\mathscr{F}_k$-可测.

注 2. 在不完全市场上, 完善对冲, 即对于某个 $\pi=(\beta,\gamma)$, 资本 $X_N^\pi=f_N$ (P-a.s.) 的对冲, 一般来说不可能. 同时, 这也不排除当所考察的容许策略类扩充时, 可能达到终端资本复制 (P-a.s.) 偿付索求 f_N. 正如在下面导入的定理证明中变得明显, 引入 "消费" 允许求得策略 (π,C) 使得 $X_N^{\pi,C}=f_N$ (P-a.s.). 这也是除了组合 π 还要引入消费 C 的 "技巧" 理由之一. 但是另一方面, 带 "消费" 的策略类的引入同时还要附加类型为 $\Delta C_n \geqslant c>0$ 的限制, 它有明显的经济含义.

2. 定义. 我们称下列量为 ($\mathscr{F}_N$-可测的偿付索求 f_N 的) 欧式对冲上价格:

$$\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P})=\inf\{x\colon \exists(\pi,C),\ \text{使得}\ X_0^{\pi,C}=x,\ X_C^{\pi,C}\geqslant f_N\ (\mathsf{P}\text{-a.s.})\}. \tag{7}$$

注 3. 除了对冲上价格还可以引入对冲下价格 (参见 §1b 中的定义). 以后将只考察上价格, 为简单起见, 也经常称它为价格.

设 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 为所有等价于测度 P 的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的全体. 假定 $\mathscr{P}(\mathsf{P})\neq\varnothing$.

在无套利不完全市场上的定价理论的中心结果在下列命题中给出, 它推广了公式 (1).

定理 1 ("不完全市场上的欧式对冲价格的基本公式"). 设 f_N 为非负有界 $\mathscr{F}_N$-可测函数. 在无套利不完全市场上的上价格 $\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P})$ 由下列公式确定:

$$\boxed{\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P})=\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} B_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_N}{B_N}} \tag{8}$$

其中 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}$ 为按测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的均值.

这个结果的特殊情形我们已经在前面对于一步模型的情形建立 (第五章 §1c 中的定理 1; 也参见 [93]).

公式 (8) 的证明中的关键点也称为 "可选分解" (参见后面的 §2d), 其证明在技巧方面相当复杂. 证明 "可选分解" 并得到公式 (8) 的第一批著作是 N. El Karoui 和 M. Quenez 的著作 [136] 和 D. O. Kramkov 的著作 [281]; 有关推广和各种证明也参见 [99], [163], [164].

3. 定理证明. 设 (π,C) 为 (x,f_N)-对冲, 即 $X_0^{\pi,C}=x$, 且 $X_N^{\pi,C}\geqslant f_N$ (P-a.s.).

于是 (比较 §1b 中的 (2))

$$\begin{aligned} 0\leqslant\frac{f_N}{B_N}\leqslant\frac{X_N^{\pi,C}}{B_N}&=\frac{x}{B_0}+\sum_{k=1}^N\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right)-\sum_{k=1}^N\frac{\Delta C_k}{B_{k-1}}\\ &\leqslant\frac{x}{B_0}+\sum_{k=1}^N\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

而这就是说, 对于任何测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$,

$$B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{E}}} \frac{f_N}{B_N} \leqslant x, \tag{10}$$

因为由第二章 §1c 中的引理得到 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) = 0$, 而由 (9) 导出不等式

$$\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) \geqslant -\frac{x}{B_0}.$$

由此得到

$$\sup_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{P}} \frac{f_N}{B_N} \leqslant \mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}). \tag{11}$$

为了证明相反方向的不等式, 令

$$Y_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right), \tag{12}$$

其中本性上确界 Y_n 根据定义为 $\mathscr{F}_n$-可测随机变量, 它一方面对于任何测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 满足不等式

$$Y_n \geqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right) \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \tag{13}$$

而另一方面具有这样的性质 (“极小性”): 如果有另外一个量 $\overline{Y}_n$ 也大于 (13) 的右端, 那么 $Y_n \leqslant \overline{Y}_n$ (P-a.s.).

正如在 §2b 中所指出, 序列 $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)_{n \leqslant N}$ 是关于任何 (!) 测度 $\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 的上鞅, 即

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leqslant Y_n \quad (\mathsf{Q}\text{-a.s.}). \tag{14}$$

我们记得, 由经典的 Doob 分解 (第二章 §1b) 得到, 对于每个具体的测度 Q 可求得鞅 $M^{\mathsf{Q}} = (M_n^{\mathsf{Q}}, \mathscr{F}_n, \mathsf{Q})_{0 \leqslant n \leqslant N}$, $M_0^{\mathsf{Q}} = 0$, 及可料不减过程 $A^{\mathsf{Q}} = (A_n^{\mathsf{Q}}, \mathscr{F}_{n-1}, \mathsf{Q})_{1 \leqslant n \leqslant N}$, $A_0^{\mathsf{Q}} = 0$, 使得

$$Y_n = Y_0 + M_n^{\mathsf{Q}} - A_n^{\mathsf{Q}}. \tag{15}$$

尤其引人注目的是这样的事实: 如果 $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)$ 是关于族 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的任何测度 Q 是上鞅, 那么对于 Y 的下列普适 (即, 不依赖于 Q 的) 分解成立:

$$Y_n = Y_0 + \overline{M}_n - \overline{C}_n, \tag{16}$$

其中 $\overline{M} = (\overline{M}_n, \mathscr{F}_n)$ 是关于任何测度 $\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 为鞅, 而 $\overline{C} = (\overline{C}_n, \mathscr{F}_n)$ 是某个有 $\overline{C}_0 = 0$ 的不减过程.

我们强调, 如果在 Doob 分解 (15) 中, 过程 A^{Q} 是可料的 (即 A_n^{Q} 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测), 那么在 (16) 中过程 $\overline{C} = (\overline{C}_n, \mathscr{F}_n)$ 仅仅是可选的 (即 $\overline{C}_n$ 为 $\mathscr{F}_n$-可测).

正是联系着这一状况, 分解 (16) 称为可选分解.

应用于 (12) 中定义的上鞅 $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)$, 可使鞅 $\overline{M} = (\overline{M}_n, \mathscr{F}_n)$ 的结构具体化为

$$\overline{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma}_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{17}$$

其中 $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_n, \mathscr{F}_{n-1})$ 为某个可料过程. (我们强调, 这个事实远非平凡, 其证明类似于可选分解的证明; 参见 §2d.)

根据 (16) 和 (17) 中所定义的过程 $\overline{\gamma}$, $\overline{C}$ 和 Y_0, 我们现在构建组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 和消费过程 $\widetilde{C}$, 使得对应的资本 $X^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ 满足 $X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_0 \sup\limits_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \dfrac{f_N}{B_N}$ 以及 $X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_N$. 由此当然就得到

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) \leqslant X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_0 \sup_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N},$$

并且它与 (11) 一起导致等式 (8).

所要求的组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 和消费过程 $\widetilde{C}$, 我们以下列方式定义:

$$\widetilde{\gamma}_n = \overline{\gamma}_n, \qquad \widetilde{\beta}_n = Y_n - \widetilde{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}, \tag{18}$$

$$\widetilde{C}_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} \Delta \overline{C}_k, \tag{19}$$

其中 $\overline{\gamma}$ 和 $\overline{C}$ 取自上鞅的可选分解.

对于这样定义的 $\widetilde{\pi}$ 和 $\widetilde{C}$, 其初始资本

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_0 B_0 + \widetilde{\gamma}_0 S_0 = Y_0 B_0.$$

在带 "消费" 的模式情形下, 我们认为 (参见第五章 §1a 中的第 4 点), 资本增量通过下列公式来实现:

$$\Delta X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n \Delta B_n + \widetilde{\gamma}_n \Delta S_n - \Delta \widetilde{C}_n, \tag{20}$$

正如我们已经注意到, 由此得到 (也可与第五章 §1a 中的 (27) 相比较)

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n}\right) = \widetilde{\gamma}_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) - \frac{\Delta \widetilde{C}_n}{B_{n-1}}. \tag{21}$$

由 (16)–(19),

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n}\right) = \Delta Y_n, \tag{22}$$

以及由于 $\dfrac{X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_0} = Y_0$, 故

$$\frac{X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_N} = Y_N = \frac{f_N}{B_N}. \tag{23}$$

这样一来, $X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_N$, 因而, 所构建的带有初始资本 $(\widetilde{\pi},\widetilde{C})$ 的策略

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_0 Y_0 = B_0 \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N}$$

用来刚好实现完善对冲:

$$X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_N.$$

由此得到

$$\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P}) \leqslant B_0 \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N}.$$

它与 (11) 一起就 (在具有 "可选分解" 的假定下) 证明了所要求的公式 (8).

定理 1 得证, 并且类似这个证明, 还可建立下列命题 (比较 §1b 中的定理 2).

定理 2 ("对于完善对冲及其资本和消费的基本公式"). 在无套利市场上存在自融资对冲 $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ 和消费 C^*, 使得对应的资本 $X_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n$ 按照对应的 "平衡条件" $\Delta X_n^{\pi^*} = \beta_n^* \Delta B_n + \gamma_n^* \Delta S_n - \Delta C_n^*$ 来演变, 这时,

$$X_0^{\pi^*} = \mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P}) \quad \left(= \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N} \right),$$

以及

$$X_N^{\pi^*} = f_N \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

资本 $X_n^{\pi^*}$ 的动态变化由下列公式确定:

$$X_n^{\pi^*} = B_n \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right),$$

成分 $\gamma^* = (\gamma_n^*)$ 和 $C^* = (C_n^*)$ 由下列可选分解得到:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N} + \sum_{k=1}^n \gamma_k^* \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta C_k^*}{B_{k-1}},$$

而成分 $\beta^* = (\beta_n^*)$ 由条件 $X_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n$ 得到.

§1d. 关于均方判别准则下的对冲价格计算

1. 设 $f_N = f_N(\omega)$ 为某个 $\mathscr{F}_N$-可测偿付索求. 在无套利完全市场上, 交易者有机会以某个初始资本 x 和某个策略 π 在下列含义下精确复制 f_N: 以概率 1 满足 $X_N^{\pi}(x) = f_N$.

在不完全 (无套利或套利) 市场情形下, 局面陡然复杂起来, 期待 f_N 的精确复制已经不再发生.

在 §1c 中考察了在不完全市场上怎样计算对冲价格 $\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P})$ 的问题, 其中假定对冲策略 (π, C) 满足 $X_N^{\pi,C} \geqslant f_N$ (P-a.s.).

在这一节中, 最优对冲将理解为另一种含义, 即, 尽可能以 "最大的精确度" 复制 f_N (没有向 "消费" C 的转化).

关于测度选择的复制精度问题是在一定意义下足够满意的规定, 并且以 "既定目标"、对应的最优化问题的获得精确解的可能程度等等来确定.

以后将以均方偏差

$$R_N(\pi, x) = \mathsf{E}[X_N^\pi(x) - f_N]^2 \tag{1}$$

来度量复制质量, 它用来在一系列情形下求得 "最优的" x^* 和 π^*, 达到 $\mathsf{E}[X_N^\pi(x) - f_N]^2$ 的最小值

$$\inf_{(\pi,x)} R_N(\pi; x) = R_N(\pi^*; x^*). \tag{2}$$

2. 我们将假定, $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}, \mathsf{P})$ 为给定的渗透概率空间, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$. 设 $S = (S_n^1, \cdots, S_n^d)_{n\leqslant N}$ 为 d-维资产的价格序列, 且 $\mathsf{E}f_N^2 < \infty$.

若假定价格序列关于原来的测度 P 为鞅, 且平方可积, 则在满足 $\mathsf{E}(X_N^\pi(x))^2 < \infty$ 的策略类中, 最优化问题 (2) 可以有简单的讨论. (我们强调, 这里没有假定鞅测度的唯一性, 也就是说, 没有假定市场的完全性.)

设 $\pi = (\gamma^1, \cdots, \gamma^d)$, 其中 $\gamma^i = (\gamma_n^i)_{n\leqslant N}$, 以及

$$X_n^\pi(x) = x + \sum_{k=1}^n (\gamma_k, \Delta S_k) = x + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^d \gamma_k^i \Delta S_k^i \right) \tag{3}$$

为带可料的 γ^i $(i = 1, \cdots, d)$ 的策略 π 的资本.

由于序列 $(X_n^\pi(x))_{n\leqslant N}$ 是鞅, 故

$$\mathsf{E}X_N^\pi(x) = x. \tag{4}$$

如果令 $\xi = X_N^\pi(x) - f_N$, 那么由显然的等式 $\mathsf{E}\xi^2 = (\mathsf{E}\xi)^2 + \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2$, 我们求得

$$R_N(\pi; x) = [\mathsf{E}(f_N - x)]^2 + \mathsf{E}[(X_N^\pi(x) - x) - (f_N - \mathsf{E}f_N)]^2. \tag{5}$$

下面将指出, 对于每个有 $\mathsf{E}(X_N^\pi(x))^2 < \infty$ 的点对 (π, x), 可求得这样的点对 (π^*, x), 使得 $R_N(\pi; x) \geqslant R_N(\pi^*; x)$, 并且 π^* 具有这样的性质: $X_N^{\pi^*}(x) - x$ 独立于 x. 由此和 (5) 将导出 $\inf\limits_x \left[\inf\limits_\pi R_N(\pi; x) \right]$ 达到其值

$$x^* = \mathsf{E}f_N. \tag{6}$$

对于 $i = 1, \cdots, d$, 令 (认为 $0/0 = 0$)

$$\gamma_n^{*i} = \frac{\mathsf{E}(f_N \Delta S_n^i \mid \mathscr{F}_{n-1})}{\mathsf{E}((\Delta S_n^i)^2 \mid \mathscr{F}_{n-1})}, \tag{7}$$

并如下构成鞅 $L^* = (L_n^*)_{n\leqslant N}$:

$$L_n^* = \mathsf{E}\left[f_N - \sum_{k=1}^{N}(\gamma_k^*, \Delta S_k)\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right] - x. \tag{8}$$

显然, f_N 有下列分解

$$f_N = x + \sum_{k=1}^{N}(\gamma_k^*, \Delta S_k) + L_N^*. \tag{9}$$

运用定义 (7), 可直接断定

$$\mathsf{E}(\Delta L_n^* \cdot (\gamma_n^*, \Delta S_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = 0. \tag{10}$$

我们察觉, 这个性质等价于两个平方可积鞅 $(L_n^*)_{n\leqslant N}$ 和 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(\gamma_n^*, \Delta S_k)\right)_{n\leqslant N}$ 在下列含义下 "正交": 它们的乘积也是鞅. 在这方面, 注意到下列这点是有益的: 在 "一般鞅论" 中, 分解 (9) 称为 "Kunita-Watanabe 分解".

由 (9) 和 (10) 我们求得, 对于任何点对 (π, x), 有

$$\begin{aligned}
R_N(\pi; x) &= \mathsf{E}\left[f_N - \left(x + \sum_{k=1}^{N}(\gamma_k, \Delta S_k)\right)\right]^2 \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N}(\gamma_k^* - \gamma_k, \Delta S_k) + L_N^*\right]^2 \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N}(\gamma_k^* - \gamma_k, \Delta S_k)\right]^2 + \mathsf{E}[L_N^*]^2 \\
&\geqslant \mathsf{E}[L_N^*]^2 = \mathsf{E}\left[f_N - \left(x + \sum_{k=1}^{N}(\gamma_k^*, \Delta S_k)\right)\right]^2 \\
&= R_N(\pi^*; x) \geqslant R_N(\pi^*; x^*),
\end{aligned} \tag{11}$$

并且这里第一个不等式当 $\gamma = \gamma^*$ 时变为等式.

这样, 下列定理得证:

定理. 设原来的测度P 是鞅测度. 那么在问题 (2) 中, (按均方判别准则的) 最优对冲 $\pi^* = (\gamma^{*1}, \cdots, \gamma^{*d})$ 由公式 (7) 给定, $x^* = \mathsf{E}f_N$, 并且

$$R_N(\pi^*; x^*) = \mathsf{E}\left[f_N - \left(x^* + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{d}\gamma_k^{*i}\Delta S_k^i\right)\right)\right]^2. \tag{12}$$

注. 在测度 P 不是 (对于价格 S 的) 鞅测度的情形下, 最优点对 (x^*, π^*) 的实现问题及其求解方法变得相当不简单. 关于这方面, 参见例如 H. Föllmer, M. Schweizer 和 D. Sondermann 的著作 [167], [168], [430], 也参见著作 [194] 和 [195].

还要注意, 在第五章 §3d 之末曾经提到过的最小鞅测度概念, 正是在联系所考察的均方判别准则下的对冲问题时产生的.

§1e. 远期合约和期货合约

1. 在本节中将指出, 无套利观念怎样用来计算远期和期货的 "远期" 合约价格和 "期货" 合约价格, 而远期合约、期货合约与期权合约一样, 是金融市场上的重要投资工具.

根据第一章 §1c 中给出的定义, 远期和期货是在未来确定的时刻按事先约定的 ("远期" 或 "期货") 价格交割的某种资产的买卖合约 (协议).

尽管远期和期货两者都是买卖合约, 它们之间还是有本质区别.

远期在本质上完全就是在感兴趣的双方之间的买卖约定, 没有任何中介.

期货也是买卖合约, 但买卖双方是通过清算机构的中介在交易所中签定的, 后者确定签约双方的相互结算, 并且是协议条件的担保方.

2. 假定, 买卖所涉及的资产市场价格由随机序列 $S = (S_k)_{k\leqslant N}$ 来描述, 其中 N 是合约到期时刻, 它等同于交割时刻.

显然, 如果协议在资产的市场价格为 S_N 的时刻 N 成交, 那么对于 "远期" 和 "期货" 价格的任何自然定义, 它们的值必定等于 S_N. 当然, 另一方面, 如果合约在时刻 $n < N$ 成交, 这里的主要问题就在于 (在无套利市场上) 怎样理解公平合约价格.

为了形式化的目的, 我们将认为, 所考察的是第五章 §1c 中的 (B, S)-市场模式, 其中 $B = (B_n)$ 是银行账户, $S = (S_n)$ 是签约双方所感兴趣的资产. (如果认为, 所考察的资产是 d-维风险资产向量的分量之一, 那么在无套利性的假定下, 这并不使后面的结论有任何改变.)

现在我们转向在 §1a 的第 4 点中所描述的带 "分红" 的情形, 其中购买者相应于策略 $\pi = (\beta, \gamma)$ 的资本 $X = (X_n^\pi)_{n\leqslant N}$ 由下列公式来确定:

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n \Delta D_n, \tag{1}$$

而其变化由下列公式确定:

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta D_n, \tag{2}$$

其中 γ_n 是所购买的资产 S 的单位 "数", 而 $D = (D_n, \mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}$ 是联系资产 S 的分红总额 (可取负值) 过程, $D_0 = 0$.

我们将在所考察的远期合约和期货合约情形下描述分红结构, 并由此得到它们的 "公平" 价格.

3. 设远期合约在时刻 n 成交, 并且签约双方都同意, 基于 "信息" $\mathscr{F}_n$, 交割价格 (换句话说, 远期价格) 等于 $\mathbb{F}_n(N)$.

于是, 按远期合约作用的自身机理, (带符号的) 分红总额过程有下列结构:

$$D_k = 0, \quad n \leqslant k < N, \tag{3}$$

以及

$$D_N = S_N - \mathbb{F}_n(N). \tag{4}$$

由 (1) 和 (2) 得到 (也参见第五章 §1a 中 (24))

$$\Delta\left(\frac{X_k^\pi}{B_k}\right) = \gamma_k \frac{\Delta D_k}{B_k}, \tag{5}$$

从而

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \sum_{k=n=1}^{N} \gamma_k \frac{\Delta D_k}{B_k}, \quad n < N. \tag{6}$$

很明显, 对于在时刻 n 成交的远期合约有 $\gamma_k = 0$, $k \leqslant n$, 以及 $\gamma_k = \gamma_{n+1}$ 对于所有 $k \geqslant n+1$ 成立, 其中 γ_k 可解释为所购买的资产 S 的单位 "数".

由 (6),

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \gamma_{n+1} \frac{S_N - \mathbb{F}_n(N)}{B_N}, \tag{7}$$

并立即可作出下列结论.

设所考察的 (B, S)-市场是无套利完全市场. 我们以 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 表示那个唯一的鞅测度, 它使得 $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n \leqslant N}$ 形成鞅.

现在假定, $\mathscr{F}_n$-可测价格 $\mathbb{F}_n(N)$ 满足

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{S_N - \mathbb{F}_n(N)}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad n \leqslant N, \tag{8}$$

即, 设

$$\mathbb{F}_n(N) = \frac{\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\dfrac{S_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)}{\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\dfrac{1}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)}. \tag{9}$$

于是由 (7) 可见,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{X_N^\pi}{B_N} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{X_n^\pi}{B_n}, \tag{10}$$

而这就是说, 在时刻 n 按用公式 (9) 确定的价格 $\mathbb{F}_n(N)$ 成交的远期合约是无套利的 (即, 如果 $X_n^\pi = 0$ 以及 $\mathsf{P}(X_N^\pi \geqslant 0) = 1$, 那么 $\mathsf{P}(X_N^\pi = 0) = 1$, 参见第五章 §2a 中的定义 2), 在这一含义下, 称为远期价格的值 $\mathbb{F}_n(N)$ 自然应该看作远期合约的公平价格.

我们察觉, (B, S)-市场的无套利性假定导致

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{S_N}{B_N}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right) = \frac{S_n}{B_n}.$$

因此, 由 (9) 我们求得无套利远期价格 $\mathbb{F}_n(N)$ 由下列公式确定:

$$\boxed{\mathbb{F}_n(N) = \frac{S_n}{\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{B_n}{B_N}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right)}, \quad n \leqslant N} \tag{11}$$

4. 现在我们转向期货价格. 设这一合约在时刻 n 以 $\mathscr{F}_n$-可测的具体 (期货) 价格 $\Phi_n(N)$ 成交. 合约签定以后, 就进入由清算机构来实施的相互支付的机制, 以简要的形式来说 (不考虑有关保证金账户、该账户中的保证金存款等等的细节), 它可用 (带符号的) 分红的术语描述如下.

如果在时刻 $n+1$, 期货的市场价格变为 $\Phi_{n+1}(N)$, 并且 $\Phi_{n+1}(N) < \Phi_n(N)$, 那么购买者就要在出售者的账户中打入金额 $\Phi_n(N) - \Phi_{n+1}(N)$. 如果 $\Phi_{n+1}(N) > \Phi_n(N)$, 那么相反, 出售者就要向购买者账户打入金额 $\Phi_{n+1}(N) - \Phi_n(N)$.

我们将记 $\delta_0 = \Phi_0(N)$ 以及

$$\delta_n = \Phi_n(N) - \Phi_{n-1}(N), \quad n \geqslant 1.$$

又设

$$D_n = \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_n, \tag{12}$$

以至 $\Delta D_n = \delta_n$, $n \geqslant 1$.

由 (6) 我们求得 (比较 (7))

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \gamma_{n+1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\Delta D_k}{B_k}. \tag{13}$$

如同在远期合约的情形中那样, 由此我们断定, 如果 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是 (B, S)-市场唯一的鞅测度, 那么在价格 $\Phi_0(N), \cdots, \Phi_{n+1}(N)$ 上的条件

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\Delta D_k}{B_k}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right) = 0 \tag{14}$$

显然将保证在时刻 n 成交的期货无套利.

我们要求, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 序列 $D = (D_n)_{n \leqslant N}$ 形成鞅. 在这一情形下, 对于任何 $n \geqslant 0$, 条件 (14) 将满足. 其实, 由可料序列 B_k 的正性, 反之也成立.

序列 $D = (D_n)_{n \leqslant N}$ 的鞅性意味着

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(D_N \mid \mathscr{F}_n) = D_n. \tag{15}$$

但是 $D_n = \delta_0 + \cdots + \delta_n = \Phi_n(N)$, 而 $D_N = \Phi_N(N) = S_N$. 因此, 由 (15) 求得选择期货价格为如下形式:

$$\boxed{\Phi_n(N) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(S_N \mid \mathscr{F}_n), \quad n \leqslant N} \tag{16}$$

确保相应的期货合约无套利.

注. 设 $B = (B_n)_{n \leqslant N}$ 是确定性序列. 那么, 显然,

$$\Phi_n(N) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{S_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) \cdot B_N = \frac{S_n}{B_n} \cdot B_N, \tag{17}$$

并且与 (11) 相比较, 我们就得到众所周知的事实: *在 $B = (B_n)$ 为确定性序列的情形下, 远期价格和期货价格相重合.*

2. 在无套利市场上联系美式对冲的计算

§2a. 最优停时问题. 上鞅特征化

1. 在 §1c 中所引入的序列 $Y = (Y_n)$ 关于族 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的每一个测度的上鞅特征化并不出人意外, 只要把 (12) 中的 ess sup 运算解释为 “最佳” 概率测度选择的最优化问题. 在这样的理解下, 我们感兴趣的是上鞅性质无非就是广为人知的价格过程 (“Bellman 函数”) 在随机最优化问题中所满足的 “最优化原理” 的断言之一.

这种问题的特殊情形是某个随机序列 $f = (f_n)_{n \leqslant N}$ 的最优停时问题, 由对它的讨论来开始叙述最优化问题中的 “上鞅特征化” 问题是适宜的. 把这一情形专门分离出来讨论对于联系后面考察的美式期权 (其中期权购买者有权选择执行时刻, 它也可在这里看作 “最优化元素”) 也是适宜的; 与此相联系的还有在这一情形下, 明确用来作为取 ess sup 的对象类必须 “足够丰富”.

2. 设 $f = (f_n, \mathscr{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 是某个 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}, \mathsf{P})$ 上的随机序列, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$. 我们将假定 $\mathsf{E}|f_n| < \infty$ 对于所有 $n \leqslant N < \infty$ 成立.

我们感兴趣的问题如下:

1) 求 (价格) 函数

$$V_n^N = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E} f_\tau, \tag{1}$$

其中 sup 对于所有满足 $n \leqslant \tau \leqslant N$ 的停时 τ 的类 $\mathfrak{M}_n^N$ 来取;

2) 求出最优停时 (在目前的局面下它存在).

现在考察的最优停时问题并没有在 $N = \infty$ 的一般情形下 (于是类 $\mathfrak{M}_n^\infty$ 是所有有限停时 $\tau \geqslant n$ 全体) 来陈述 (参见后面的第 4 点), 而仅仅对于有限 “视野” N 的情形来陈述. 主要原因在于这一情形处置比较初等, 同时, 在这一情形下, 向后的归纳法 “奏效”, 它也是求出对应最优停时的价格 V_n^N 的基本方法之一.

3. 我们以下列人为方式引入序列 $\gamma^N=(\gamma_n^N)_{0\leqslant n\leqslant N}$:

$$\begin{aligned}\gamma_N^N&=f_N,\\ \gamma_n^N&=\max(f_n,\mathsf{E}(\gamma_{n+1}^N\,|\,\mathscr{F}_n)).\end{aligned}\tag{2}$$

又对于 $0\leqslant n\leqslant N$, 令

$$\tau_n^N=\min\{n\leqslant i\leqslant N\colon f_i=\gamma_i^N\}.$$

下列结果是在有限时间区间 $0\leqslant n\leqslant N$ 中关于最优停时问题理论的中心结果之一; 比较 [75; 第 3 章], [441; 第 2 章].

定理 1. 由递推关系式 (2) 定义的序列 $\gamma^N=(\gamma_n^N)_{n\leqslant N}$ 和时刻 τ_n^N, $0\leqslant n\leqslant N$, 具有下列性质:

(a) $\tau_n^N\in\mathfrak{M}_n^N$;

(b) $\mathsf{E}(f_{\tau_n^N}\,|\,\mathscr{F}_n)=\gamma_n^N$;

(c) $\mathsf{E}(f_\tau\,|\,\mathscr{F}_n)\leqslant\mathsf{E}(f_{\tau_n^N}\,|\,\mathscr{F}_n)=\gamma_n^N$ 对于任何 $\tau\in\mathfrak{M}_n^N$ 成立;

(d) $\gamma_n^N=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\tau\in\mathfrak{M}_n^N}\mathsf{E}(f_\tau\,|\,\mathscr{F}_n)$, 特别是 $\gamma_0^N=\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N}\mathsf{E}f_\tau=\mathsf{E}f_{\tau_0^N}$;

(e) $V_n^N=\mathsf{E}\gamma_n^N$.

证明. 为了在这个证明中直到第 3 点末简化记号, 我们将总忽略指标 N, 取代 γ_n^N, V_n^N, $\mathfrak{M}_n^N$, τ_n^N, 将记为 $\gamma_n, V_n, \mathfrak{M}_n, \tau_n$.

性质 (a) 由 τ_n 的定义得到. 性质 (b) 和 (c) 对于 $n=N$ 显然. 下面将用向后归纳法来进行讨论.

设这一性质对于 $n=N,N-1,\cdots,k$ 已经建立. 我们指出, 它们也对于 $n=k-1$ 满足.

设 $\tau\in\mathfrak{M}_{k-1}$ 和 $A\in\mathscr{F}_{k-1}$. 令 $\overline{\tau}=\max(\tau,k)$. 显然, $\overline{\tau}\in\mathfrak{M}_k$ 以及考虑到 $\{\tau\geqslant k\}\in\mathscr{F}_{k-1}$, 于是对于 $A\in\mathscr{F}_{k-1}$, 我们求得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[I_Af_\tau]&=\mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau=k-1\}}f_\tau]+\mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau\geqslant k\}}f_\tau]\\ &=\mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau=k-1\}}f_{k-1}]+\mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau\geqslant k\}}\mathsf{E}(f_\tau\,|\,\mathscr{F}_{k-1})]\\ &=\mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau=k-1\}}f_{k-1}]+\mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau\geqslant k\}}\mathsf{E}(\mathsf{E}(f_{\overline{\tau}}\,|\,\mathscr{F}_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1})]\\ &=\mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau=k-1\}}f_{k-1}]+\mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau\geqslant k\}}\mathsf{E}(\gamma_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})]\\ &\leqslant\mathsf{E}[I_A\gamma_{k-1}],\end{aligned}\tag{3}$$

其中最后一个不等式由 (2) 得到.

因此, $\mathsf{E}(f_\tau\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\leqslant\gamma_{k-1}$. 为使所要求的断言 (b) 和 (c) 对于 $n=k-1$ 成立, 只需指出

$$\mathsf{E}(f_{\tau_{k-1}}\,|\,\mathscr{F}_{k-1})=\gamma_{k-1}.\tag{4}$$

为此我们转向 (3) 中的不等式链, 并指出, 对于 $\tau = \tau_{k-1}$, 其实在 (3) 中我们总是有等式成立.

事实上, 在集合 $\{\tau_{k-1} \geqslant k\}$ 上, 根据 τ_{k-1} 的定义, 我们有 $\tau = \tau_k$, 并且由于按归纳假定, $\mathsf{E}(f_{\tau_k}|\mathscr{F}_k) = \gamma_k$, 故在 (3) 中,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[I_A f_{\tau_{k-1}}] &= \mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}] \\ &\quad + \mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau_{k-1}\geqslant k\}}\mathsf{E}(\mathsf{E}(f_{\tau_k} \mid \mathscr{F}_k) \mid \mathscr{F}_{k-1})] \\ &= \mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}] + \mathsf{E}[I_{A\cap\{\tau_{k-1}\geqslant k\}}\mathsf{E}(\gamma_k \mid \mathscr{F}_k)] \\ &= \mathsf{E}[I_A \gamma_{k-1}],\end{aligned}$$

其中最后一个等式 (根据定义) 由 $\gamma_{k-1} = \max(f_{k-1}, \mathsf{E}(\gamma_k \mid \mathscr{F}_{k-1}))$ 和 $\gamma_{k-1} = f_{k-1}$ 在 $\{\tau_{k-1} = k-1\}$ 上成立得到, 而在集合 $\{\tau_{k-1} > k-1\}$ 上我们有 $f_{k-1} < \gamma_{k-1}$ (这就是说, 在这个集合上 $\gamma_{k-1} = \mathsf{E}(\gamma_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$).

这样, 断言 (b) 和 (c) 得证, 因而断言 (d) 也得证. 最后, 由于对于每个 $\tau \in \mathfrak{M}_k$, 由 (c) 有

$$\mathsf{E} f_\tau \leqslant \mathsf{E} f_{\tau_k} = \mathsf{E}\gamma_k,$$

故 $V_k = \sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}_k} \mathsf{E} f_\tau = \mathsf{E} f_{\tau_k} = \mathsf{E}\gamma_k$, 即断言 (e) 成立.

注 1. 在上面引入的证明中, 曾经利用这样的事实: 如果 $\tau \in \mathfrak{M}_{k-1}$, 那么时刻 $\widetilde{\tau} = \max(\tau, k)$ 包含在 $\mathfrak{M}_k$ 中. 在我们所考察的情形下, 干脆假定, 类 $\mathfrak{M}_k$ 包含这样的瞬间. 在这一含义下, 可以说, 类 $\mathfrak{M}_k$ ($k \leqslant N$) “足够丰富”. (关于这方面参见第 1 点末.)

推论 1. *序列 $\gamma = (\gamma_n)_{n\leqslant N}$ 是上鞅. 这时, γ 是在下列意义下优于序列 $f = (f_n)_{n\leqslant N}$ 的最小上鞅: 如果 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n\leqslant N}$ 也是上鞅, 并且对于所有 $n \leqslant N$ 满足 $\widetilde{\gamma}_n \geqslant f_n$, 那么 $\gamma_n \leqslant \widetilde{\gamma}_n$ (P-a.s.), $n \leqslant N$.*

其实, $\gamma = (\gamma_n)_{n\leqslant N}$ 是优于 $f = (f_n)_{n\leqslant N}$ 的上鞅由递推关系式 (2) 可得.

同时, 很明显, $\widetilde{\gamma}_N \geqslant f_N$, 并且对于 $n < N$,

$$\widetilde{\gamma}_n \geqslant \max(f_n, \mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)). \tag{5}$$

由于 $\gamma_N = f_N$, 故 $\widetilde{\gamma}_N \geqslant f_N$, 并且

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}_{N-1} &\geqslant \max(f_{N-1}, \mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_N \mid \mathscr{F}_{N-1})) \\ &\geqslant \max(f_{N-1}, \mathsf{E}(\gamma_N \mid \mathscr{F}_{N-1})) = \gamma_{N-1}.\end{aligned}$$

用类似的方式可指出 $\widetilde{\gamma}_n \geqslant \gamma_n$ 对于任何 $n \leqslant N-1$ 成立.

推论 2. 在上一推论中陈述的结果可改写为: 如果 $\gamma = (\gamma_n)_{n \leqslant N}$ 是下列递推方程组的解:

$$\gamma_n = \max(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)), \quad n < N, \tag{6}$$

其中 $\gamma_N = f_N$, 那么 $\gamma_n \leqslant \widetilde{\gamma}_n$, $n \leqslant N$, 对于每个满足不等式组

$$\widetilde{\gamma}_n \geqslant \max(f_n, \mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)), \quad n < N, \tag{7}$$

以及 $\widetilde{\gamma}_N \geqslant f_N$ 的序列 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n \leqslant N}$ 成立.

我们指出, 在所有这样的解 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n \leqslant N}$ 中表示为 $\gamma = (\gamma_n)_{n \leqslant N}$ 的最小解存在, 且满足带有 $\gamma_N = f_N$ 的方程组 (6).

令 $\overline{\gamma}_N = f_N$, 并对 $n < N$ 设

$$\overline{\gamma}_n = \max(f_n, \mathsf{E}(\overline{\gamma}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)). \tag{8}$$

显然, 对于所有 $n \leqslant N$, 有 $\overline{\gamma}_n \geqslant f_n$, 并且 $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_n)_{n \leqslant N}$ 是上鞅. 由于按假定, $\gamma = (\gamma_n)_{n \leqslant N}$ 具有最小性质, 故

$$\max(f_n, \mathsf{E}(\overline{\gamma}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)) = \overline{\gamma}_n = \gamma_n. \tag{9}$$

因此, 对于 $n < N$, 有

$$\max(f_n, \mathsf{E}(\overline{\gamma}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)) = \overline{\gamma}_n \geqslant \gamma_n \geqslant \max(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)),$$

以及对于 $n = N$, 有

$$f_N = \overline{\gamma}_N \geqslant \gamma_N \geqslant f_N.$$

这样, $\gamma_N = \overline{\gamma}_N = f_N$, 并且由 (9), 对于所有 $n < N$, 有

$$\gamma_n = \overline{\gamma}_n.$$

尤其是, 优于序列 $f = (f_n)_{n \leqslant N}$ 的最小上鞅 $\gamma = (\gamma_n)_{n \leqslant N}$ 满足带有 $\gamma_N = f_N$ 的方程 (6).

推论 3. 时刻

$$\tau_0^N = \min\left\{0 \leqslant i \leqslant N; f_i = \gamma_i^N\right\}$$

是类 $\mathfrak{M}_0^N$ 中的最优停时:

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E} f_\tau = \mathsf{E} f_{\tau_0^N} \left(= \gamma_0^N\right).$$

4. 我们考察定理 1 对 $N = \infty$ 的情形的推广问题. 更确切地说, 我们将假定 $\mathfrak{M}_n^* \equiv \mathfrak{M}_n^\infty$ 为所有那些满足对于任何 $\omega \in \Omega$, 有 $\tau = \tau(\omega)$ 的有限 Markov 时刻的类. 以后我们将以 $\mathfrak{M}^*$ 表示类 $\mathfrak{M}_0^\infty$.

又设 $f = (f_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是给定在 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的随机序列,

$$V_n^* = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E} f_\tau, \tag{10}$$

$$\gamma_n^* = \operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E}(f_\tau \mid \mathscr{F}_n), \tag{11}$$

$$\tau_n^* = \inf\{k \geqslant n \colon f_k = \gamma_k\}. \tag{12}$$

当然, 我们自然期待 (在一定的条件下) $\gamma_n^* = \lim\limits_{N\to\infty} \gamma_n^N$, 以及在 (2) 中极限过程可能; 于是它对于 $\gamma^* = (\gamma_n^*)$ 给出方程

$$\gamma_n^* = \max(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1}^* \mid \mathscr{F}_n)). \tag{13}$$

类似地, 我们也自然期待, (12) 中确定的时刻 τ_n^* 是类 $\mathfrak{M}_n^*$ 中在下列含义下的最优时刻:

$$V_n^* = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E} f_\tau = \mathsf{E} f_{\tau_n^*}, \tag{14}$$

以及

$$V_n^* = \mathsf{E}\gamma_n^*. \tag{15}$$

在例如 [75] 和 [441] 中叙述的最优停时理论中, 揭示在一定条件下 (但并不总是!) 所陈述的结果实际上是成立的.

我们只引入这方面的一个相当一般的结果, 其详情可在上述专著中找到.

定理 2. 设 $f = (f_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 为带有 $\mathsf{E}\sup\limits_n f_n^- < \infty$ 的随机序列.

a) 带有

$$\gamma_n^* = \operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E}(f_\tau \mid \mathscr{F}_n) \tag{16}$$

的序列 $\gamma^* = (\gamma_n^*)_{n\geqslant 0}$ 满足递推关系式

$$\gamma_n^* = \max(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1}^* \mid \mathscr{F}_n)), \tag{17}$$

因此, 它是优于序列 $f = (f_n)$ 的上鞅.

b) 序列 $\gamma^* = (\gamma_n^*)_{n\geqslant 0}$ 是优于序列 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 的最小上鞅.

c) 设 $\tau_n^* = \inf\{k \geqslant n \colon f_k = \gamma_k^*\}$. 于是, 如果 $\mathsf{E}\sup\limits_n |f_n| < \infty$, 且 $\mathsf{P}(\tau_n^* < \infty) = 1$, 那么 τ_n^* 是最优停时:

$$V_n^* \equiv \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E} f_\tau = \mathsf{E} f_{\tau_n^*}, \tag{18}$$

$$\gamma_n^* \equiv \operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E}(f_\tau \mid \mathscr{F}_n) = \mathsf{E}(f_{\tau_n^*} \mid \mathscr{F}_n). \tag{19}$$

d) 对于每个 $n \geqslant 0$, 当 $N \to \infty$ 时, 有 (P-a.s.)

$$\gamma_n^N \uparrow \gamma_n^*. \tag{20}$$

5. 正如上面已经注意到, 在有限时间视野 ($N<\infty$) 情形下, 最优停时问题的求解可通过向后归纳法计算量 $\gamma_N^N, \gamma_{N-1}^N, \cdots, \gamma_0^N$ 来实现, 由于 $\gamma_N^N=f_N$, 而 γ_n^N 满足递推关系式 (13), 这是可能的.

在无限时间视野 ($N=\infty$) 的情形下, 求函数序列 $\gamma=(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ 的问题, 变得更为微妙, 因为取代时刻 N 上的条件而变为价格 V_n ($n\geqslant 0$) 的补充特征和性质. 例如, 在求出方程组 (17) 的所需解时, 有时成功地运用这样的思想: 所要求的解必定是所有解的集合中的最小解.

对于最优停时问题的求解技巧研究最深入的是 Markov 情形.

为作出相应的叙述, 我们假定, 存在齐次 *Markov* 过程 $X=(x_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}_x)$, 其中离散时间为 $n=0,1,\cdots$, 状态相空间为 $(E,\mathscr{B})$ 以及对于每个初始状态 $x\in E$ 在 $\mathscr{F}=\bigvee \mathscr{F}_n$ 上有概率测度 P_x 的族 (详情参见 [126], [441]).

设 T 为一步转移算子 (对于有 $\mathsf{E}_x|f(x_1)|<\infty$ ($x\in E$) 的可测函数 $f=f(x_1)$, $Tf(x)=\mathsf{E}_x f(x_1)$, 这里 E_x 为关于测度 P_x 的均值, $x\in E$).

又设 $g=g(x)$ 是某个 $\mathscr{B}$-可测函数, $x\in E$.

取函数 $g(x_n)$ 作为上面考察的函数 f_n, $n\geqslant 0$, 并设 $\mathsf{E}_x[\sup g^-(x_n)]<\infty$, $x\in E$. 令

$$s(x)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^*}\mathsf{E}_x g(x_\tau), \tag{21}$$

其中 $\mathfrak{M}^*=\{\tau\colon \tau(\omega)<\infty, \omega\in\Omega\}$ 是所有有限 Markov 时刻类.

对于 Markov 过程 X 所考察的最优停时问题在于求出最优时刻 τ^* 的函数 $s(x)$ (即 $s(x)=\mathsf{E}_x g(x_{\tau^*})$, $x\in E$), 或者 ε-最优时刻 τ_ε^* 的函数 (即 $s(x)-\varepsilon\leqslant \mathsf{E}_x g(X_{\tau_\varepsilon^*})$, $x\in E$), 如果这样的函数存在.

显然, Markov 局面的优势在于, 在这样的情形下, 上面考察的条件数学期望 $\mathsf{E}_x(\cdot\,|\,\mathscr{F}_n)$ 变为只依赖于仅由时刻 n 的过程值来表示的 "过去的历史 $\mathscr{F}_n$", 即仅与 x_n 有关. 特别是, 上面考察的函数 γ_n, γ_n^N 变为仅仅是 x_n 的函数.

我们引入定理 1 和 2 的 Markov 文本, 以后 (在第六章中) 我们将在分析美式期权时运用有关结果.

定理 3. 设 $g=g(x)$ 为带有 $\mathsf{E}_x g^-(x_k)<\infty$ 的 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可测函数, $x\in E$, $k\leqslant N$,

$$s_N(x)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N}\mathsf{E}_x g(x_\tau), \tag{22}$$

其中 $\mathfrak{M}_0^N=\{\tau\colon 0\leqslant\tau\leqslant N\}$, $N\geqslant 0$.

设

$$Qg(x)=\max(g(x), Tg(x)), \tag{23}$$

以及

$$\tau_0^N=\min\{0\leqslant m\leqslant N\colon s_{N-m}(x_m)=g(x_m)\}. \tag{24}$$

那么

(a)

$$s_N(x) = Q^N g(x); \tag{25}$$

(b)

$$s_N(x) = \max(g(x), Ts_{N-1}(x)), \tag{26}$$

其中 $s_0(x) = g(x)$;

(c) 在类 $\mathfrak{M}_0^N$ 中, Markov 时刻 τ_0^N 为最优:

$$\mathsf{E}_x g(x_{\tau_0^N}) = s_N(x), \quad x \in E; \tag{27}$$

(d) 有 $\gamma_m^N = s_{N-m}(x_m)$ 的序列 $\gamma^N = (\gamma_m^N, \mathscr{F}_m)_{m \leqslant N}$ 对每个 $N \geqslant 0$ 形成上鞅.

证明. 这条定理及其推广的证明在讨论最优停时问题的 "Markov 途径" 的专著 [441] 的第二章中给出. 当然, 它也可能作为上面证明的定理 1 的特殊情形来导出, 仅有的不同在于, 它们全都必须分别研究算子 $Qg(x)$ 及其迭代 $Q^n g(x)$ 的结构. (这方面的详情参见 [441] 中的 §2.2.)

由所引入的定理结果导出在对于固定的 $N < \infty$ 的类 $\mathfrak{M}_0^N = \{\tau: 0 \leqslant \tau \leqslant N\}$ 中的最优停时结构的下列解释.

设

$$D_n^N = \{x: S_{N-n}(x) = g(x)\}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \tag{28}$$

以及

$$C_n^N = E \setminus D_n^N. \tag{29}$$

对应于定理 3, 最优时刻 τ_0^N 可记为下列形式:

$$\tau_0^N = \min\{0 \leqslant n \leqslant N: x_n \in D_n^N\}. \tag{30}$$

换句话说, 区域列 $D_0^N, D_1^N, \cdots, D_N^N = E$ 形成观察停止区域序列, 而区域列 $C_0^N, C_1^N, \cdots, C_N^N = \varnothing$ 形成观察延续区域序列.

我们察觉

$$D_0^N \subseteq D_1^N \subseteq \cdots \subseteq D_N^N = E,$$

以及

$$C_0^N \supseteq C_1^N \supseteq \cdots \supseteq C_N^N = \varnothing.$$

因此, 如果 $x_0 \in D_0^N$, 那么观察不实现, 而 $\tau_0^N = 0$. 如果 $x_0 \in C_0^N$, 那么进行观察, 以及如果 $x_1 \in D_1^N$, 那么观察停止. 而如果 $x_1 \in C_1^N$, 那么实现下次观察, 如此等等. 在结束 (终端) 时刻 N, 观察显然告终 (在这一情形下, $D_N^N = E$).

注 2. 由定理 1 得到, 如果把由公式 (21) 确定的价格 $s_N(x)$ 取代为考察下列"带折现和观察费用的" 价格:

$$s_N(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_x \left[\beta^\tau g(x_\tau) - \sum_{k=1}^{\tau} c(x_{k-1}) \right] \tag{21'}$$

(若 $\tau = 0$, 则在 $[\cdot]$ 中的表达式被认为是 $g(x)$; $0 < \beta \leqslant 1$, $c(x) \geqslant 0$ 对于任何 $x \in E$ 成立), 那么在定性关系上没有多大改变.

公式 (25) 以

$$Qg(x) = \max(g(x), \beta Tg(x) - c(x)) \tag{23'}$$

而保持成立.

递推方程 (26) 取下列形式:

$$s_N(x) = \max(g(x), \beta T s_{N-1}(x) - c(x)), \tag{26'}$$

其中 $s_0(x) = g(x)$. 详情参见 [441; 第 II 章].

例 1. 设 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots)$ 是带有 $\mathsf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathsf{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$ 的 Bernoulli 随机变量.

设 $x_n = x + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$, $x \in E = \{0, \pm 1, \cdots\}$ 以及

$$s_N(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_x \beta^\tau x_\tau.$$

如果 $\beta = 1$, 那么对于所有 $x \in E$, 当 $g(x) = x$ 时, $Qg(x) = g(x)$ 成立, 并且可取时刻 $\tau_0^N \equiv 0$ 作为最优停时.

如果 $0 < \beta < 1$, 那么对于函数 $g(x) = x$, 我们求得 $Q^n g(x) = x$ 对于 $x = 0, 1, 2, \cdots$ 成立, 而 $Q^n g(x) = \beta^n x$ 对于 $x = -1, -2, \cdots$ 成立. 因此, 这里 $s_N(x) = \max(x, \beta^N x)$. 这时, 最优时刻

$$\tau_0^N = \min\{0 \leqslant n \leqslant N \colon x_n \in \{0, 1, 2, \cdots\}\}.$$

(如果 $x_n \in \{-1, -2, \cdots\}$ 对于所有满足 $0 \leqslant n \leqslant N$ 的 n 成立, 那么 τ_0^N 假定等于 N.)

我们察觉, 在 $0 < \beta < 1$ 的情形下,

$$s_N(x) \uparrow x^+ = \max(0, x), \quad N \to \infty.$$

6. 我们现在转向在无限视野 $(N = \infty)$ 情形下的最优停时问题. 令

$$s(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^*} \mathsf{E}_x g(x_\tau), \tag{31}$$

其中 $\mathfrak{M}^* = \{\tau \colon 0 \leqslant \tau(\omega) < \infty\}$ 是所有有限 Markov 时刻.

为了陈述关于价格 $s = s(x)$ $(x \in E)$ 的结构和最优 (或 ε-最优) 停时的相应定理, 有益的是记得下列定义.

定义 (参见例如, [441]). 带有 $\mathsf{E}_x|f(x_1)| < \infty$ 并满足性质

$$f(x) \geqslant Tf(x) \tag{32}$$

的函数 $f = f(x)$ 称为对于齐次 Markov 过程 $X = (x_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}_x)_{n\geqslant 0}$ $(x \in E)$ 的超过函数.

如果此外还有 $f(x) \geqslant g(x)$, 那么函数 $f = f(x)$ 称为 $g = g(x)$ 的超过优函数.

显然, 如果函数 $f = f(x)$ 是 $g = g(x)$ 的超过优函数, 那么

$$f(x) \geqslant \max(g(x), Tf(x)). \tag{33}$$

下列定理显示了超过优函数在下述齐次 Markov 过程的最优停时问题中的作用:

$$X = (x_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}_x)_{n\geqslant 0}, \quad x \in E.$$

定理 4. 设函数 $g = g(x)$ 满足 $\mathsf{E}_x\left[\sup\limits_n g^-(x_n)\right] < \infty$, $x \in E$. 那么:

(a) 价格 $s = s(x)$ 是 $g = g(x)$ 的最小超过优函数;

(b) 价格 $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} Q^n g(x)$ $\left(= \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)\right)$ 也满足方程 (比较 (33))

$$s(x) = \max(g(x), Ts(x)); \tag{34}$$

(c) 如果 $\mathsf{E}_x\left[\sup\limits_n |g(x_n)|\right] < \infty$, $x \in E$, 那么对于每个 $\varepsilon > 0$, 时刻

$$\tau_\varepsilon^* = \inf\{n \geqslant 0\colon s(x_n) \leqslant g(x_n) + \varepsilon\} \tag{35}$$

为 ε-最优, 即

$$s(x) - \varepsilon \leqslant \mathsf{E}_x g(x_{\widetilde{\tau}_\varepsilon}), \quad x \in E; \tag{36}$$

(d) 设 $\mathsf{E}_x\left[\sup\limits_n |g(x_n)|\right] < \infty$ 和

$$\tau^* = \inf\{n \geqslant 0\colon s(x_n) = g(x_n)\},$$

即 $\tau^* = \tau_0^*$, 如果 $\mathsf{P}_x(\tau^* < \infty) = 1$, $x \in E$, 那么时刻 τ^* 为最优:

$$s(x) = \mathsf{E}_x g(x_{\tau^*}), \quad x \in E; \tag{37}$$

(e) 如果集合 E 有限, 那么时刻 τ^* 为最优.

关于这一定理及其应用的证明参见 [441] 中的第 2 章. 在第 5 节中将给出它在美式期权定价中的应用.

注 3. 类似于 (21′) 自然也要考察具有折现 $(0 < \beta \leqslant 1)$ 和观察费用 $(c(x) \geqslant 0)$ 的最优停时问题.

令

$$s(x) = \sup \mathsf{E}_x \left[\beta^\tau g(x_\tau) - \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(x_k) \right], \tag{31′}$$

其中 sup 对类

$$\mathfrak{M}^*_{(\beta,c)} = \left\{ \tau \in \mathfrak{M}^* : \mathsf{E}_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(x_k) < \infty,\, x \in E \right\}$$

来取, 并设 $g(x) \geqslant 0$.

在这样的假定下, 价格 $s(x)$ 是 (参见 [441; 第 2 章]) $g(x)$ 的最小 (β, c)-超过优函数, 即在满足 $f(x) \geqslant g(x)$ 和

$$f(x) \geqslant \beta T f(x) - c(x) \tag{33′}$$

的函数 $f(x)$ 中最小. 这时,

$$s(x) = \max(g(x), \beta T s(x) - c(x)) \tag{34′}$$

以及

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} Q_{(\beta,c)} g(x),$$

其中

$$Q_{(\beta,c)} g(x) = \max(g(x), \beta T g(x) - c(x)).$$

例 2. 设 $x_n = x + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$, $x \in E = \{0, \pm 1, \cdots\}$ 和 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是例 1 中的 Bernoulli 序列. 对于 $x \in E$, 令

$$s(x) = \sup \mathsf{E}_x(|x_\tau| - c\tau), \tag{38}$$

其中 sup 对所有满足 $\mathsf{E}_x \tau < \infty$ 的停时 τ 来取. 对于这样的 τ,

$$\mathsf{E}_x x_\tau^2 = x^2 + \mathsf{E}_x \tau, \tag{39}$$

而这就是说,

$$\mathsf{E}_x(|x_\tau| - c\tau) = cx^2 + \mathsf{E}_x(|x_\tau| - c|x_\tau|^2). \tag{40}$$

因此,

$$s(x) = cx^2 + \sup \mathsf{E}_x g(x_\tau),$$

其中 $g(x) = |x| - c|x|^2$, 而 sup 对所有满足 $\mathsf{E}_x\tau < \infty$ 的 τ 来取.

由于函数 $g(x)$ 对 $x = \pm\frac{1}{2c}$ 达到最大值, 故在 $\frac{1}{2c}$ 取整数值的情形下, 我们看到

$$s(x) \leqslant cx^2 + \frac{1}{4c}. \tag{41}$$

我们定义时刻 $\tau_c = \inf\left\{n\colon |x_n| = \frac{1}{2c}\right\}$. 如果 $|x| \leqslant \frac{1}{2c}$, 那么显然有 $|x_{\tau_c}| \leqslant \frac{1}{2c}$, 而这就是说,

$$\frac{1}{(2c)^2} \geqslant \mathsf{E}_x x^2_{(\tau_c \wedge N)} = x^2 + \mathsf{E}_x(\tau_c \wedge N).$$

由此通过 $N \to \infty$ 的极限过程 (根据单调收敛性定理), 我们求得 $\mathsf{E}_x\tau_c \leqslant \frac{1}{(2c)^2} < \infty$. 因此, 对于 τ_c, (39) 成立, 并由此得到, 如果 $|x| \leqslant \frac{1}{2c}$, 那么其实有 $\mathsf{E}_x\tau_c = \frac{1}{(2c)^2} - x^2$.

由于对于 τ_c 和 $|x| \leqslant \frac{1}{2c}$, 有

$$\mathsf{E}_x(|x_{\tau_c}| - c\tau_c) = \frac{1}{2c} - c\left(\frac{1}{(2c)^2} - x^2\right) = cx^2 + \frac{1}{4c},$$

故由 (41) 可见, 时刻 τ_c (对于所有满足 $|x| \leqslant \frac{1}{2c}$ 的 x) 为最优停时.

§2b. 完全市场和不完全市场. I. 对冲价格的上鞅特征化

1. 我们回到 §1c 中在不完全市场上对冲价格的公式 (8) 的证明叙述.

正如已经注意到, 这一公式的证明基于下列两个事实: 序列 $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$ 关于族 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的任何测度的上鞅性质以及对于 $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$ 得到可选分解的可能性.

在本节中, 我们不仅考察 §1c 中由公式 (12) 定义的序列 $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$ 的上鞅性质问题, 并且也对于由下面的公式 (1) 所给出的更一般的序列来讨论其上鞅性质问题; 后一讨论可用来研究与美式对冲相联系的问题 (参见 §1a 中的注).

对于 $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$ 的可选分解成立问题在 §2d 中考察.

2. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}, \mathsf{P})$ 为原来的概率空间, (B, S)-市场由被认为 $B_n \equiv 1$ 的银行账户 $B = (B_n)_{n\leqslant N}$ 和 d-维股票 $S = (S^1, \cdots, S^d)$, $S^i = (S^i_n)_{n\leqslant N}$ 所组成. 我们将假定 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$.

设 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 为等价于测度 P 的非空鞅测度集, 而 $f = (f_0, f_1, \cdots, f_N)$ 为 $\mathscr{F}_n$-可测非负函数 f_n $(n \leqslant N)$ 的序列, 它满足 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} f_k < \infty$, $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, $0 \leqslant k \leqslant N$.

定义

$$Y_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}), \tau \in \mathfrak{M}^N_n} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n). \tag{1}$$

定理. 对于 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的每一个测度, 序列 $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$ 为上鞅.

证明. 其思路如同上节引入的关于序列 $\gamma = (\gamma_n)_{n\leqslant N}$ 为上鞅的证明.

这一证明以下列方式实现.

我们在集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中选取某个 ("基底") 测度. 为了不引入新的记号, 我们假定, 它是测度 P (因而它是鞅测度), 以及我们将验证序列 Y 关于测度 P 的上鞅性质.

如果 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, 那么记

$$\widetilde{Z}_N = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}, \quad \widetilde{Z}_n = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}}, \quad \text{其中} \quad \widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n, \quad \mathsf{P}_n = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_n.$$

当 $n = 0$ 时, 我们认为 $\widetilde{Z}_0 = 1$.

定义

$$\widetilde{\rho}_n = \frac{\widetilde{Z}_n}{\widetilde{Z}_{n-1}}. \tag{2}$$

由于 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 故对于任何 $n \leqslant N$,

$$\mathsf{P}(\widetilde{Z}_{n-1} > 0) = \widetilde{\mathsf{P}}(\widetilde{Z}_{n-1} > 0) = 1.$$

如果令 $\widetilde{m}_n = \widetilde{\rho}_n - 1$, $\widetilde{M}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{m}_k$, $\widetilde{M}_0 = 0$, 那么我们得到

$$\Delta\widetilde{Z}_n = \widetilde{Z}_{n-1}\Delta\widetilde{M}_n. \tag{3}$$

由 (3) 可断定,

$$\widetilde{Z}_n = \mathscr{E}(\widetilde{M})_n \equiv \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta\widetilde{M}_k) = \prod_{k=1}^{n}\widetilde{\rho}_k, \tag{4}$$

其中 $\mathscr{E}(\widetilde{M})$ 是随机指数 (参见第二章 §1a).

由上述所有内容得到, 取 P 作为 "基底" 测度, 我们可用测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 及其限制 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ $(n \leqslant N)$ 来完全刻画序列 $(\widetilde{Z}_n)$, $(\widetilde{M}_n)$ 和 $(\widetilde{\rho}_n)$ 中的任何一个.

根据 "Bayes 公式" (第五章 §3a, (4)), 对于每个 (关于 $(\mathscr{F}_n)$ 的) 停时 τ 和 $n \leqslant N$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(f_\tau\,|\,\mathscr{F}_n) &= \frac{1}{\widetilde{Z}_n}\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(f_\tau\widetilde{Z}_\tau\,|\,\mathscr{F}_n) \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(\widetilde{\rho}_{n+1}\cdots\widetilde{\rho}_\tau f_\tau\,|\,\mathscr{F}_n) \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(\overline{\rho}_1\cdots\overline{\rho}_n\cdot\overline{\rho}_{n+1}\cdots\overline{\rho}_\tau f_\tau\,|\,\mathscr{F}_n) \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(f_\tau\overline{Z}_\tau\,|\,\mathscr{F}_n),
\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\overline{\rho}_1 = \cdots = \overline{\rho}_n = 1$, $\overline{\rho}_k = \widetilde{\rho}_k$, $k > n$, 以及 $\overline{Z}_k = \overline{\rho}_1\cdots\overline{\rho}_k$.

值得注意的是, 如果用关系式 $d\overline{\mathsf{P}} = \overline{Z}_N d\mathsf{P}$ 来定义 $\overline{\mathsf{P}}$, 那么我们求得

$$\overline{\mathsf{P}}(A) = \begin{cases} \mathsf{P}(A), & A \in \mathscr{F}_k, k \leqslant n, \\ \widetilde{\mathsf{P}}(A), & A \in \mathscr{F}_k, k > n. \end{cases} \tag{6}$$

显然, 测度 $\overline{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$.

考虑到所引入的的记号, 定义 (1) 可改写为下列形式:

$$Y_n = \operatorname{ess\ sup} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(f_\tau \overline{Z}_\tau \mid \mathscr{F}_n),$$

这里 ess sup 对满足 $n \leqslant \tau \leqslant N$ 的停时 τ 的类 $\mathfrak{M}_n^N$ 以及 P-鞅 $\overline{Z} \in \mathscr{Z}_n^N$ 来取, 其中 $\mathscr{Z}_n^N$ 为满足下列条件的正鞅 $\overline{Z} = (\overline{Z}_k)_{k \leqslant N}$ 的类: $\overline{Z}_0 = \cdots = \overline{Z}_n = 1$, 或者等价地有 $\overline{Z}_0 = \overline{\rho}_1 = \cdots = \overline{\rho}_n = 1$.

带有 $k \leqslant N$ 的集合 $\mathfrak{M}_k^N, \mathscr{Z}_k^N$ 显然满足关系式

$$\mathfrak{M}_k^N \subseteq \mathfrak{M}_{k-1}^N, \quad \mathscr{Z}_k^N \subseteq \mathscr{Z}_{k-1}^N,$$

它们在确立序列 $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)_{n \leqslant N}$ 的上鞅性质时起本质作用.

由按集合 $\mathfrak{M}_k^N, \mathscr{Z}_k^N$ 取 ess sup 的定义导出 (参见例如, [75; 第 1 章]), 可求得这些集合中的时刻 $\tau^{(i)}$ 和鞅 $\overline{Z}^{(i)}$ 的序列, 使得

$$\operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in \mathfrak{M}_k^N, \overline{Z} \in \mathscr{Z}_k^N} \mathsf{E}(f_\tau \overline{Z}_\tau \mid \mathscr{F}_k) = \lim_i\uparrow \mathsf{E}(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}^{(i)}_{\tau^{(i)}} \mid \mathscr{F}_k), \tag{7}$$

其中 $\lim\limits_i\uparrow$ 表示递增序列极限.

于是, 根据单调收敛性定理,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(Y_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\left(\operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in \mathfrak{M}_k^N, \overline{Z} \in \mathscr{Z}_k^N} \mathsf{E}(f_\tau \overline{Z}_\tau \mid \mathscr{F}_k) \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1} \right) \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\left(\lim_i\uparrow \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\left(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}^{(i)}_{\tau^{(i)}} \mid \mathscr{F}_k \right) \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1} \right) \\
&= \lim_i\uparrow \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\left(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}^{(i)}_{\tau^{(i)}} \mid \mathscr{F}_{k-1} \right) \\
&\leqslant \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in \mathfrak{M}_k^N, \overline{Z} \in \mathscr{Z}_k^N} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(f_\tau \overline{Z}_\tau \mid \mathscr{F}_{k-1}) \\
&\leqslant \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in \mathfrak{M}_{k-1}^N, \overline{Z} \in \mathscr{Z}_{k-1}^N} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(f_\tau \overline{Z}_\tau \mid \mathscr{F}_{k-1}) = Y_{k-1},
\end{aligned}$$

它也建立了上鞅性质 ($\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(Y_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \leqslant Y_{k-1}$). 定理得证.

注. 定理 1 的结果也可推广到取代 f_τ 考察形为 $\sum\limits_{k=1}^{\tau} \alpha_k \Delta g_k + f_\tau$ 的 "带停止的控制" 情形, 其中 $g = (g_0, g_1, \cdots, g_N)$ 是某个 $\mathscr{F}_n$-可测函数 g_n 的序列, 而 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ 为属于足够 "丰富" 可料序列类的控制. (与此相联系, 参见 §1a 中的第 2 点.)

§2c. 完全市场和不完全市场. II. 对冲价格的基本公式

1. 在无套利 (B, S)-市场上的欧式对冲价格 $\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P})$ 的基本公式断言 (§1c)

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N}. \tag{1}$$

现在转向更复杂的金融工具: (B, S)-市场上的美式对冲, 且假定鞅测度集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 非空.

正如已经不止一次地注意到, 在考察例如美式期权时, 要假定问题中不是只有一个偿付函数 f_N, 而是有一系列函数 $f = (f_n)_{n \leqslant N}$, 其含义在于: 如果购买者在时刻 n 提交执行期权, 那么对应的 (出售者向购买者) 支付由 $\mathscr{F}_n$-可测函数 $f_n = f_n(\omega)$ 来确定.

当然, 这时期权出售者必定会选取这样的策略 π, 使得对于资本 $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \leqslant N}$ 具有这样的性质: 对于任何购买者用来进行期权提交执行的停时 $\tau = \tau(\omega)$, 必定满足对冲条件

$$X_\tau^\pi \geqslant f_\tau \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \tag{2}$$

它保证了出售者能遵守合约条件.

2. 为了确切提出相应的对冲问题, 我们引入一系列定义.

按照 §2a, 我们将记

$$\mathfrak{M}_n^N = \{\tau = \tau(\omega) \colon n \leqslant \tau(\omega) \leqslant N, \omega \in \Omega\}.$$

如果 $\pi = (\beta, \gamma)$ 是带有 $\beta = (\beta_n)_{n \leqslant N}$, $\gamma = (\gamma_n)_{n \leqslant N}$ 的证券组合, 其相应的资本为

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n, \quad n \leqslant N, \tag{3}$$

那么我们将假定, 这个组合是在满足下列 "平衡" 条件的含义下自融资:

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - \Delta C_n, \tag{4}$$

其中 $C = (C_n)_{n \geqslant 0}$ 是某个不减过程, 满足 $C_0 = 0$ 和 C_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测. (比较第五章 §1a 中的带 "消费" 的情形.)

为了强调资本 X_n^π 对 "消费" 的依赖性, 我们将 (如同在 §1c 中那样) 记它为 $X_n^{\pi, C}$.

定义 1. 我们将称下列量为 ($\mathscr{F}_n$-可测偿付函数 f_n $(n \leqslant N)$ 的组的) 美式对冲的上价格:

$$\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}) = \inf\left\{x \colon \exists (\pi, C), \text{使得 } X_0^{\pi, C} = x,\ X_\tau^{\pi, C} \geqslant f_\tau \ (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \forall \tau \in \mathfrak{M}_0^N\right\}. \tag{5}$$

定义 2. 策略 (π, C) 称为完善策略, 是指 $X_n^{\pi, C} \geqslant f_n$ 对于任何 $n \leqslant N$ 成立, 而 $X_N^{\pi, C} = f_N$ $(\mathsf{P}\text{-a.s.})$.

定理 1 ("美式对冲价格的基本公式"). 设 $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$ 以及 $f = (f_n)_{n \leqslant N}$ 为非负偿付函数序列, 满足

$$\sup_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_n}{B_n} < \infty, \quad n \leqslant N. \tag{6}$$

上价格

$$\boxed{\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P}) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_\tau}{B_\tau}} \tag{7}$$

证明. 上面的叙述已经为这一公式的证明作出了所有必要的准备.

正如在欧式对冲的情形下, 我们先建立不等式

$$\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_\tau}{B_\tau} \leqslant \widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P}). \tag{8}$$

如果对冲集是空集, 那么 $\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P})=\infty$ (按定义 1), 以至公式 (8) 显然.

现在设 π 是某个 (带 "消费" C 的) 自融资对冲, 满足 $X_0^{\pi,C}=x<\infty$.

类似于 §1c 中的 (9), 我们求得, 对于每个 $\tau\in\mathfrak{M}_0^N$, 有

$$\frac{f_\tau}{B_\tau} \leqslant \frac{X_\tau^{\pi,C}}{B_\tau} = \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^{\tau}\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) - \sum_{k=1}^{\tau}\frac{\Delta C_k}{B_{k-1}}. \tag{9}$$

特别是, 由此得到

$$\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) \geqslant -\frac{x}{B_0}.$$

因此, 根据第二章 §1c 中的引理的断言 2), 导得序列

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right)\right)_{n\leqslant N}$$

关于任何测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 为鞅.

把 Doob 停止定理 (参见第五章 §3a) 应用于这个鞅, 我们由 (9) 求得

$$\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_\tau}{B_\tau} \leqslant \frac{x}{B_0}, \tag{10}$$

因而公式 (8) 成立.

较为复杂的是证明 (8) 中的反向不等式的成立. 为此只需求出组合 $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ 和 "消费" $\widetilde{C}$, 使得对于资本 $X^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ 满足 "平衡" 条件

$$\Delta X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n\Delta B_n + \widetilde{\gamma}_n\Delta S_n - \Delta\widetilde{C}_n, \quad n\leqslant N, \tag{11}$$

初始资本

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_\tau}{B_\tau}, \tag{12}$$

以及 (P-a.s.)

$$X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_\tau, \quad \forall\tau\in\mathfrak{M}_0^N. \tag{13}$$

为此, 我们构成序列 $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n)_{n\leqslant N}$, 其中

$$\widetilde{Y}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\tau\in\mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{f_\tau}{B_\tau}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right). \tag{14}$$

由 §2b 中的定理得到, 关于任何测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, 序列 $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n)_{n\leqslant N}$ 是上鞅. 而由 §2d 中的定理导出对于上鞅 $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n)_{n\leqslant N}$ 有下列可选分解 (对于每个测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.)

$$\widetilde{Y}_n = \widetilde{Y}_0 + \sum_{k=1}^n \widetilde{\gamma}_k \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta\widetilde{C}_k}{B_{k-1}} \tag{15}$$

对某个可料序列 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n\leqslant N}$ 和某个不减序列 $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_n)_{n\leqslant N}$ 成立, 其中 $\widetilde{C}_0 = 0$ 以及 $\widetilde{C}_n$ 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

由分解式 (15) 求得 $\widetilde{\gamma}$ 和 $\widetilde{C}$ 以后, 我们就来定义 $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)_{n\leqslant N}$ 如下:

$$\widetilde{\beta}_n = \widetilde{Y}_n - \widetilde{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}. \tag{16}$$

对于策略 $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$, 其资本为

$$X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n B_n + \widetilde{\gamma}_n S_n, \tag{17}$$

并由 (15), "平衡" 条件 (11) 成立. 由于 $X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_n\widetilde{Y}_n$, 故对于资本 $X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ 有下列表示式:

$$X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\tau\in\mathfrak{M}_n^N} B_n \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{f_\tau}{B_\tau}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right). \tag{18}$$

由这一公式我们断定:

1) 策略 $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ 的初始资本用公式 (12) 来确定;
2) 策略 $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ 是在下列含义下的对冲策略: $X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_n$, $n \leqslant N$, 或者等价地, 在性质 (13) 满足的含义下;
3) 策略 $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ 具有下列可复制性质: $X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_N$ (P-a.s.).

定理得证, 并且在其证明过程中也建立了下列命题 (比较 §1c 中的定理 2).

定理 2 ("对于对冲、消费和资本的基本公式"). 设定理 1 的条件满足. 那么可求得对冲 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 和消费 $\widetilde{C}$, 使得对应的资本 $X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n B_n + \widetilde{\gamma}_n S_n$ 在相应的 "平衡" 条件 (11) 下演变, 这时, $X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ 由公式 (12) 确定, 动态变化 $X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ 由公式 (18) 确定, 成分 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)$ 和消费 $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_n)$ 则由可选分解 (15) 来求得, 而 $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)$ 由 (16) 确定.

4.[①] 与本节的定理 1 和 2 所作的 "$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$" 假定以及 §1b 的定理 1 和 2 中所作的 "无套利性" 假定相联系, 我们注意到下列 (在期权对冲的例子中的) 状况.

①原版和英文版此处均都没有 **3**. —— 译者注

通常的 "无套利性" 定义 (参见第五章 §2a 中的定义 2) 总与某个具体的时刻 N "挂钩", 它比如在欧式期权的情形下是期权提交执行的时刻.

在美式期权的情形下, 就已经发生不涉及具体时刻 N, 而是整个停时 τ 的类 $\mathfrak{M}_0^N$, 因而在定理 1 和 2 中取代假定 "$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$", 更为合乎逻辑的是假定市场是强意义下的无套利 (参见第五章 §2a 中的定义 3).

在所考察的离散时间 ($n \leqslant N < \infty$) 和有限种股票 ($d < \infty$) 的情形下, 所有这些概念: "无套利性", "强意义下的无套利性" 和 "$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$" 根据第一基本定理的扩充文本 (第五章 §1e), 都是等价的.

在定理陈述中偏爱于提出条件 "$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$" 的解释如下.

首先, 条件 "$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$" 经常可检验 (在连续时间情形下也是如此); 其次, 术语 "强意义下无套利" 并未被广泛采用, 而关于 "无套利性" 的各种定义与条件 "$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$" 的等价性问题, 特别是在连续时间情形下, 远非是简单问题. (关于这方面, 参见后面的第七章 §§1a, 1c.)

5. 从某种美式期权的出售者的视角来看, 其策略 (π, C) 首先必定是为了满足合约条件. 这就在资本 $X^{\pi,C}$ 上强加上这样的约束: 对于每个 $\tau \in \mathfrak{M}_0^N$, 必定满足 "对冲" 条件: $X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_\tau$ (P-a.s.).

现在自然要提出这样的问题: 购买者明智地把期权提交执行的时刻 $\tau = \tau(\omega)$ 必定是怎样的?

我们将考察无套利完全市场情形, 这是我们感兴趣的局面, 其中市场的无套利完全性 (在离散时间 $n \leqslant N < \infty$, 股票数 $d < \infty$ 的假定下) 等价于存在唯一的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ ("第二基本定理").

在给出问题的解答以前, 我们先把定理 1 和 2 的精确结果对于我们当前感兴趣的情形来改写.

定理 3. 设 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是唯一的鞅测度 ($|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1$) 以及 $f = (f_n)_{n \leqslant N}$ 是非负偿付函数序列, 满足 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \dfrac{f_n}{B_n} < \infty$, $n \leqslant N$.

1) 上价格

$$\boxed{\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\tau}{B_\tau}} \tag{19}$$

2) 存在自融资策略 $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$, 其相应的资本 $X^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ 满足 "平衡" 条件

$$\Delta X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n \Delta B_n + \widetilde{\gamma}_n \Delta S_n - \Delta \widetilde{C}_n; \tag{20}$$

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\tau}{B_\tau} \quad (= \widetilde{\mathbb{C}}^*(f_N; \mathsf{P})); \tag{21}$$

$$X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_\tau, \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}_0^N. \tag{22}$$

资本 $X^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ 的动态变化由下列公式确定:

$$X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_n \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right). \tag{23}$$

3) 成分 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)$ 和 $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_n)$ 由上鞅 $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})_{n \leqslant N}$ 的 Doob 分解来确定, 其中

$$\widetilde{Y}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right),$$

它有下列形式:

$$\widetilde{Y}_n = \widetilde{Y}_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\gamma}_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) - \widetilde{C}_n, \tag{24}$$

而成分 $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)_{n \leqslant N}$ 由下列公式确定:

$$\widetilde{\beta}_n = \widetilde{Y}_n - \widetilde{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}. \tag{25}$$

4) 在关于最优停止问题

$$\text{“} \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\tau}{B_\tau} \text{”} \tag{26}$$

中, 停时

$$\widetilde{\tau} = \min \left\{ 0 \leqslant n \leqslant N : Y_n = \frac{f_n}{B_n} \right\} \tag{27}$$

为最优:

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\tau}{B_\tau} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_{\widetilde{\tau}}}{B_{\widetilde{\tau}}}. \tag{28}$$

这时, 时刻 $\widetilde{\tau}$ 具有下列性质:

$$X_{\widetilde{\tau}}^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_{\widetilde{\tau}} \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \tag{29}$$

而序列 $(\widetilde{Y}_n)_{n \leqslant N}$ 是优于序列 $(f_n)_{n \leqslant N}$ 的最小 $\widetilde{\mathsf{P}}$-上鞅.

证明. 断言 1)–3) 由定理 1 和 2 得到. 这里只需要注意到, 由鞅测度的唯一性不一定能导致可选分解, 而直接运用上鞅 $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})_{n \leqslant N}$ 的下列 *Doob* 分解 (参见第二章 §1b) 即可:

$$\widetilde{Y}_n = \widetilde{M}_n - \widetilde{C}_n. \tag{30}$$

由 “第二基本定理的扩充版本” (第五章 §4f) 得到, 鞅 $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})$ 可表示为下列形式:

$$\widetilde{M}_n = \widetilde{Y}_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\gamma}_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right), \tag{31}$$

它与 (30) 一起导至所要求的表示式 (24).

至于断言 4), 它是在 §2a 中的定理 1 的推论 1 和 3 中陈述的结果的特殊情形.

6. 现在直接转向关于购买者 (基于包含在流 $(\mathscr{F}_n)$ 中的当前信息) 选择时刻 $\widetilde{\tau}$ 作为应该提交期权执行的时刻的 "合理性"、"明智性" 问题.

无论是购买者还是出售者, 在他们运作时, 都是从公式 (19) 确定的价格 $\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P})$ 出发的, 而后者是互相可接受的期权合约价格. (与此相联系参见第五章 §1b 中的第 4 点.)

我们考察所有这样的策略 $(\pi,\overline{C})$: 它们有初始资本 $X_0^{\pi,\overline{C}}=\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P})$, 并实施对冲: $X_n^{\pi,\overline{C}}\geqslant f_n$, $n\leqslant N$. 我们将记这样的策略类为 $\Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P}))$.

资本具有下列最小性质的策略 $(\widetilde{\pi},\widetilde{C})$ 显然属于这一类:

$$f_n\leqslant X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}\leqslant X_n^{\pi,\overline{C}},\quad n\leqslant N, \tag{32}$$

对于每个策略 $(\pi,\overline{C})\in\Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P}))$ 成立. 事实上, 由 "平衡" 条件得到, $\overline{Y}_n=\dfrac{X_n^{\pi,\overline{C}}}{B_n}$ $(n\leqslant N)$ 为优于 $\dfrac{f_n}{B_n}$ $(n\leqslant N)$ 的 $\widetilde{\mathsf{P}}$-上鞅. 而根据定理 3 的断言 4), 序列 $\widetilde{Y}_n$ $(n\leqslant N)$ 是优于 $\dfrac{f_n}{B_n}$ $(n\leqslant N)$ 的最小 $\widetilde{\mathsf{P}}$-上鞅.

因此, $\widetilde{Y}_n\leqslant\overline{Y}_n$, $n\leqslant N$, 连同下列事实:

$$\frac{f_n}{B_n}\leqslant\widetilde{Y}_n=\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n},$$

就证明了不等式 (32).

由这些不等式导出, 对于每个停时 τ, 有

$$f_\tau\leqslant X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}\leqslant X_\tau^{\pi,\overline{C}}, \tag{33}$$

并且很明显, 期权购买者应该选取时刻 τ, 使得对于每个潜在可能的策略 $(\pi,\overline{C})\in\Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P}))$, 出售者不能以正概率获得 "无风险收益" $X_\tau^{\pi,\overline{C}}-f_\tau>0$. 换句话说, 购买者只能对满足下式的停时 τ 执行期权:

$$f_\tau=X_\tau^{\pi,\overline{C}}\ (\mathsf{P}\text{-a.s.}),\ \forall(\pi,\overline{C})=\Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P})). \tag{34}$$

所引进的论证说明了下列定义的合理性.

定义. 满足性质 (34) 的停时 τ 称为期权提交执行的合理时刻. (这样的时刻类记为 $\mathfrak{R}_0^N$.)

定理 4. 每个是最优停时问题 (26) 的解的时刻 $\overline{\tau}$ 为合理时刻. 这时, 在 (27) 中定义的时刻 $\widetilde{\tau}$ 属于 $\mathfrak{R}_0^N$, 并且在这一类中最小: $\widetilde{\tau}\leqslant\overline{\tau}$ (P-a.s.) 对于每个 $\overline{\tau}\in\mathfrak{R}_0^N$ 成立.

证明. 设 $(\pi, \overline{C}) = \Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}))$. 于是, 考虑序列 $\overline{Y}_n = \dfrac{X_n^{\pi,\overline{C}}}{B_n}$ $(n \leqslant N)$ 的 $\widetilde{\mathsf{P}}$-上鞅性质, 我们求得

$$\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}) = X_0^{\pi,\overline{C}} \geqslant B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{X_{\overline{\tau}}^{\pi,\overline{C}}}{B_{\overline{\tau}}} \geqslant B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_{\overline{\tau}}}{B_{\overline{\tau}}}$$
$$= B_0 \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\tau}{B_\tau} = \widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}).$$

因此,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{X_{\overline{\tau}}^{\pi,\overline{C}}}{B_{\overline{\tau}}} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_{\overline{\tau}}}{B_{\overline{\tau}}},$$

并连同性质 $X_{\overline{\tau}}^{\pi,\overline{C}} \geqslant f_{\overline{\tau}}$, 就证明了, 其实, $X_{\overline{\tau}}^{\pi,\overline{C}} = f_{\overline{\tau}}$ (P-a.s.), 即 $\overline{\tau}$ 是合理时刻. 时刻 $\overline{\tau}$ 的最小性质由 [441; 定理 2.12] 得到.

注. 再次强调下列这点是有益的: 最优停时问题 (26) 的解同时也给出了合理价值 $\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P})$ 的值, 并且确定了期权购买者提交执行的合理时刻 $\widetilde{\tau}$. 这时, 照例, 不能分别求出 $\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P})$ 或 $\widetilde{\tau}$, 由问题 (26) 的解, 它们是同时求出的.

§2d. 可选分解

1. 我们将假定, 在有 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ 的渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}, \mathsf{P})$ 上给定与流 $(\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}$ 协调的 $\mathbb{R}$-值过程 $X = (X_n)_{n\leqslant N}$ 和有 $S_n = (S_n^1, \cdots, S_n^d)$ 的 $\mathbb{R}^d$-值过程 $S = (S_n)_{n\leqslant N}$, 即, X_n 和 S_n^i 对于 $n \leqslant N$ 和 $i = 1, \cdots, d$ 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

我们将以 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 表示 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上满足 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 以及关于它过程 S 中的每一个都是鞅的概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的集合. 假定, $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$. 测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 称为 (对于 S 的) 鞅测度.

至于过程 $X = (X_n)_{n\leqslant N}$, 则基本假定将在于对每一个测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, 它是上鞅.

如果对某个具体测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 考察 X, 那么根据 Doob 分解 (第二章 §1b),

$$X_n = X_0 + M_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})} - C_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})}, \tag{1}$$

其中 $M^{(\widetilde{\mathsf{P}})} = (M_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})}, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})$ 是鞅, 以及 $C^{(\widetilde{\mathsf{P}})} = (C_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})}, \mathscr{F}_{n-1}, \widetilde{\mathsf{P}})$ 为不减可料过程, $M_0^{(\widetilde{\mathsf{P}})} = 0$, $C_0^{(\widetilde{\mathsf{P}})} = 0$. 在分解 (1) 中的成分 $M^{(\widetilde{\mathsf{P}})}$ 和 $C^{(\widetilde{\mathsf{P}})}$ 依赖于所考察的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 因而在它们的记号中强调了对测度的依赖性.

在下面引入的定理中, 无非是给出所谓过程 X 的可选分解, 其意义在于它在下列含义下带来了普适特征: 这一分解的成分 (参见 (2)) 对于所有测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 是一样的.

定理. 对于任何鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 为上鞅的过程允许有 (可选) 分解

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k, \Delta S_k) - C_n, \quad n \leqslant N, \tag{2}$$

其中 $\gamma=(\gamma_k)_{k\leqslant N}$ 为可料 $\mathbb{R}^d$-值过程, $C=(C_n)_{n\leqslant N}$ 为有 $\mathscr{F}_n$-可测量 C_n 的不减过程.

在转向证明以前, 我们先注意到, 分解 (1) 和 (2) 之间有本质区别: 在 (1) 中量 $C_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})}$ 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 而在 (2) 中量 C_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测. 正是由于与后一状况相联系, 如同已经所说, 分解 (2) 称为可选分解.

注. 在现在所考察的离散时间情形下, 过程 $C=(C_n)_{n\leqslant N}$ 关于 $(\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}$ 的可选性干脆就意味着与渗透流 $(\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}$ 的协调性或适应性, 即量 C_n 的 $\mathscr{F}_n$-可测性, $n\geqslant 0$. 关于可选性概念参见第三章 §5a, 以及 [250; 第 I 章, §1c].

对于连续时间情形所陈述的定理的第一批文本, 正如在 §1c 中所注意到的, 在著作 [136] 和 [281] 中给出.

随之又出现若干既适用于连续时间、又适用于离散时间的著作 ([99], [163]–[165]), 其中特别是减弱了在 [136] 和 [281] 中所作的假定, 并给出证明的各种版本.

下面引入的证明遵照在 G. Föllmer 和 Yu. M. Kabanov 的著作 [163], [164] 中提出的模式, 并基于在 (2) 中把量 γ_k 作为某个带约束的最优化问题的 *Lagrange* 乘子的思想来得到. (证明也将用于第五章 §2c 中的某些结果.)

2. 如果指出, 量 $\Delta X_n\equiv X_n-X_{n-1}$ 对于每个 $n=1,\cdots,N$ 可表示为下列形式:

$$\Delta X_n=(\gamma_n,\Delta S_n)-c_n, \tag{3}$$

其中 γ_n 是某个 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的 $\mathbb{R}^d$-值量, c_n 是某个非负 $\mathscr{F}_n$-可测量, 那么与 [163] 和 [164] 相应所要求的分解 (2) 将确立.

为了得到 ΔX_n 的这样的表示, 其实只要指出, (在对 X 和 S 所作的假定下) 可求得 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的 $\mathbb{R}^d$-值量 γ_n, 使得

$$\Delta X_n-(\gamma_n,\Delta S_n)\leqslant 0, \tag{4}$$

因为这样只需取量 $(\gamma_n,\Delta S_n)-\Delta X_n$ 作为所要求的量 c_n.

还要注意, 如果 $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})$, 那么

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}|\Delta S_n|<\infty,\quad \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\Delta S_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=0, \tag{5}$$

以及

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}|\Delta X_n|<\infty,\quad \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\Delta X_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})\leqslant 0. \tag{6}$$

如果 P_n 和 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ 是测度 P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 在 $\mathscr{F}$ 上的局限, 且 $Z_n=\dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, 那么根据 "换算引理" (第五章 §3a 中的 "Bayes 公式")①

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\Delta S_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(z_n\Delta S_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}), \tag{7}$$

①原版和英文版在下两式的右端的数学期望都误为 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}$. —— 译者注

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\Delta X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(z_n \Delta X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}), \tag{8}$$

其中 $z_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}}$.

由此不难断定, 所要求的断言 (4) 将由下列有独立的 "纯概率" 意义的一般命题 (其中需要令 $\xi = \Delta X_n$ 和 $\eta = \Delta S_n$) 导出.

引理. *设概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上给定实随机变量 ξ 和 $\mathbb{R}^d$-值向量 $\eta = (\eta^1, \cdots, \eta^d)$. 设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的 σ-子代数, 以及 Z 为所有P-a.s. 满足*

$$\mathsf{E}(z \mid \mathscr{G}) = 1, \quad \mathsf{E}(|\xi| z \mid \mathscr{G}) < \infty. \quad \mathsf{E}(|\eta| z \mid \mathscr{G}) < \infty \tag{9}$$

和

$$\mathsf{E}(z\eta \mid \mathscr{G}) = 0 \tag{10}$$

的随机变量 $z > 0$ 全体.

如果 $Z \neq \varnothing$, 并且对于所有 $z \in Z$,

$$\mathsf{E}(z\xi \mid \mathscr{G}) \leqslant 0, \tag{11}$$

那么可求得 $\mathscr{G}$-可测 $\mathbb{R}^d$-值向量 λ^*, 使得P-a.s. 有

$$\xi + (\lambda^*, \eta) \leqslant 0. \tag{12}$$

证明. a) 当 $\mathscr{G}$ 是平凡 σ-子代数 $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\}$ 时, 证明的思路就变得十分清楚. 在这一情形下, 所求的向量 λ^* 是非随机量, 并且正如下面所指出, 它可以选为某个最优化问题的 "Lagrange 乘子".

在 σ-子代数 $\mathscr{G}$ 不是平凡的情形下, 同样的, 但针对 "每个 ω" 的讨论, 还是能给出向量 λ^*, 它一般不是唯一确定的, 并且将依赖于 ω. 此后的全部问题都在于证明 $\mathscr{G}$-可测选择 λ^* 是可能的.

我们记得, 在第五章 §2e 中, 为证明第一基本定理的扩充版本 (在证明蕴涵关系 a$'$) $\Longrightarrow$ e) 和 e) $\Longrightarrow$ b) 时) 以及为求解决而引入关于 "可测选择" 存在的某些一般结果 (第五章 §2e 分引理 2), 这样的问题已经发生过.

同样的技巧也可应用于现在所考察的模式以及证明 $\mathscr{G}$-可测选择 λ^* 的存在. 参照著作 [163] 和 [164] 中相应讨论的细节, 我们注意到, 这个可测选择问题在离散空间 Ω 中不发生.

b) 这样, 我们将假定 $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\}$.

我们记 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx, dy)$ 是由量 ξ 和 $\eta = (\eta^1, \cdots, \eta^d)$ 所生成的 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 上的测度:

$$\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx, dy) = \mathsf{P}(\xi \in dx, \eta \in dy).$$

不妨碍一般性, 可认为, 随机变量 $\eta^1, \cdots, \eta^d$ 的族形成 (P-a.s.) 线性无关组, 即, 它们是这样的组: 如果某些 $a^1, \cdots, a^d$ 满足 $a^1\eta^1 + \cdots + a^d\eta^d = 0$ (P-a.s.), 那么 $a^1 = \cdots = a^d = 0$. 其实, 在表达式 (12) 中, 成分 $\eta^1, \cdots, \eta^d$ 是以线性形式进入的, 并且如果它们形成线性无关组, 那么问题就归结为考察维数较小的向量 η.

正如在第五章 §2e 中, 我们将记 $L^\circ(\mathsf{Q})$ 为测度 Q 的拓扑支集 $K(\mathsf{Q})$ 的闭凸包 $L(\mathsf{Q})$ 的 "相对" 内部.

设 $x' = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^{d+1}$, 而 $Z(\mathsf{Q})$ 是满足 $\mathsf{E_Q} z = 1$, $\mathsf{E_Q}|x'|z < \infty$ 的 Borel 函数 $z = z(x') > 0$.

我们记

$$\Phi(\mathsf{Q}) = \{\varphi(z)\colon \varphi(z) = \mathsf{E_Q} x' z,\ z \in Z(\mathsf{Q})\}$$

为 (测度 $d\mathsf{Q}' = z d\mathsf{Q}$ 的) 重心族.

由第五章 §2e 的引理 1 得到, $L^\circ(\mathsf{Q}) \subseteq \Phi(\mathsf{Q})$ (其实 $L^\circ(\mathsf{Q}) = \Phi(\mathsf{Q})$) 以及如果 $0 \notin L^\circ(\mathsf{Q})$, 那么可求得 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的向量 γ', 使得

$$\mathsf{Q}\{x'\colon (\gamma', x') \geqslant 0\} = 1, \quad \mathsf{Q}\{x'\colon (\gamma', x') > 0\} > 0. \tag{13}$$

为了证明存在带有性质 (12) 的向量 λ^*, 我们分别考察两种情形:

(i) $0 \notin L^\circ(\mathsf{Q})$;

(ii) $0 \in L^\circ(\mathsf{Q})$.

情形 (i). 根据 (13), 可求得数 γ 和 $\gamma^1, \cdots, \gamma^d$, 使得 (P-a.s.) 有

$$\gamma\xi + (\gamma^1\eta^1 + \cdots + \gamma^d\eta^d) \geqslant 0, \tag{14}$$

以及以正的 P-概率有

$$\gamma\xi + (\gamma^1\eta^1 + \cdots + \gamma^d\eta^d) > 0. \tag{15}$$

我们指出, $\gamma \neq 0$. 其实, 如果 $\gamma = 0$, 那么 $\gamma^1\eta^1 + \cdots + \gamma^d\eta^d \geqslant 0$ (P-a.s.). 因为由假定, 存在鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 使得 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\gamma^1\eta^1 + \cdots + \gamma^d\eta^d) = 0$, 那么 ($\widetilde{\mathsf{P}}$-和 P-a.s.) 有 $\gamma^1\eta^1 + \cdots + \gamma^d\eta^d = 0$.

由 $\eta^1, \cdots, \eta^d$ 的线性无关假定, 由此得到 $\gamma^1 = \cdots = \gamma^d = 0$. 然而, 这与 (15) 矛盾.

这样, $\gamma \neq 0$, 并由假定 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\xi \leqslant 0$, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\eta^i = 0$ 和 (14), 我们求得 $\gamma < 0$.

令 $\lambda^i = \dfrac{\gamma_i}{\gamma}$, $i = 1, \cdots, d$, 由 (14) 我们得到不等式

$$\xi + (\lambda^1\eta^1 + \cdots + \lambda^d\eta^d) \leqslant 0,$$

它也证明了在情形 (i) 下所要求的性质 (12), 其中 $\lambda^* = (\lambda^1, \cdots, \lambda^d)$.

情形 (ii) 有点复杂, 而也正是对于这种情形的讨论将运用著作 [163] 和 [164] 中所运用的转向 "Lagrange 乘子" 的思路.

设

$$\varphi_\xi(z) = \mathsf{E}_\mathsf{Q} xz, \quad \varphi_\eta(z) = \mathsf{E}_\mathsf{Q} yz$$

为 $\varphi(z)$ 的重心成分.

记

$$Z_0(\mathsf{Q}) = \{z \in Z(\mathsf{Q}) \colon \varphi_\eta(z) = 0\}$$

和

$$\Phi_0(\mathsf{Q}) = \{\varphi(z) = (\varphi_\xi(z), \varphi_\eta(z)) \colon z \in Z_0(\mathsf{Q})\}.$$

根据引理条件, $Z_0(\mathsf{Q}) \neq \varnothing$ 以及

$$z \in Z_0(\mathsf{Q}) \implies \varphi_\xi(z) \leqslant 0. \tag{16}$$

如果 $0 \in L^\circ(\mathsf{Q})$, 那么由已经注意到的性质, $L^\circ(\mathsf{Q}) \subseteq \Phi(\mathsf{Q})$ 以及第五章 §2e, 我们求得, 存在 $z_0 \in Z_0(\mathsf{Q})$, 使得 $\varphi_\xi(z_0) = 0$. 因此, 在所考察的情形 (ii) 下,

$$\sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z) = 0, \tag{17}$$

它可用下列方式来解释: 在 (ii) 的假定下, "最优化问题":

$$\text{“求 } f^* \equiv \sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z)\text{”} \tag{18}$$

中的值 f^* 等于零.

遵照 [163] 和 [164], 我们把问题 (18) 改写为带约束的最优化问题:

$$\text{“在补充约束 } \varphi_\eta(z) = 0 \text{ 下, 求 } f^* \equiv \sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z)\text{”}. \tag{19}$$

根据变分学原理, 问题 (19) 的解必定等价于对某个非零向量 λ^* ("Lagrange 乘子"), 解下列 "最优化问题":

$$\text{“求 } f^* \equiv \sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z))\text{”}. \tag{20}$$

(为简单起见这里和以后都把向量 a 和 b 的纯量积 (a, b) 表示为 ab.)

我们引入自身也很有意义的问题 (19) 和 (20) 的等价性证明, 尽管对于我们的目标来说, 其实完全只需证明在 (ii) 的假定下, 至少对于某个非零向量 λ^*, 有下列不等式成立:

$$\sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z)) \leqslant 0. \tag{21}$$

设

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \colon x < \varphi_\xi(z), y = \varphi_\eta(z) \text{ 对于某个 } z \in Z(\mathsf{Q})\}.$$

这个集合是非空凸集. 这时, 由 (ii) 的假定, 点 $(0,0) \notin A$, 而这就是说, 它与集合 A 可用超平面来 "分离", 即, 可求得非零向量 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, 使得

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y \leqslant 0 \tag{22}$$

对于任何集合 A 的闭包中的所有 (x, y) 成立. (参见例如, [241; §0.1]; 注意, 与情形 (i) 中一样, 本质上都是利用 "分离性" 观念.)

我们察觉, 点 $(x, 0)$ 对于任何负值 x 显然属于集合 A. 因此, 在 (22) 中 $\lambda_1 \geqslant 0$.

如果又假定, $\lambda_1 = 0$, 那么这时由 (21) 我们求得, 对于任何 $z \in Z(\mathsf{Q})$,

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(\lambda_2 y) z = \lambda_2 \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} y z = \lambda_2 \varphi_\eta(z) \leqslant 0. \tag{23}$$

因此, 由 $z \in Z(\mathsf{Q})$ 的任意性, 我们求得 $\lambda_2 y \leqslant 0$ (Q-a.s.), 即 $\lambda_2 \eta \leqslant 0$ (P-a.s.).

由于 $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$, 故对于 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的某个测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 满足等式 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \lambda_2 \eta = 0$, 它与性质 $\lambda_2 \eta \leqslant 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.) 一起导得与上面所作的假定相矛盾的线性相关性 ($\lambda_2 \eta = 0$). 从而, $\lambda_2 = 0$.

因此, 如果 $\lambda_1 = 0$, 那么也有 $\lambda_2 = 0$, 与 (21) 中的向量 (λ_1, λ_2) 非零相矛盾.

这样, 就有 $\lambda_1 > 0$.

令 $\lambda^* = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$. 于是由 (21) 和集合 A 的定义, 我们断定, 对于任何 $z \in Z(\mathsf{Q})$ 和任何 $\varepsilon > 0$, 有

$$(\varphi_\xi(z) - \varepsilon) + \lambda^* \varphi_\eta(z) \leqslant 0.$$

由 $\varepsilon \to 0$ 的极限过程, 我们就得到不等式

$$\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z) \leqslant 0, \quad z \in Z(\mathsf{Q}),$$

它等价于

$$\sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z)) \leqslant 0. \tag{24}$$

现在我们察觉, 显然对于任何 $\lambda \in \mathbb{R}^d$ 有

$$\begin{aligned} \sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda \varphi_\eta(z)) &\geqslant \sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda \varphi_\eta(z)) \\ &= \sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z). \end{aligned} \tag{25}$$

如果 (ii) 中的性质满足, 那么 (25) 的右端等于零, 而左端当 $\lambda = \lambda^*$ 时等于零. 从而, 在 (ii) 的假定下,

$$\sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z) \iff \sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda \varphi_\eta(z)) = 0,$$

这就建立了问题 (19) 和 (20) 的等价性, 它可用下列方式解释: 在最优化问题 (19) 中, Lagrange 乘子 "解除了" 约束 $\varphi_\eta(z)=0$.

回到不等式 (24) 或者回到等价的不等式

$$\varphi_\xi(z)+\lambda^*\varphi_\eta(z)\leqslant 0,\quad z\in Z(\mathsf{Q}), \tag{26}$$

它可改写为

$$\mathsf{E_Q}z(x+\lambda^*y)\leqslant 0,\quad z\in Z(\mathsf{Q}).$$

由空间 $Z(\mathsf{Q})$ 充分 "丰富", 由此断定, $x+\lambda^*y\leqslant 0$ (Q-a.s.), 它也证明了在 $\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega\}$ 的假定下, 证明了所要求的性质 (12).

在一般情形下, 正如上面所注意到, 需要与 $\mathsf{Q}(dx,dy)$ 一起考察正则分布条件

$$\mathsf{Q}(\omega;dx,dy)=\mathsf{P}(\xi\in dx,\eta\in dy\,|\,\mathscr{G})(\omega),$$

并对于 "每个 ω" 导出 $\lambda^*=\lambda^*(\omega)$ 的存在证明. 在结论阶段需要建立 $\mathscr{G}$-可测文本选择 $\lambda^*=\lambda^*(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$ 的可能性, 这就转向可测选择的一般结果; 第五章 §2e 中的引理可以作为这种一般结果的例子. 相应的细节参见 [163] 和 [164].

3. "大" 无套利市场的系列模式和渐近套利

§3a. "大" 金融市场模型

1. 我们曾在第一章 §2d 中叙述 S. Ross 创建的套利定价理论 (APT) 的基本原理时遇到过 "大" 市场和渐近套利的概念.

类似于 G. Markowitz 理论 (第一章 §2b) 基于各种证券组合的资本的均值和方差, S. Ross 的渐近套利理论中同样是借助于这些数字特征来确立的.

在本节中, 渐近套利的定义将有点不同, 它将与第五章 §2a 中所考察的 "套利" 概念更相符, 并且就其精神而言, 与贯串在我们的所有叙述中的 "鞅" 方法更加互相呼应.

2. 前面广泛采用的由银行账户 $B=(B_k)_{k\leqslant n}$ 和由给定在某个渗透概率空间

$$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_k)_{k\leqslant n},\mathsf{P})$$

上的有 $S_k=(S_k^1,\cdots,S_k^d)$ 的 d-维股票 $S=(S_k)_{k\leqslant n}$ 的 (B,S)-市场模型, 现在将被假定有 n-市场系列模式:

$$(B^n,S^n)=(B_k^n,S_k^n)_{k\leqslant k(n)},$$

其中 $S_k^n=(S_k^{n,1},\cdots,S_k^{n,d(n)})$, 它们中的每一个都 "在其自己的渗透概率空间上运作", 这里, "自己的渗透概率空间" 是指

$$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,(\mathscr{F}_k^n)_{k\leqslant k(n)},\mathsf{P}^n). \tag{1}$$

假定 $n \geqslant 1$ 以及 $\mathscr{F}_0^n = \{\varnothing, \Omega^n\}$, $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}_{k(n)}^n$, $k(n) < \infty$, $d(n) < \infty$.

由于我们的主要兴趣在于考察在 $n \to \infty$ 时, $k(n) \to \infty$ 和/或 $d(n) \to \infty$ 的情形, 故正是在这一意义下来要求术语 “大” 市场.

注. 在考察渗透概率空间的系列模式时, 指标 n 将对应系列编号, 而指标 k 将起着时间参数的作用.

3. 设 $X^{\pi(n)} = (X_k^{\pi(n)})_{k \leqslant k(n)}$ 是在 (B^n, S^n)-市场上的某个自融资组合 $\pi(n)$ 的资本.

我们记得, 根据所采用的叙述, 假定量 B_k^n 为正和 $\mathscr{F}_{k-1}^n$-可测. 正如这已经在第五章 §2b 的最后所解释的, 不妨碍一般性, 可假定 $B_k^n \equiv 1$, 它对应过渡为考察折现价格. 在这一情形下,

$$X_k^{\pi(n)} = X_0^{\pi(n)} + \sum_{l=1}^{k} (\gamma_l^n, \Delta S_l^n),$$

其中 $(\gamma_l^n, \Delta S_l^n) = \sum\limits_{i=1}^{d(n)} \gamma_l^{n,i} \Delta S_l^{n,i}$.

定义 1. 我们将说, 在 n-市场 (B^n, S^n) 序列的系列模式 $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$ 中, 策略 $\pi = (\pi(n))_{n \geqslant 1}$ 实现了渐近无套利, 是指

$$\lim_n X_0^{\pi(n)} = 0, \tag{2}$$

$$X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant -c(n)\ (\mathsf{P}^n\text{-a.s.}),\ n \geqslant 1, \tag{3}$$

其中 $0 \leqslant c(n) \downarrow 0$, $n \to \infty$, 以及

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_n \mathsf{P}^n \left(X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon \right) > 0. \tag{4}$$

如果运用所引入的记号和概念, 那么可以说 (比第五章 §2d 中的讨论略微一般), 第一章 §2d 中所考虑的APT 中的渐近套利在可求得子列 $(n') \subseteq (n)$ 和策略序列 $(\pi(n'))$ 使得当 $n' \to \infty$ 时, $X_0^{\pi(n')} = 0$, $\mathsf{E}X_{k(n')}^{\pi(n')} \to \infty$, $\mathsf{D}X_{k(n')}^{\pi(n')} \to 0$ 的情形下成立①.

上面提出的渐近套利的定义 (4) 从 “鞅” 的视角来看比起APT 理论的定义来更美观、更合适; 这可如下解释.

首先, 定义 (4) 可看作以前 (第五章 §2a) 采用的套利机会的自然推广; 正如我们由第一基本定理所知, 它使得 “套利理论” 与 “鞅论和随机分析” 以最直接的方式联系起来.

其次, 在定义 (4) 的情形下, 也在一系列其他派生定义的情形下 (参见 [260], [261], [273]), 成功得到无渐近套利的有效判别准则, 它同时还可表达为在随机过程统计中

①这一段的叙述根据英文版. 括号中的 “第五章 §2a” 在原版上误为 “第二章 §2d”. 而后面的 “第一章 §2d” 是英文版加上的. ——译者注

众所周知的诸如 "Hellinger 积分", "Hellinger 过程" 那样的概念的术语 (参见 [250; 第 V 章]).

4. 定义 2. 表示为 n-市场全体 $\{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$ 的 $(\mathbb{B}, \mathbb{S})$-市场称为*局部无套利的*, 是指对于每个 $n \geqslant 1$, 市场 (B^n, S^n) 是无套利的 (第五章 §2a).

下面考察的基本问题在于求出使得局部无套利 $(\mathbb{B}, \mathbb{S})$-市场不产生 (在上述定义 1 的含义下) 渐近套利的条件.

当 $n \to \infty$ 时产生渐近套利可能有各种原因: 股票个数的增加 $(d(n) \to \infty)$, 时间区间的增加 ($k(n) \to \infty$; 参见例如第五章 §2b 中的例 2), "测度的渐近等价性" 可能被破坏. 渐近套利的出现也可能与这些原因的组合作用相联系.

与概率测度序列的上述 "测度的渐近等价性"、以至相应的 "绝对连续性" 和 "奇异性" 的渐近概念相联系, 我们注意到, 它们可通过引入 "连续性" 和 "完全渐近可分性" 的概念 (参见 [250; 第 V 章], 其中也用 Hellinger 积分和 Hellinger 过程的术语来描述满足它们的判别准则), 来作出精确的陈述.

这些概念对于大市场上的渐近套利问题的重要性首先在 Yu. M. Kabanov 和 D. O. Kramkov 的著作 [261] 中指出, 其中还引入了*第一种和第二种渐近套利*. (在渐近套利的定义 1 中, 本质上重合于第一种渐近套利.) 渐近套利理论的重大进展是后来在 I. Klein 和 V. Schachemayer 的著作 [273] 以及 Yu. M. Kabanov 和 D. O. Kramkov 的著作 [260] 中获得的.

§3b. 无渐近套利判别准则

1. 设 $X^{\pi(n)} = (X_k^{\pi(n)})_{k \leqslant k(n)}$ 是有 $B_k^n \equiv 1$ 的 (B^n, S^n)-市场上的某个自融资组合的资本:

$$X_k^{\pi(n)} = X_0^{\pi(n)} + \sum_{l=1}^{k} (\gamma_l^n, \Delta S_l^n). \tag{1}$$

如果 Q^n 是 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$ 上的某个测度, 满足 $\mathsf{Q}^n \ll \mathsf{P}^n$, 那么根据 "Bayes 公式" (第五章 §3a 中的公式 (4)), 我们求得 (Q^n-a.s.)

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}^n}\left(X_{k(n)}^{\pi(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_k^n\right) = \frac{1}{Z_k^n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left(X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n \,\middle|\, \mathscr{F}_k^n\right), \tag{2}$$

其中 $Z_k^n = \dfrac{d\mathsf{Q}_k^n}{d\mathsf{P}_k^n}$, $\mathsf{Q}_k^n = \mathsf{Q}^n \mid \mathscr{F}_k^n$, $\mathsf{P}_k^n = \mathsf{P}^n \mid \mathscr{F}_k^n$. (假定 (2) 的左端中的条件数学期望有定义.)

我们将假定, 每个 n-市场 (B^n, S^n) $(n \geqslant 1)$ *是无套利的*, 因此, 对应第一基本定理 (第五章 §§2b, 2e), 鞅测度族 $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n) \neq \varnothing$.

设 $\widetilde{\mathsf{P}}^n \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ 以及 $\pi(n)$ 为满足下列条件的策略:

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\left(X_{k(n)}^{\pi(n)}\right)^- < \infty. \tag{3}$$

于是由第二章 §1c 中的引理, 我们求得, 序列 $X^{\pi(n)} = \left(X_k^{\pi(n)}\right)_{k\leqslant k(n)}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 为鞅. 这就是说, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\left|X_{k(n)}^{\pi(n)}\right| < \infty$ 以及对于 $k \leqslant k(n)$, 有

$$X_k^{\pi(n)} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\left(X_{k(n)}^{\pi(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_k^n\right). \tag{4}$$

显然, $\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left|X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n\right| = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\left|X_{k(n)}^{\pi(n)}\right| < \infty$, 且由 (2) 和 (4),

$$X_k^{\pi(n)} Z_k^n = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left(X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n \,\middle|\, \mathscr{F}_k^n\right) \ (\widetilde{\mathsf{P}}^n\text{-a.s. 和 } \mathsf{P}^n\text{-a.s.}). \tag{5}$$

这样一来, 假定 (3) 在所考察的离散时间 $k \leqslant k(n) < \infty$ 的情形下, 确保

$$\left(X_k^{\pi(n)}, \mathscr{F}_k^n, \widetilde{\mathsf{P}}^n\right)_{k\leqslant k(n)} \quad \text{和} \quad \left(X_k^{\pi(n)} Z_k^n, \mathscr{F}_k^n, \mathsf{P}^n\right)_{k\leqslant k(n)}$$

是鞅. (比较第五章 §3d 中的引理.)

特别是,

$$X_0^{\pi(n)} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n} X_{k(n)}^{\pi(n)}, \tag{6}$$

$$X_0^{\pi(n)} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n. \tag{7}$$

这两个等价关系式中的每一个都能用来得到所考察的策略 $\pi(n)$ 为无套利、而策略序列 $\pi = (\pi(n))_{n\geqslant 1}$ 为渐近无套利的条件. (注意, 在实质上, 正是这些关系式也在第五章 §2c 中用来证明第一基本定理中的“充分性”.)

注. 为使公式 (4)–(7) 成立并不需要要求 $\widetilde{\mathsf{P}}^n \sim \mathsf{P}^n$, 而只要条件 $\widetilde{\mathsf{P}}^n \ll \mathsf{P}^n$ 满足. 然而, 如果比如由 (7) 要导出无套利, 性质 $\mathsf{P}^n \ll \widetilde{\mathsf{P}}^n$ 总被假定成立.

事实上, 设策略 $\pi(n)$ 满足 $X_0^{\pi(n)} = 0$, $X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant 0$ (P-a.s.), 以及 $A = \{X_{k(n)}^{\pi(n)} > 0\}$. 于是由 (7) 很明显, 如果在集合 A 上 $Z_{k(n)}^n = 0$, 那么关于集合 A 的概率 $\mathsf{P}^n(A)$ 就没有什么可说的. 因此, 为使由假定 $\mathsf{P}^n\left(X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant 0\right) = 1$ 和等式 $0 = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n$ 可断定性质 $\mathsf{P}^n\left(X_{k(n)}^{\pi(n)} = 0\right) = 1$, 就还要假定 $\mathsf{P}^n(Z_{k(n)}^n > 0) = 1$. (根据第五章 §3a 中的定理的断言 f), 由此导出绝对连续性 $\mathsf{P}^n \ll \widetilde{\mathsf{P}}^n$.)

这样, 在鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 的概念中再加上要求它与测度 P^n 的等价性, 特别是确保有下列性质:

$$0 < Z_{k(n)} < \infty \ \ (\mathsf{P}^n\text{-a.s.}). \tag{8}$$

2. 为简单起见, 我们寻求无渐近套利判别准则从“定常”情形出发, 它理解为 $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$-市场有下列特殊结构: 存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0}, \mathsf{P})$, $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_k$ 和 $(d+1)$-维过程 $(B, S) = (B_k, S_k)_{k\geqslant 0}$, 其中 B_k 为 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测, $S_k = (S_k^1, \cdots, S_h^d)$ 为 $\mathscr{F}_k$-可测, 使得 n-市场中的每一个带有 $k(n) = n$ 的 $(B^n, S^n) = (B_k, S_k)_{k\leqslant k(n)}$.

显然, (运用 “系列模式” 的语言) 可认为, 市场 (B^n, S^n) 给定在 “自己的” 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}^n_k)_{k\leqslant n}, \mathsf{P}^n)$ 上, 其中每个 $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}_n$, $\mathscr{F}^n_k = \mathscr{F}_k$, $k \leqslant n$, 以及 $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}^n$.

另一方面, 还可以说, 在 “定常” 情形下, 股票数 $d(n)$ 不随 n 而改变 $(d(n) \equiv d)$, 而每个 $(n+1)$-市场 (B^{n+1}, S^{n+1}) 是 n-市场 (B^n, S^n) 的 “延续”.

我们将记 $\widetilde{\mathbb{P}} = \{(\widetilde{\mathsf{P}}_k)_{k\geqslant 1}\}$ 为具有下列协调性质的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_k$ 的序列 $(\widetilde{\mathsf{P}}_k)_{k\geqslant 1}$ 的族: $\widetilde{\mathsf{P}}_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k = \widetilde{\mathsf{P}}_k$, $k \geqslant 1$.

对于每个这样的测度序列 $(\widetilde{\mathsf{P}}_k)_{k\geqslant 1}$, 我们定义相应的 Radom-Nikodym 导数 $Z_k = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_k}{d\mathsf{P}_k}$ $(k \geqslant 1,\ Z_0 = 1)$ 的序列 $Z = (Z_k)_{k\geqslant 0}$.

设

$$\mathbb{Z}_k = \left\{ Z_k \colon Z_k = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_k}{d\mathsf{P}_k},\ \widetilde{\mathsf{P}}_k \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^k) \right\}$$

和

$$\mathbb{Z}_\infty = \left\{ Z_k \colon Z_\infty = \overline{\lim_k}\, \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_k}{d\mathsf{P}_k},\ (\widetilde{\mathsf{P}}_k)_{k\geqslant 1} \in \widetilde{\mathbb{P}} \right\}.$$

我们察觉, 虽然并没有假定存在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得 $\widetilde{\mathsf{P}}_k = \widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_k$, 由性质 $\widetilde{\mathsf{P}}_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k = \widetilde{\mathsf{P}}_k$, 我们仍然有序列 $(Z_k, \mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0}$ 关于测度 P 是 (正) 鞅. 因此, 由 Doob 收敛性定理 (第五章 §3a), P-a.s. 存在 $\lim Z_k\ (= Z_\infty)$, 这时, $0 \leqslant \mathsf{E} Z_\infty \leqslant 1$.

定理 1 (“定常情形”). *在局部无套利市场* $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$ *上, 条件*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim_k} \inf_{Z_k \in \mathbb{Z}_k} \mathsf{P}(Z_k < \varepsilon) = 0 \tag{9}$$

对于无渐近套利是充要的, 而条件

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{Z_\infty \in \mathbb{Z}_\infty} \mathsf{P}(Z_\infty < \varepsilon) = 0 \tag{10}$$

是充分的.

证明. 条件 (9) 的充分性证明比较简单, 将在下面引入. (条件 (10) 的充分性也由 (10) $\Longrightarrow$ (9) 可得.) 必要性证明有点复杂. 它依靠有关概率测度的相邻性的某些结果, 并将在下面的 §3c (第 9 点) 中给出.

设 $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1} \in \widetilde{\mathbb{P}}$ 和 $\pi = (\pi(n))_{n\geqslant 1}$ 为满足 §3a 中的条件 (3) 的 $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$-市场上的策略序列. 于是条件 (3) 满足, 而这就是说, 性质 (6) 成立, 它在所考察的 “定常” 情形下, 取形式为

$$X_0^{\pi(n)} = \mathsf{E} Z_n X_n^{\pi(n)}. \tag{11}$$

取 $\varepsilon > 0$, 由此求得

$$\begin{aligned}\mathbf{E} Z_n X_n^{\pi(n)} = \mathsf{E} Z_n X_n^{\pi(n)} &\Big[I(-c(n) \leqslant X_n^{\pi(n)} < 0) \\ &+ I\left(0 \leqslant X_n^{\pi(n)} < \varepsilon\right) + I\left(X_n^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon\right)\Big] \\ &\geqslant -c(n) + \mathsf{E} Z_n X_n^{\pi(n)} I(Z_n \geqslant \varepsilon) I\left(X_n^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon\right) \\ &\geqslant -c(n) + \varepsilon^2 \mathsf{P}\left(X_n^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon, Z_n \geqslant \varepsilon\right) \\ &\geqslant -c(n) + \varepsilon^2 \left[\mathsf{P}\left(X_n^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon\right) - \mathsf{P}(Z_n < \varepsilon)\right],\end{aligned}$$

而这就是说,

$$X_0^{\pi(n)} + c(n) + \varepsilon^2 \mathsf{P}(Z_n < \varepsilon) \geqslant \varepsilon^2 \mathsf{P}\left(X_n^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon\right). \tag{12}$$

如果 §3a 中的条件 (2) 和 (3) 满足, 那么由序列 $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1} \in \widetilde{\mathbb{P}}$ 的任意性, 由 (12) 可见,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim_{n}} \inf_{Z_n \in \mathbb{Z}_n} \mathsf{P}(Z_n < \varepsilon) \geqslant \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim_{n}} \mathsf{P}\left(X_n^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon\right). \tag{13}$$

因此, 很明显, 在具有假定 (9) 以及因而显然有条件 (10) 的情况下, 有 §3a 的性质 (2)–(4) 的策略序列不可能实现渐近套利.

推论. 设 $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1}$ 是某个 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 中的序列, $Z_\infty = \overline{\lim} \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$. 那么条件 $\mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1$ 确保无渐近套利.

3. 我们转向考察一般情形, 认为每个无套利 n-市场 (B^n, S^n), $n \geqslant 1$, 给定在 "自己的" 渗透概率空间

$$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}_k^n)_{k\leqslant k(n)}, \mathsf{P}^n)$$

上, 其中 $\mathscr{F}_{k(n)}^n = \mathscr{F}^n$.

如果 $\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n$ 为某个鞅测度,

$$\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n \sim \mathsf{P}_{k(n)}^n \quad \text{以及} \quad Z_{k(n)}^n = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n}{d\mathsf{P}_{k(n)}^n},$$

那么类似于 (12) 我们求得

$$X_0^{\pi(n)} + c(n) + \varepsilon^2 \mathsf{P}^n(Z_{k(n)}^n < \varepsilon) \geqslant \varepsilon^2 \mathsf{P}^n\left(X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon\right). \tag{14}$$

记

$$\mathbb{Z}_{k(n)}^n = \left\{ Z_{k(n)}^n : Z_{k(n)}^n = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n}{d\mathsf{P}_{k(n)}^n}, \widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n \in \mathscr{P}(\mathsf{P}_{k(n)}^n) \right\}.$$

定理 2. 设 $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$ 为局部无套利 "大" 市场.

条件

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim_{n}} \inf_{Z^n_{k(n)} \in \mathbb{Z}^n_{k(n)}} \mathsf{P}^n(Z^n_{k(n)} < \varepsilon) = 0 \tag{15}$$

为无渐近套利的充要条件.

证明. 条件 (15) 的充分性如同在“定常”情形下一样由 (14) 得到. 必要性的证明参见下面的 §3c 中的第 9 点.

§3c. 渐近套利和临近性

1. 由本章上面的所有有关套利理论的叙述中, 论证“概率测度的绝对连续性”显然在这一理论中起着相当重要的作用. 下面的叙述指出, 对于渐近套利理论来说, 起着关键作用的概念是概率测度的临近性概念, 它是数理统计渐近问题中的重要观念性概念之一.

为了以最自然的途径引入临近性概念, 我们先考察“定常”情形 (其定义和记号参见 §2b 中的第 2 点).

设 $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 中的某个 (协调) 鞅测度序列. 假定, 在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上还存在测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得 $\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$, $n \geqslant 1$.

我们记得 (参见第五章 §3a), 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 和 P 称为*局部等价* ($\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$), 是指 $\widetilde{\mathsf{P}}_n \sim \mathsf{P}_n$, $n \geqslant 1$.

这里重要的是要强调, 由性质 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 一般来说得不到下列性质中的任何一个: $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$, $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$.

根据上节中的推论, 如果

$$\mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1, \tag{1}$$

其中 $Z_\infty = \overline{\lim}\, Z_n$, $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, 那么无渐近套利.

根据第五章 §3a 的定理中的蕴涵关系 (i) $\Longleftrightarrow$ (iii), 条件 (1) (在所考察的 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 的假定下) 等价于 $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$. 这样一来, 条件 $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$ (当然, 如同条件 (1) 一样) 就可看作, 在引进 n-市场的概率测度时, 阻碍 $n \to \infty$ 时出现渐近套利的 (性质 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 的) 补充要求.

同样, 当 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1})$ 有 $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$, 而没有带性质 $\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$ $(n \geqslant 1)$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 时, 为陈述相应的类似断言

$$\mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1 \iff \mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}, \tag{2}$$

重要的是下列定义.

定义 1. 设在可测空间 $(E^n, \mathscr{E}^n)$ 上给定概率测度 Q^n 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$, $n \geqslant 1$.

测度序列 $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n)_{n\geqslant 1}$ 称为关于序列 $(\mathsf{Q}^n)_{n\geqslant 1}$ 邻近 (记为 $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n)$), 是指对于所有有性质 $\mathsf{Q}^n(A^n) \to 0$ $(n \to \infty)$ 的集合序列 $A^n \in \mathscr{E}^n$, 也有性质 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n(A^n) \to 0$ $(n \to \infty)$ 成立.

注 1. 当空间 $(E^n, \mathscr{E}^n)$ 和测度 Q^n 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$ 不依赖于 n 时 ($(E^n, \mathscr{E}^n) \equiv (E, \mathscr{E})$, $\mathsf{Q}^n \equiv \mathsf{Q}$, $\widetilde{\mathsf{Q}}^n \equiv \widetilde{\mathsf{Q}}$), 邻近性质 $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n)$ 就转化为 $(E, \mathscr{E})$ 上的测度 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 的绝对连续性 $\widetilde{\mathsf{Q}} \ll \mathsf{Q}$.

定理 1 ("定常" 情形). 设 $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)$ 是 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 中的某个鞅测度序列. 那么

$$\mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1 \iff (\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n). \tag{3}$$

邻近性条件 $(\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n)$ 的满足确保渐近无套利.

如果 $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)$ 是唯一的鞅序列, 那么条件 $(\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n)$ 是无渐近套利的充要条件.

证明. 定理的证明由上节的定理 1 和下面引入的包含某些有用的邻近性判别准则的引理 1 直接导出. 为陈述后者, 我们需要某些补充记号和定义.

2. 设 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 是可测空间 $(E, \mathscr{E})$ 上的两个概率测度, $\overline{\mathsf{Q}} = \dfrac{1}{2}(\mathsf{Q} + \widetilde{\mathsf{Q}})$, $\mathfrak{z} = \dfrac{d\mathsf{Q}}{d\overline{\mathsf{Q}}}$, $\widetilde{\mathfrak{z}} = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{Q}}}{d\overline{\mathsf{Q}}}$, $Z = \dfrac{\widetilde{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}}$. (Radon-Nikodym 导数 $\mathfrak{z}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{z}}$ 的文本可挑选为使得 $\mathfrak{z} + \widetilde{\mathfrak{z}} \equiv 2$.)

现在我们记起, 根据 *Lebesgue* 分解 (参见例如, [439; 第 III 章]), 测度 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 可表示为下列形式:

$$\widetilde{\mathsf{Q}} = \widetilde{\mathsf{Q}}_1 + \widetilde{\mathsf{Q}}_2,$$

其中测度

$$\widetilde{\mathsf{Q}}_1(A) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} Z I_A, \qquad \widetilde{\mathsf{Q}}_2(A) = \widetilde{\mathsf{Q}}(A \cap (Z = \infty)).$$

由于 $\mathsf{Q}(Z < \infty) = 1$, 故 $\widetilde{\mathsf{Q}}_1 \ll \mathsf{Q}$ 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}_2 \perp \mathsf{Q}$.

这样一来, Z 无非就是测度 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 关于测度 Q 的绝对连续成分的 Radon-Nikodym 导数. $\left(\text{正是应该在这一含义下, 来理解用于 } Z \text{ 的记号 } \dfrac{d\widetilde{\mathsf{Q}}}{d\mathsf{Q}}.\right)$

定义 2. 设 $\alpha \in (0, 1)$ 以及

$$H(\alpha; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{Q}}} \mathfrak{z}^\alpha \widetilde{\mathfrak{z}}^{1-\alpha}, \tag{4}$$

$$H(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = H\left(\frac{1}{2}; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}\right), \tag{5}$$

$$\rho(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = \sqrt{1 - H(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})}. \tag{6}$$

$H(\alpha; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})$ 称为测度 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 之间的 α 阶 *Hellinger* 积分, $H(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})$ 称为 *Hellinger* 积分, 而 $\rho(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})$ 称为测度 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 之间的 *Hellinger* 距离.

可以证明 (参见 [250; 第 IV 章, §1a]), 值 $H(\alpha;\mathsf{Q},\widetilde{\mathsf{Q}})$ 其实不依赖于控制测度 $\overline{\mathsf{Q}}$ 的选择. 这个性质解释了经常运用的记号

$$H(\alpha;\mathsf{Q},\widetilde{\mathsf{Q}})=\int_E(d\mathsf{Q})^{\alpha}(d\widetilde{\mathsf{Q}})^{1-\alpha}, \tag{7}$$

$$H(\mathsf{Q},\widetilde{\mathsf{Q}})=\int_E\sqrt{d\mathsf{Q}d\widetilde{\mathsf{Q}}}, \tag{8}$$

$$\rho(\mathsf{Q},\widetilde{\mathsf{Q}})=\frac{1}{2}\int_E\left(\sqrt{d\mathsf{Q}}-\sqrt{d\widetilde{\mathsf{Q}}}\right)^2. \tag{9}$$

例. 设 $\mathsf{Q}=\mathsf{Q}_1\times\mathsf{Q}_2\times\cdots$, $\widetilde{\mathsf{Q}}=\widetilde{\mathsf{Q}}_1\times\widetilde{\mathsf{Q}}_2\times\cdots$, 其中 Q_k 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}_k$ 是在 $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上的高斯测度, 其密度分别为

$$q_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}},$$

$$\widetilde{q}_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}e^{-\frac{(x-\widetilde{\mu}_k)^2}{2\sigma_k^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}H(\alpha;\mathsf{Q}_k,\widetilde{\mathsf{Q}}_k)&=\int_{\mathbb{R}}(d\mathsf{Q}_k)^{\alpha}(d\widetilde{\mathsf{Q}}_k)^{1-\alpha}=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{d\widetilde{\mathsf{Q}}_k}{d\mathsf{Q}_k}\right)^{1-\alpha}d\mathsf{Q}_k\\&=\int_{\mathbb{R}}q_k^{\alpha}(x)\widetilde{q}_k^{1-\alpha}(x)dx=\exp\left\{-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{\mu_k-\widetilde{\mu}_k}{\sigma_k}\right)^2\right\},\end{aligned}$$

因而,

$$H(\alpha;\mathsf{Q},\widetilde{\mathsf{Q}})=\exp\left\{-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k-\widetilde{\mu}_k}{\sigma_k}\right)^2\right\}. \tag{10}$$

引理 1. 设 $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 是具有测度 Q^n 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$ $(n\geqslant 1)$ 的可测空间. 下列断言等价 $\left(\mathfrak{z}^n=\dfrac{d\mathsf{Q}^n}{d\overline{\mathsf{Q}}^n},\ Z^n=\dfrac{d\widetilde{\mathsf{Q}}^n}{d\mathsf{Q}^n},\ \overline{\mathsf{Q}}^n=\dfrac{1}{2}\left(\mathsf{Q}^n+\widetilde{\mathsf{Q}}^n\right)\right)$:

a) $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n)\lhd(\mathsf{Q}^n)$;

b) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\varlimsup\limits_{n}\widetilde{\mathsf{Q}}^n(\mathfrak{z}^n<\varepsilon)=0$;

c) $\lim\limits_{N\uparrow\infty}\varlimsup\limits_{n}\widetilde{\mathsf{Q}}^n(Z^n>N)=0$;

d) $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\varliminf\limits_{n}H(\alpha;\mathsf{Q}^n,\widetilde{\mathsf{Q}}^n)=1$.

引理证明参见 [250; 第 V 章, 引理 1.6].

上述定理 1 中的断言 (3) 的证明直接由引理中的断言 a) 和 c) 的等价性对 $\mathsf{Q}^n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$ 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n = \mathsf{P}_n$ 应用而得:

$$(\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n) \iff \lim_{N\uparrow\infty} \overline{\lim_n}\, \mathsf{P}\left(\frac{d\mathsf{P}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n} > N\right) = 0$$

$$\iff \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim_n}\, \mathsf{P}\left(\frac{d\mathsf{P}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n} < \varepsilon\right) = 0$$

$$\iff \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathsf{P}(Z_\infty < \varepsilon) = 0 \iff \mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1,$$

其中 Z_∞ 是P-a.s. 存在的 $\lim \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$.

在邻近性条件 $(\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n)$ 满足时, 无渐近套利存在的断言由 §3b 中定理 1 的推论和所建立的性质 (3) 导出.

3. 定理 1 对一般 (“非定常”) 情形的推广不会带来任何困难.

我们将遵循 §3b 的第 3 点中所叙述的模式.

定理 2. 设 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})_{n\geqslant 1}$ 是 (B^n, S^n)-市场上的某个鞅测度 “链” $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \sim \mathsf{P}^n_{k(n)})$. 条件 $(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})$ 确保无渐近套利.

证明. 由引理 1 中的条件 a) 和 c) 的等价性, 我们断定

$$(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}) \iff \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim_n}\, \mathsf{P}^n\left(Z^n_{k(n)} < \varepsilon\right) = 0, \tag{11}$$

其中 $Z^n_{k(n)} = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}}{d\mathsf{P}^n_{k(n)}}$, 而我们记得 $\mathsf{P}^n_{k(n)} = \mathsf{P}^n \mid \mathscr{F}^n_{k(n)}$.

所要求的关于 “当邻近性条件 $(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})$ 满足时无渐近套利” 的断言由 (11) 和 §3b 中的定理 2 得到.

4. 直到现在为止, 无渐近套利的条件都是用 $Z^n_{k(n)}$ 的相似关系的渐近性质的术语 (§3b 中的定理 1 和 2) 或邻近性术语 (本节中的定理 1 和 2) 来陈述的. 上面引入的引理 1 作为邻近性条件 $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n)$ 的充要条件, 给出了用阶 $\alpha \in (0,1)$ 的*Hellinger* 积分的渐近性质的术语来表达的条件:

$$(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n) \iff \lim_{\alpha\downarrow 0} \underline{\lim_n}\, H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 1. \tag{12}$$

在一系列情形下, 用这样的积分来运作不会带来困难, 并且导致确立无渐近套利. (参见后面的第 5 点中的例子.)

在这一含义下, 最简单的是测度 “直积” 的情形.

也就是说, 我们假定

$$E^n = E^n_1 \times \cdots \times E^n_{k(n)}, \quad \mathscr{E}^n = \mathscr{E}^n_1 \times \cdots \times \mathscr{E}^n_{k(n)},$$

$$\mathsf{Q}^n = \mathsf{Q}_1^n \times \cdots \times \mathsf{Q}_{k(n)}^n, \quad \widetilde{\mathsf{Q}}^n = \widetilde{\mathsf{Q}}_1^n \times \cdots \times \widetilde{\mathsf{Q}}_{k(n)}^n,$$

其中 Q_k^n 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}_k^n$ 是 $(E_k^n, \mathscr{E}_k^n)$ 上的概率测度.

很明显, 在这一情形下,

$$\begin{aligned} H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) &= \prod_{k=1}^{k(n)} H(\alpha; \mathsf{Q}_k^n, \widetilde{\mathsf{Q}}_k^n) \\ &= \prod_{k=1}^{k(n)} \left[1 - \left(1 - H(\alpha; \mathsf{Q}_k^n, \widetilde{\mathsf{Q}}_k^n)\right)\right], \end{aligned} \tag{13}$$

以及

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \varliminf_n H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 1 \iff \lim_{\alpha \downarrow 0} \varlimsup_n \sum_{k=1}^{k(n)} \left(1 - H(\alpha; \mathsf{Q}_k^n, \widetilde{\mathsf{Q}}_k^n)\right) = 0. \tag{14}$$

因此, 在所考察的 "直积" 情形下,

$$(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n) \iff \lim_{\alpha \downarrow 0} \varlimsup_n \sum_{k=1}^{k(n)} \left(1 - H(\alpha; \mathsf{Q}_k^n, \widetilde{\mathsf{Q}}_k^n)\right) = 0. \tag{15}$$

5. 我们引入一些例子, 一方面, 指出基于 α 阶 Hellinger 积分的无渐近套利判别准则的有效性, 另一方面, 阐释第一章 §2d 中所叙述的APT 理论的讨论和结论. 例 1 和例 2 是著作 [260] 中所考察的例子的特殊情形.

例 1 (有 $d(n) = 1$ 和 $k(n) = n$ 的 "大定常" 市场). 我们将认为, 概率空间为 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. 其中 $\Omega = \{-1, 1\}^\infty$ 是二位进序列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 的空间, 其中 $x_i = \pm 1$, 测度 P 满足 $\mathsf{P}\{x\colon (x_1, \cdots, x_n)\} = 2^{-n}$. 设 $\varepsilon_i(x) = x_i$, $i = 1, 2, \cdots$. 从而, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots)$ 是 Bernoulli 随机变量序列, $\mathsf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

每个作用于 $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 和 $\mathsf{P}^n = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}^n$ 的 $(\Omega, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$ 的 (B^n, S^n)-市场, 都被假定为 $B_k^n \equiv 1$ 和 $S^n = (S_1, \cdots, S_n)$, 其中

$$S_k = S_{k-1}(1 + \rho_k), \quad S_0 = 1, \tag{16}$$

其中 $\rho_k = \mu_k + \sigma_k \varepsilon_k$, $\sigma_k > 0$, $\max(-\sigma_k, \sigma_k - 1) < \mu_k < \sigma_k$. (比较第五章 §1d 中的条件 (2).)

把 (16) 改写为下列形式:

$$S_k = S_{k-1}(1 + \sigma_k(\varepsilon_k - b_k)), \tag{17}$$

其中 $b_k = -(\mu_k / \sigma_k)$. (我们察觉, $|b_k| < 1$.)

由 (17) 和第五章 §3f 中的定理 2 导出, 在所考察的情形下, 存在唯一有直积结构 $\widetilde{\mathsf{P}}^n = \widetilde{\mathsf{P}}_1^n \times \cdots \times \widetilde{\mathsf{P}}_n^n$ 的鞅测度, 关于这一测度, 量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 独立, 并且

$$\widetilde{\mathsf{P}}^n(\varepsilon_k = 1) = \frac{1}{2}(1 + b_k), \quad \widetilde{\mathsf{P}}^n(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}(1 - b_k).$$

由于

$$H(\alpha;\widetilde{\mathsf{P}}^n,\mathsf{P}^n)=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{(1+b_k)^\alpha+(1-b_k)^\alpha}{2}\right], \tag{18}$$

故由 (12) 和 (15) 导出

$$\begin{aligned}(\mathsf{P}^n)\lhd(\widetilde{\mathsf{P}}^n) &\iff \lim_{\alpha\downarrow 0}\varliminf_{n}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{(1+b_k)^\alpha+(1-b_k)^\alpha}{2}\right]=1\\ &\iff \lim_{\alpha\downarrow 0}\varlimsup_{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{(1+b_k)^\alpha+(1-b_k)^\alpha}{2}\right]=0.\end{aligned}$$

由此不难断定,

$$(\mathsf{P}^n)\lhd(\widetilde{\mathsf{P}}^n)\iff\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2<\infty.$$

回忆起 $b_k=-\dfrac{\mu_k}{\sigma_k}$, 并应用定理 1, 我们求得, 条件 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2<\infty$ 是在所考察的 “大定常” 市场上的无渐近套利的充要条件.

例 2 (有 $k(n)\equiv 1$ 和 $d(n)=n$ 的 “大” 市场). 我们将考察 (B^n,S^n)-市场的一步模型, 其中假定 $B^n=(B_k^n)$, $S^n=(S_k^0,S_k^1,\cdots,S_k^{n-1})$, 其中 $k=0,1$ 和 $B_0^n=B_1^n=1$, 而

$$S_1^i=S_0^i(1+\rho^i),\quad S_0^i>0, \tag{19}$$

以及

$$\rho^0=\mu_0+\sigma_0\varepsilon_0, \tag{20}$$

$$\rho^i=\mu_i+\sigma_i(c_i\varepsilon_0+\overline{c}_i\varepsilon_i),\ i\geqslant 1. \tag{21}$$

还假定, $\sigma_i>0$, $\overline{c}_i>0$, $c_i^2+\overline{c}_i^2=1$ 以及 $\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots)$ 为以概率 $\frac{1}{2}$ 取两个值 ± 1 的独立 Bernoulli 随机变量序列.

与 *CAPM* 和 *APT* 理论相联系, 有益的是, 现在把 S_k^i $(i\geqslant 1)$ 理解为在 “全球”、“大” 市场上交易的某支股票在时刻 k 的值, 而 S_k^0 理解为这一市场的指数 (比如, 500 个公司的股票市场上的由这些公司所构成的 S&P500 指数; 参见第一章 §1b 中的第 6 点).

设 $\beta_i=\dfrac{c_i\sigma_i}{\sigma_0}$, $i\geqslant 1$,

$$b_0=-\frac{\mu_0}{\sigma_0},\quad b_i=\frac{\mu_0\beta_i-\mu_i}{\sigma_i\overline{c}_i}, \tag{22}$$

并且 $|b_0|\neq 1$, $|b_i|\neq 1$, $i\geqslant 1$.

在这样的记号下, 由 (19)–(21) 我们求得

$$S_1^0 = S_0^0(1 + \sigma_0(\varepsilon_0 - b_0)), \tag{23}$$

并且对于 $i \geqslant 1$,

$$S_1^i = S_0^i(1 + \sigma_i c_i(\varepsilon_0 - b_0) + \sigma_i \bar{c}_i(\varepsilon_i - b_i)). \tag{24}$$

如果遵照上述的 (B^n, S^n)-市场的 "系列模式", 那么可以认为, 其中的每一个定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$ 上, 这里 $\mathscr{F}^n = \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1})$, $\mathsf{P}^n = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}^n$, 而 Ω, P 与上一例子中一样.

由 (23) 和 (24) 容易确立, 在所考察的模式下, 对于每个 $n \geqslant 1$, 显然存在 (至少有一个) 鞅测度. 事实上, 可取如下构造的 (仍然有直积结构的) 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 为这样的测度: 对于它, 量 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 独立,

$$\widetilde{\mathsf{P}}^n(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2}(1 + b_i), \quad \widetilde{\mathsf{P}}^n(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}(1 - b_i).$$

直接可见,

$$H(\alpha; \widetilde{\mathsf{P}}^n, \mathsf{P}^n) = \prod_{i=0}^{n-1} \left[\frac{(1 + b_i)^\alpha + (1 - b_i)^\alpha}{2} \right]. \tag{25}$$

正如在上一例子中那样, 由此我们断定,

$$(\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n) \iff \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 < \infty,$$

因而, 由定理 2, 条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_0 \beta_i - \mu_i}{\sigma_i \bar{c}_i} \right)^2 < \infty \tag{26}$$

$\left(\text{作为条件} \left| \dfrac{\mu_0}{\sigma_0} \right| < 1, \left| \dfrac{\mu_0 \beta_i - \mu_i}{\sigma_i \bar{c}_i} \right| < 1 \ (i \geqslant 1) \text{ 的补充} \right)$ 确保无渐近套利. (把 (26) 与第一章 §2c 中的 (4) 和第一章 §2d 中的 (19) 相比较.)

注 2. 应该强调在所考察的两个例子中的原则差别. 在第一个时间参数 $k \leqslant n$ 的例子中, 存在唯一的鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$, 从而有可能断定 (由定理 1), 条件 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} \right)^2 < \infty$ 是无渐近套利的充要条件.

在第二个 n 起着序列编号的例子中, 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 对于 $n \geqslant 1$ 不是唯一的, 从而说明, 条件 (26) 仅仅是无渐近套利的充分条件. $\Big($正如在著作 [260] 中所指出, 充要条件为 $\varliminf\limits_{i} [\min(1 + b_i, 1 - b_i)] > 0.\Big)$

例 3. 我们考察 "定常" 对数高斯 (第五章 §3c) 市场 $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$, 其中 $B_k^n \equiv 1$, $S^n = (S_0, S_1, \cdots, S_n)$, 而

$$S_k = S_0 e^{h_1 + \cdots + h_k}, \quad S_0 > 0. \tag{27}$$

假定, $h_k = \mu_k + \sigma_k \varepsilon_k$, $k \geqslant 1$, 其中 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots)$ 是给定在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的独立正态分布 $\mathscr{N}(0,1)$ 的随机变量序列, 而 $\sigma_k > 0$, $k \geqslant 1$.

设 $\mathscr{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}_n$, $n \geqslant 1$. 在第五章 §3c 中, 已经证明, 如果

$$Z_n = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2} \right) \varepsilon_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2} \right)^2 \right\}, \tag{28}$$

那么关于有 $d\widetilde{\mathsf{P}}_n = Z_n d\mathsf{P}_n$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ 价格序列 $(S_k)_{k \leqslant n}$ 形成鞅, 这时 $\mathrm{Law}(h_k \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_n) = \mathscr{N}(\widetilde{\mu}_k, \sigma_k)$, 且

$$\widetilde{\mu}_k = -\frac{\sigma_k^2}{2}, \quad k \leqslant n.$$

由此容易求得, 运用公式 (10),

$$H(\alpha; \widetilde{\mathsf{P}}_n, \mathsf{P}_n) = \exp\left\{ -\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2} \right)^2 \right\}. \tag{29}$$

由 (12) 得到,

$$(\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n) \iff \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2} \right)^2 < \infty,$$

而这就是说, 由定理 1 导出, 条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2} \right)^2 < \infty \tag{30}$$

确保无渐近套利.

注 3. 如果 $\dfrac{\mu_k}{\sigma_k} + \dfrac{\sigma_k}{2} = 0$, 即

$$\mu_k = -\frac{\sigma_k^2}{2}, \tag{31}$$

那么原来的概率测度 P 对于序列 $S = (S_k)_{k \geqslant 0}$ 是鞅测度.

注意, 条件 (30) 对于 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd (\mathsf{P}^n)$ 也是充要的. 尤其是, 这一条件对于测度序列 (P^n) 和 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)$ 互为邻近是充要的, 后者表示为 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd\rhd (\mathsf{P}^n)$.

6. 余下的是要简要讨论完全渐近分离性概念, 它是奇异性概念的自然“渐近”类似.

定义 3. 设在可测空间 $(E^n, \mathscr{E}^n)$ 上给定概率测度 Q^n 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$, $n \geqslant 1$.

我们说, 序列 $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n)_{n \geqslant 1}$ 和 $(\mathsf{Q}^n)_{n \geqslant 1}$ 满足完全渐近分离性质 (记为 $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \vartriangle (\mathsf{Q}^n)$), 是指存在序列 $\{n_k\}$, 满足当 $k \uparrow \infty$ 时, $n_k \uparrow \infty$, 并且对于每个 k 存在集合 $A^{n_k} \in \mathscr{E}^{n_k}$, 使得当 $k \uparrow \infty$ 时, $\mathsf{Q}^{n_k}(A^{n_k}) \to 1$, 而 $\widetilde{\mathsf{Q}}^{n_k}(A^{n_k}) \to 0$.

引理 2. 设 $(E^n, \mathscr{E}^n)$ 为具有概率测度 Q^n 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$, $n \geqslant 1$. 下列断言等价 $\left(\mathfrak{z}^n = \dfrac{d\mathsf{Q}^n}{d\overline{\mathsf{Q}}^n}, Z^n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{Q}}^n}{d\mathsf{Q}^n}, \overline{\mathsf{Q}}^n = \dfrac{1}{2}(\mathsf{Q}^n + \widetilde{\mathsf{Q}}^n)\right)$:

a) $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \vartriangle (\mathsf{P}^n)$;

b) $\varliminf\limits_n \widetilde{\mathsf{Q}}^n(\mathfrak{z}^n \geqslant \varepsilon) = 0$ 对于所有 $\varepsilon > 0$ 成立;

c) $\varlimsup\limits_n \widetilde{\mathsf{Q}}^n(Z^n \leqslant N) = 0$ 对于所有 $N > 0$ 成立;

d) $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} \varliminf\limits_n H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 0$;

e) $\varliminf\limits_n H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 0$ 对于所有 $\alpha \in (0,1)$ 成立;

f) $\varliminf\limits_n H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 0$ 对于某个 $\alpha \in (0,1)$ 成立.

引理的证明参见 [250; 第 V 章, 引理 1.9].

7. 在例 1–3 中所引入的无渐近套利分析表明, 表达为阶 $\alpha > 0$ 的 Hellinger 积分渐近性质的术语的判别准则很有效率.

在渗透概率空间 (正如在例 1 和例 3 中) 的情形下, 有益的是转向所谓 *Hellinger* 过程, 在它的性质的术语下, 也可给出概率测度的绝对连续性、邻近性和其他 "相互" 性质的判别准则.

下面的叙述可看作以离散时间情形为例的有关 Hellinger 过程的一些问题的介绍 (详情参见 [250; 第 IV, V 章]).

假定, 在渗透可测空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0})$ $(\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n)$ 上给定两个概率测度 P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$.

我们以 $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_n$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n$ 表示它们在 $\mathscr{F}_n$ 上的局限, $n \geqslant 1$, $\mathsf{Q} = \frac{1}{2}(\mathsf{P} + \widetilde{\mathsf{P}})$, $\mathsf{Q}_n = \mathsf{Q}\,|\,\mathscr{F}_n$.

设 $\mathfrak{z}_n = \dfrac{d\mathsf{P}_n}{d\mathsf{Q}_n}$, $\tilde{\mathfrak{z}}_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{Q}_n}$, $\beta_n = \dfrac{\mathfrak{z}_n}{\mathfrak{z}_{n-1}}$, $\widetilde{\beta}_n = \dfrac{\tilde{\mathfrak{z}}_n}{\tilde{\mathfrak{z}}_{n-1}}$ (认为 $\frac{0}{0} = 0$; 我们记得, 如果 $\mathfrak{z}_{n-1} = 0$, 那么 $\mathfrak{z}_n = 0$, 同时, 如果 $\tilde{\mathfrak{z}}_n = 0$, 那么 $\tilde{\mathfrak{z}}_{n-1} = 0$).

在这样的记号下, α 阶 Hellinger 积分 $H_n(\alpha) \equiv H(\alpha; \mathsf{P}_n, \widetilde{\mathsf{P}}_n)$ 可改写为下列形式:

$$H_n(\alpha) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \mathfrak{z}_n^{\alpha} \tilde{\mathfrak{z}}_n^{1-\alpha}. \tag{32}$$

我们转向过程 $Y(\alpha) = (Y_n(\alpha))_{n\geqslant 0}$, 其中

$$Y_n(\alpha) = \mathfrak{z}_n^{\alpha} \tilde{\mathfrak{z}}_n^{1-\alpha}. \tag{33}$$

设 $f_\alpha(u, v) = u^\alpha v^{1-\alpha}$. 这个函数 (对于 $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$) 是下凸的, 而由 Jessen 不等式, 对于 $m \leqslant n$ (Q-a.s.), 有

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(Y_n(\alpha)\,|\,\mathscr{F}_m) \leqslant Y_m(\alpha). \tag{34}$$

这样一来, 序列 $Y(\alpha) = (Y_n(\alpha), \mathscr{F}_n, \mathsf{Q})$ 是 (有界) 上鞅, 根据 Doob 分解 (第二章 §1c), 它可表示为下列形式:

$$Y_n(\alpha) = M_n(\alpha) - A_n(\alpha), \tag{35}$$

其中 $M(\alpha) = (M_n(\alpha), \mathscr{F}_n, \mathsf{Q})$ 是鞅, 而 $A(\alpha) = (A_n(\alpha), \mathscr{F}_{n-1}, \mathsf{Q})$ 为有 $A_0(\alpha) = 0$ 的可料不减过程.

过程 $Y(\alpha)$ 的具体结构 (参见 (33)) 可用来使可料过程 $A(\alpha)$ 给出下列形式的表示式:

$$A_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}(\alpha)\Delta h_k(\alpha), \tag{36}$$

其中 $h(\alpha) = (h_k(\alpha))_{k\geqslant 0}$ 为某个不减可料过程, $h_0(\alpha) = 0$.

这样的过程, 一般来说, 不是单值的. 例如, 下列过程

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(1 - \beta_k^{\alpha}\widetilde{\beta}_k^{1-\alpha} \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{37}$$

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(\varphi_\alpha(\beta_k, \widetilde{\beta}_k) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{38}$$

其中 $\varphi_\alpha(u, v) = \alpha u + (1-\alpha)v - u^{\alpha}v^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, 满足可直接验证的所述要求, 对于它们来说, 有

$$M_n(\alpha) = Y_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}(\alpha)\Delta h_k(\alpha) \tag{39}$$

的过程 $M(\alpha) = (M_n(\alpha), \mathscr{F}_n, \mathsf{Q})$ 为鞅. (与此相联系, 也参见 [250; 第 IV 章, §1e].)

定义 4. 使得用公式 (39) 定义的过程 $M(\alpha) = (M_k(\alpha), \mathscr{F}_k, \mathsf{Q})_{k\geqslant 0}$ 为鞅的每个不减可料过程 $h(\alpha) = (h_k(\alpha))_{k\geqslant 0}$ $(h_0(\alpha) = 0)$ 称为阶 $\alpha \in (0,1)$ 的 *Hellinger* 过程.

注 4. 设 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 即 $\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n$, $n \geqslant 0$, $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$ 以及 $\rho_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}}$. 那么由公式 (37) 和 (38) 给出的过程 $h_n(\alpha)$ 可表示为下列形式:

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(1 - \rho_k^{1-\alpha} \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{40}$$

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(\varphi_\alpha(1, \rho_k) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}). \tag{41}$$

注 5. 我们考察 "直积" 模式, 认为 $\Omega = E_1 \times E_2 \times \cdots$, $\mathscr{F} = \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}_2 \otimes \cdots$, $\mathsf{P} = \mathsf{Q}_1 \times \mathsf{Q}_2 \times \cdots$, $\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{Q}}_1 \times \widetilde{\mathsf{Q}}_2 \times \cdots$, 其中 Q_i 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}_i$ 为 $(E_i, \mathscr{E}_i)$ 上的概率测度.

在这一情形下, $\mathscr{F}_n = \mathscr{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{E}_n$, $\mathsf{P}_n = \mathsf{Q}_1 \times \cdots \times \mathsf{Q}_n$, $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{Q}}_1 \times \cdots \times \widetilde{\mathsf{Q}}_n$. 于是命题 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 等价于 $\widetilde{\mathsf{Q}}_n \ll \mathsf{Q}_n$, $n \geqslant 1$, 并且我们有 $\rho_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{Q}}_n}{d\mathsf{Q}_n}$.

由于 $\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\rho_n = 1$, 故我们看到, (36) 和 (37) 的右端重合, 并且由它们所定义的有

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(1 - \rho_k^{1-\alpha}), \quad n \geqslant 1$$

的 Hellinger 过程 $h(\alpha) = (h_n(\alpha))$ 为确定性的, 且

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} (1 - H(\alpha; \mathsf{Q}_k, \widetilde{\mathsf{Q}}_k)). \tag{42}$$

如果 $H_n(\alpha) = H(\alpha; \mathsf{P}_n, \widetilde{\mathsf{P}}_n)$, 那么在所考察的 “直积” 情形下,

$$\begin{aligned} H_n(\alpha) &= H_{n-1}(\alpha) H(\alpha; \mathsf{Q}_n; \widetilde{\mathsf{Q}}_n) \\ &= H_{n-1}(\alpha)[1 - (1 - H(\alpha; \mathsf{Q}_n, \widetilde{\mathsf{Q}}_n))]. \end{aligned}$$

考虑到记号 (42), 由此我们得到

$$\Delta H_n(\alpha) = -H_{n-1}(\alpha) \Delta h_n(\alpha).$$

我们已经在第二章中涉及过这种类型的差分方程 (比较 §1a 中的公式 (11)), 其中它们的解借助于随机指数可记成下列形式:

$$H_n(\alpha) = H_0(\alpha) \mathscr{E}(-h(\alpha))_n,$$

这里

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(-h(\alpha))_n &= e^{-h_n(\alpha)} \prod_{k=1}^{n} (1 - \Delta h_k(\alpha)) e^{\Delta h_k(\alpha)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} (1 - \Delta h_k(\alpha)) \quad \left(= \prod_{k=1}^{n} H(\alpha; \mathsf{Q}_k, \widetilde{\mathsf{Q}}_k) \right), \end{aligned}$$

它在所考察的情形下, 与

$$H_n(\alpha) = H_0(\alpha) \prod_{k=1}^{n} H(\alpha; \mathsf{Q}_k, \widetilde{\mathsf{Q}}_k)$$

完全一致.

下列 (在 “系列模式” 下的) 结果体现了这个概念在渗透可测空间 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}_k^n)_{k \leqslant k(n)})$ $(n \geqslant 1,\ \mathscr{F}^n = \mathscr{F}_{k(n)}^n,\ \mathscr{F}_0^n = \{\varnothing, \Omega^n\})$ 上给定的概率测度序列 $(\mathsf{P}^n)_{n \geqslant 1}$ 和 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)_{n \geqslant 1}$ 的邻近性与完全渐近分离性的论证中的作用.

类似于 (39), 我们在记号上以下列 “系列模式” 所引起的显著变化

$$h^n_{k(n)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{k(n)} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^n}(1 - (\beta^n_k)^\alpha (\widetilde{\beta}^n_k)^{1-\alpha} \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) \tag{42'}$$

来表示对应测度 P^n 和 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 的 $\alpha \in (0,1)$ 阶 Hellinger 过程.

引理 3. 下列条件等价:

a) $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \triangleleft (\mathsf{P}^n)$;

b) $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_0) \triangleleft (\mathsf{P}^n_0)$ 以及对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \overline{\lim_n} \, \widetilde{\mathsf{P}}^n(h^n_{k(n)}(\alpha) > \varepsilon) = 0. \tag{43}$$

推论. 设所考察的 “定常” 情形下, P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为给定在可测空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0})$ 上的两个测度, $\mathsf{P}_N = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}_N$, $\widetilde{\mathsf{P}}_N = \widetilde{\mathsf{P}} \,|\, \mathscr{F}_N$.

对于任何 $N \geqslant 1$, 绝对连续性 $\widetilde{\mathsf{P}}_N \ll \mathsf{P}_N$ 成立当且仅当

$$\widetilde{\mathsf{P}}_0 \ll \mathsf{P}_0 \quad 和 \quad h_N(\alpha) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0,\ \alpha \downarrow 0. \tag{44}$$

引理 4. 如果对于任何 $L \geqslant 0$,

$$\overline{\lim_n} \, \widetilde{\mathsf{P}}^n \left(h^n_{k(n)} \left(\frac{1}{2} \right) > L \right) = 1, \tag{45}$$

那么 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \triangleleft (\mathsf{P}^n)$.

推论. 在 “定常” 情形下, 条件 $\widetilde{\mathsf{P}}_0 \perp \mathsf{P}_0$ 或者条件

$$\widetilde{\mathsf{P}} \left(h_N \left(\frac{1}{2} \right) = \infty \right) = 1 \tag{46}$$

对于 $\widetilde{\mathsf{P}}_N \perp \mathsf{P}_N$ 为充分条件.

在 “定常” 情形下, $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}} \perp \mathsf{P}$ 的判别准则, 当补充假定 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ (即, $\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n$, $n \geqslant 0$) 时, 特别简单:

$$\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P} \iff \widetilde{\mathsf{P}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[(1 - \sqrt{\alpha_n})^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] < \infty \right\} = 1,$$

$$\widetilde{\mathsf{P}} \perp \mathsf{P} \iff \widetilde{\mathsf{P}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[(1 - \sqrt{\alpha_n})^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] = \infty \right\} = 1,$$

其中 $\alpha_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$.

引理 3, 引理 4 及其推论的证明参见 [250; 第 V 章, §2c; 第 IV 章, §2c].

8. 我们转向上节中的定理 1 和 2 中的条件 (9) 和 (15) 的必要性的证明.

为此, 有益的是转向下列在 [260] 中引入的与不完全市场上的渐近套利问题相联系的邻近性概念的推广.

我们将假定, 对每个 $n \geqslant 0$, 在可测空间 $(E^n, \mathscr{E}^n)$ 上给定概率测度 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$ 和某个概率测度 Q^n 的族 $\mathbb{Q}^n = \{\mathsf{Q}^n\}$. (以后将取鞅测度族 $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ 作为 $\mathbb{Q}^n$.)

对于每个测度 Q^n 的族 $\mathbb{Q}^n = \{\mathsf{Q}^n\}$, 我们联系它们的上包络 $\sup \mathsf{Q}^n$, 它是集合 $A \in \mathscr{E}^n$ 的函数, 满足

$$(\sup \mathsf{Q}^n)(A) = \sup_{\mathsf{Q}^n \in \mathbb{Q}^n} \mathsf{Q}^n(A). \tag{47}$$

我们将以 $\operatorname{conv} \mathbb{Q}^n$ 表示为族 $\mathbb{Q}^n$ 的凸包.

定义 5. 测度序列 $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n)_{n \geqslant 1}$ 称为与上包络序列 $(\sup \mathsf{Q}^n)_{n \geqslant 1}$ 邻近 (记为 $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\sup \mathsf{Q}^n)$), 是指对于每个满足 $(\sup \mathsf{Q}^n)(A^n) \to 0$ 的集合序列 $A^n \in \mathscr{E}^n$, $n \geqslant 1$, 也有性质 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n(A^n) \to 0$.

对于 $\mathsf{Q} \in \operatorname{conv} \mathbb{Q}^n$, 设

$$\mathfrak{z}^n(\mathsf{Q}) = \frac{d\mathsf{Q}}{d\overline{\mathsf{Q}}^n}, \quad Z^n(\mathsf{Q}) = \frac{d\widetilde{\mathsf{Q}}^n}{d\mathsf{Q}},$$

其中 $\overline{\mathsf{Q}}^n = \frac{1}{2}(\mathsf{Q} + \widetilde{\mathsf{Q}}^n)$.

下列 [260] 中的结果是引理 1 的断言的直接推论.

引理 5. 下列条件的等价性成立:

a) $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\sup \mathsf{Q}^n)$;

b) $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup\limits_{n} \inf\limits_{\mathsf{Q} \in \operatorname{conv} \mathbb{Q}^n} \widetilde{\mathsf{Q}}^n(\mathfrak{z}^n(\mathsf{Q}) < \varepsilon) = 0$;

c) $\lim\limits_{N \uparrow \infty} \varlimsup\limits_{n} \inf\limits_{\mathsf{Q} \in \operatorname{conv} \mathbb{Q}^n} \widetilde{\mathsf{Q}}^n(Z^n(\mathsf{Q}) > N) = 0$;

d) $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \varlimsup\limits_{n} \sup\limits_{\mathsf{Q} \in \operatorname{conv} \mathbb{Q}^n} H(\alpha; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 1$.

9. 在直接转向 §3b 中的定理 1 和 2 中的条件 (9) 和 (15) 的必要性证明时, 我们将令 $\widetilde{\mathsf{Q}}^n \equiv \mathsf{P}^n$ $(\equiv \mathsf{P}^n_{k(n)})$ 以及正如已经注意到, 将取所有鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}$ $(n \geqslant 1)$ 的族 $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ 作为族 $\mathbb{Q}^n$.

很明显, 在所考察的情形下, $\operatorname{conv} \mathbb{Q}^n$ 重合于族 $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ 本身, 因而, 引理 5 中的条件 c) 取下列形式:

$$\lim_{N \uparrow \infty} \varlimsup_{n} \inf_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)})} \mathsf{P}^n_{k(n)} \left(\frac{d\mathsf{P}^n_{k(n)}}{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}} > N \right) = 0,$$

它 (由于 $\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \sim \mathsf{P}^n_{k(n)}$) 等价于条件

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_{n} \inf_{Z^n_{k(n)} \in \mathbb{Z}^n_{k(n)}} \mathsf{P}^n_{k(n)}(Z^n_{k(n)} < \varepsilon) = 0, \tag{48}$$

其中集合

$$\mathbb{Z}^n_{k(n)} = \left\{ Z^n_{k(n)} \colon Z^n_{k(n)} = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}}{d\mathsf{P}^n_{k(n)}}, \widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \right\}.$$

由于 (48) 恰好是 §3b 中的条件 (15), 故由引理 5 中的条件 a) 和 c) 的等价性, 可以断定, §3b 的定理 2 中的 “充分性” 也可陈述为下列形式: 条件

$$(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\sup \widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}) \tag{49}$$

满足导出无渐近套利.

因此, (再由引理 5 中的条件 a) 和 c) 的等价性) 为确立 §3b 的定理 2 中的 “必要性”, 需要指出, 无渐近套利导出条件 (49) 满足.

证明将用 “反证法”.

假定集合 $A^n \in \mathscr{F}^n_{k(n)}$ 满足

$$\left(\sup \widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}\right)(A^n) \to 0, \tag{50}$$

但 $\mathsf{P}^n_{k(n)} \to \alpha > 0$, 这里, 如果有必要, 可取子列.

我们指出, 在这一假定下, 有渐近套利.

为此, 我们构成过程

$$X^n_k = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}} (I_{A^n} \mid \mathscr{F}^n_k), \quad k \leqslant k(n). \tag{51}$$

根据 §2b 中的定理, 过程 $X^n = (X^n_k)$ 关于每个测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)})$ 为上鞅, 并且根据 §2d 中的定理, 对于这个过程有可选分解:

$$X^n_k = X^n_0 + \sum_{j=1}^{k} (\gamma^n_j, \Delta S^n_j) - C^n_k, \tag{52}$$

其中 $C^n_0 = 0$, C^n_k 为 $\mathscr{F}^n_k$-可测, 而 γ^n_k 为 $\mathscr{F}^n_{k-1}$-可测.

基于分解式 (52), 我们 (对每个 $n \geqslant 1$) 定义策略 $\pi^n = (\beta^n, \gamma^n)$, 其中 $\beta^n = (\beta^n_k)_{k\geqslant 0}$ 和 $\gamma^n = (\gamma^n_k)_{k\geqslant 0}$ 使得其资本 $X^{\pi^n}_k$ 重合于 $X^n_0 + \sum_{j=1}^n (\gamma^n_j, \Delta S^n_j)$.

为此, 只需选择 β^n_0 和 γ^n_0 使得 $\beta^n_0 + (\gamma^n_0, S^n_0) = X^n_0$ (为简单起见, 假定总有 $B^n_k \equiv 1$), 量 γ^n_k 对 $k \geqslant 1$ 取自分解式 (52), 而 β^n_k 由自融资条件来确定.

对于这样定义的策略 π^n, 显然有 $X^{\pi^n}_k = X^n_k + C^n_k \geqslant 0$ 对于所有 $k \leqslant k(n)$ 成立, 且当 $n \to \infty$ 时, 由假定 (50),

$$X^{\pi^n}_0 = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}} I_{A^n} = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)})} \widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}(A^n) \to 0.$$

这样, 对于策略 $\pi = (\pi^n)_{n\geqslant 1}$, §3a 的定义 1 中的条件 (2) 和 (3) 满足.

为了完成证明, 现在余下的是要发现, 对于所构造的策略 $\pi = (\pi^n)_{n\geqslant 1}$, 这同一个定义 1 中的条件 (4) 也满足, 因为

$$\varlimsup_n \mathsf{P}^n(X^n_{k(n)} \geqslant 1) \geqslant \varlimsup_n \mathsf{P}^n(X^n_{k(n)} = 1) = \lim_n \mathsf{P}^n(A^n) = \alpha > 0.$$

这样, 定理 2 以至定理 1 中的 "必要性" 得证.

推论. 为了再次强调邻近性概念在 "大" 金融市场中的渐近套利问题的重要性, 我们把定理 2 改写为下列 (等价) 形式: *在 "大" 局部无套利市场* $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$ *上, 条件* $(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\sup \widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})$ *为无渐近套利的充要条件.*

很明显, 在完全市场情形下, 这个条件转化为 "通常的" 原来的概率测度 $\mathsf{P}^n_{k(n)}$ 的族 $(\mathsf{P}^n_{k(n)})_{n\geqslant 1}$ 关于 (对每个 $n \geqslant 1$ 唯一的) 鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}$ 的族 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})_{n\geqslant 1}$ 的邻近性条件

$$(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}). \tag{53}$$

注 6. 在定理 1 和 2 中, 无渐近套利的充分条件陈述为对于某个鞅测度 "链" $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})$ 的邻近性性质 (53) 满足.

值得注意的是, 其实相反的结果也成立, 它在 [260] 中得证: 如果无渐近套利①, 那么可求得鞅测度 "链" $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})_{n\geqslant 1}$, 使得邻近性质 (53) 满足.

§3d. 在无套利市场的系列模式中的逼近和收敛的某些方面

1. 在 §§3a, b, c 中所考察的 "大" 金融市场模型中假定, 有 n-市场 (B^n, S^n) $(n \geqslant 1)$ *系列模式*, 其中每一个是无套利的, 同时还研究了无渐近套利问题. 这时重要的是要注意到, 没有关于是否存在某个 "极限" 市场, 比如 (B, S), 作任何假定.

在本节中, 将考察这样的局面, 除了在概率空间 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$ $(n \geqslant 1)$ 上给定 "极限前" 的 n-市场 (B^n, S^n) 外, 还有给定在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的 "极限" 市场 (B, S), 并且当 $n \to \infty$ 时, 下列 (弱) 收敛性成立:

$$\mathrm{Law}(B^n, S^n \,|\, \mathsf{P}^n) \to \mathrm{Law}(B, S \,|\, \mathsf{P}). \tag{1}$$

我们以后感兴趣的基本问题在于阐述 (在假定 (1) 下) 是否也可以说下列收敛性:

$$\mathrm{Law}(B^n, S^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(B, S \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}), \tag{2}$$

其中 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 分别是类 $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ 和 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 中的某些鞅测度, 以及用怎样的方式来选择适当的 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得对于它们可确保收敛性 (2).

在与后一问题相联系时, 回忆起下列这点是适宜的: 我们已经提及各种构造鞅测度的方法, 例如, 基于 Girsanov 变换和 Esscher 变换. 我们还记得在第五章 §3d 中

① 在原版和英文版中, 这里都是 "有渐近套利", 显然有误. —— 译者注

提及的最小鞅测度概念, 它 (在 H. Föllmer 和 M. Schweizer 的著作中, 例如, 在 [167] 和 [429] 中) 联系着这样的问题: $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ 中怎样的鞅测度应该看作形成用于金融计算的测度链 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)_{n\geqslant 1}$ 的最 "自然" 的候选者. (在这一联系中, 再次强调下列这点不是多余的: 比如, 对冲价格、合理价格、期权合约的计算正是通过引入鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 而不是通过原来的 (也可以说是 "物理的") 测度 P^n 和 P; 参见例如, §1c 中的 "不完全市场上的欧式对冲价格基本公式" (8) 或 §4b 中的公式 (20).)

2. 在转向考察所提出的问题时, 回忆起下列这点是适宜的: 在金融文献中, 十分清楚地以其自有的简单明了分离出下列两种 "经典的" (B, S)-市场模型: 离散情形下的

Cox-Ross-Rubinstein 模型

(或者二叉树模型; 第二章 §1e) 以及连续时间情形下的

Black-Merton-Scholes 模型

(或者基于几何布朗运动的标准扩散模型; 第三章 §4b).

这时如所周知, 第一种模型 (以小时间步长 $\Delta > 0$) 是第二个模型的完全令人满意的近似, 并且由第一个模型所得到的计算结果 (比如, 对于标准期权), 接近于对于第二个 (B, S)-市场模型的计算结果, 对于后者,

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \tag{3}$$

其中 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ 是标准维纳过程.

根据极限定理理论 (参见例如, [39] 和 [250]) 中熟知的不变性原理, 维纳过程可作为各种完全不同的随机游走模式的极限模式的结果来得到. 因此, 毫不令人惊奇的是, 比如, 对于 (带离散时间区间 $\Delta = 1/n$ 的) 给定在某个概率空间 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$ 上的 (B^n, S^n)-市场的二叉树模型, 在下列含义下收敛于 Black-Merton-Scholes (B, S)-模型: 当 $n \to \infty$ 时, 收敛性 (1) 成立, 其中 P 为概率测度, 并且关于它过程 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ 是维纳过程.

我们察觉, 既对于所引入的两个 "经典" 模型、又对于其他的金融市场模型的收敛性 (1) 的成立问题, 如上所述, 仅仅是一般的 (B^n, S^n)-市场向 "极限" (B, S)-市场的收敛性问题的一部分. 当 $n \to \infty$ 时, 分布律

$$\mathrm{Law}(B^n, S^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(B, S \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) \tag{4}$$

的收敛性问题也同样重要, 其中 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 分别是对于 (B^n, S^n)-模型和 (B, S)-模型的鞅 (风险中性) 测度.

这里重要的是要考虑到下列联系所考虑的 (无套利) 完全和不完全市场的状况.

如果 (B^n, S^n)-市场是完全的, 那么 (至少在满足 "第二基本定理" 的条件下; 第五章 §4a) 鞅测度集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ 中的每一个只由一个鞅测度所组成, 而在具有收敛性

(1) 的断言 (4) 的成立问题以最直接的方式与测度族 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)$ 和 (P^n) 的邻近性问题相联系, 并在 "随机不变性原理" 的框架下求得足够完备的解答; 后者例如在专著 [250] 的第 X 章第 3 节中详细研究.

然而, 若所考察的无套利 (B^n, S^n)-市场不完全, 那么所涉及的局面就大为复杂.

在这一情形下, 鞅测度集合 $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ 一般来说多于一个元素, 并且由此就产生选择对应的鞅测度链 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)_{n\geqslant 1}$ 的不简单的选择问题, 使得该测度链可确保收敛性 (4) 满足.

相应于弱收敛的定义, 断言 (4) 可变换为收敛性断言

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n} f(B^n, S^n) \to \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} f(B, S) \tag{4'}$$

对于定义在所考察的过程的 (右连左极 (càdlàg)) 轨线空间上的有界连续泛函在我们的通常对半鞅提出的框架下成立.

我们察觉, 如果 $Z^n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n}{d\mathsf{P}^n}$, $Z = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$, 那么, 由于

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n} f(B^n, S^n) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} Z^n f(B^n, S^n),$$

以及

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} f(B, S) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}} Z f(B, S),$$

显然, 收敛性问题 (4′) 以最紧密的方式联系着收敛性问题

$$\mathrm{Law}(B^n, S^n, Z^n \mid \mathsf{P}^n) \to \mathrm{Law}(B, S, Z \mid \mathsf{P}), \tag{5}$$

它有关随机过程的极限定理理论的 "泛函收敛性" 论证. 详情参见 [39] 和 [250].

注意到以下这点是有益的: 如果随机变量族 $\{Z^n f(B^n, S^n); n \geqslant 1\}$ 一致可积, 即,

$$\lim_{N\to\infty} \varlimsup_{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} \left(|Z^n f(B^n, S^n)| I\left(|Z^n f(B^n, S^n)| > N\right)\right) = 0,$$

那么收敛性 (4′) 由 (5) 可得.

3. 作为例子, 我们考察性质 (1) 和 (2) 对于 Cox-Ross-Rubinstein 的 "极限前" 模型和 Black-Merton-Scholes 的 "极限" 模型是否成立的问题, 这两个模型既是无套利的, 又是完全的.

设 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$ 是其上给定二叉树 (B^n, S^n)-市场的概率空间, 其中市场用 "单利" 类型来定义 (第二章 §1a), 并带有按段常数轨线 (第四章 §2a): 对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $k = 1, \cdots, n$ 和 $n \geqslant 1$,

$$B_t^n = B_0^n \prod_{k=1}^{[nt]} (1 + r_k^n), \tag{6}$$

$$S_t^n = S_0^n \prod_{k=1}^{[nt]} (1 + \rho_k^n), \tag{7}$$

其中银行利率

$$r_k^n = \frac{r}{n}, \quad r \geqslant 0, \tag{8}$$

而市场利率

$$\rho_k^n = \frac{\mu}{n} + \xi_k^n, \quad \mu \geqslant 0. \tag{9}$$

在均匀 Cox-Ross-Rubinstein 模型中, 量 $\xi_1^n, \cdots, \xi_n^n$ 为独立同分布, 其中

$$\mathsf{P}^n\left(\xi_k^n = \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = p, \quad \mathsf{P}^n\left(\xi_k^n = -\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = q, \tag{10}$$

这里 a, b, p 和 q 为正常数, $p+q=1$.

由 (9) 和 (10) 我们求得,

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\rho_k^n = \frac{\mu}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}(pb-qa), \tag{11}$$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}(\rho_k^n)^2 = \frac{1}{2}(pb^2+qa^2) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \tag{12}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\rho_k^n = \frac{pq}{n}(b+a)^2 + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \tag{13}$$

对于充分大的 n, 量 $1+\rho_k^n > 0$ 以及

$$\begin{aligned} S_t^n &= S_0^n \exp\left\{\sum_{k=1}^{[nt]} \ln(1+\rho_k^n)\right\} \\ &= S_0^n \exp\left\{\sum_{k=1}^{[nt]} \left(\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

假定下列条件满足:

$$pb - qa = 0. \tag{15}$$

于是, 记

$$\sigma^2 = pb^2 + qa^2, \tag{16}$$

并察觉到 $pq(b+a)^2 = \sigma^2$ 以及

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\rho_k^n = \frac{\mu}{n}, \quad \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}(\rho_k^n)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad \mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\rho_k^n = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{17}$$

我们得到, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \sigma^2 t. \tag{19}$$

在所考察的情形下, 下列 *Lindeberg* 条件满足:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left[|\ln(1+\rho_k^n)|^2 I(|\ln(1+\rho_k^n)|>\varepsilon)\right]=0,\ \text{对于}\ \varepsilon>0\ \text{成立}. \tag{20}$$

因此, 由泛函中心极限定理 ([250; 第 VII 章, 定理 5.4]) 导得 (随着 $S_0^n\to S_0$)

$$\mathrm{Law}(S_t^n;t\leqslant 1\,|\,\mathsf{P}^n)\to\mathrm{Law}(S_t;t\leqslant 1\,|\,\mathsf{P}), \tag{21}$$

其中

$$S_t=S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right\}, \tag{22}$$

以及 $W=(W_t)_{t\leqslant 1}$ 是 (关于测度 P 的) 某个维纳过程.

因此, 如果 $B_0^n\to B_0$, 那么

$$\mathrm{Law}(B_t^n,S_t^n;t\leqslant 1\,|\,\mathsf{P}^n)\to\mathrm{Law}(B_t,S_t;t\leqslant 1\,|\,\mathsf{P}), \tag{23}$$

即收敛性 (1) 成立.

现在我们转向把测度 P^n 和 P 替换为鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 后性质 (23) 的类似.

如果对于 $k=1,\cdots,n$,

$$\widetilde{\mathsf{P}}^n\left(\xi_k^n=\frac{b}{\sqrt{n}}\right)=\widetilde{p}^n,\quad \widetilde{\mathsf{P}}^n\left(\xi_k^n=-\frac{a}{\sqrt{n}}\right)=\widetilde{q}^n,$$

并且关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$, 量 $\xi_1^n,\cdots,\xi_n^n$ 为独立, 那么鞅性条件

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\left(\frac{S_k^n}{B_k^n}\,\middle|\,\mathscr{F}_{k-1}^n\right)=\frac{S_{k-1}^n}{B_{k-1}^n},\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

导致关系式

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\rho_k^n=r_k^n,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

它显然等价于条件

$$b\widetilde{p}^n-a\widetilde{q}^n=\frac{r-\mu}{\sqrt{n}}. \tag{24}$$

考虑要求 $\widetilde{p}^n+\widetilde{q}^n=1$, 由此求得

$$\begin{aligned}\widetilde{p}^n&=\frac{a}{a+b}+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{r-\mu}{a+b},\\ \widetilde{q}^n&=\frac{a}{a+b}-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{r-\mu}{a+b}.\end{aligned} \tag{25}$$

(比较第五章 §3f 中的例 2, 其中也确立了鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 的唯一性和量 $\xi_1^n,\cdots,\xi_k^n$ 关于该测度的独立性.)

因此,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\rho_k^n = \frac{r}{n},$$

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}(\rho_k^n)^2 = \frac{\widetilde{\sigma}^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$\mathsf{D}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\rho_k^n = \frac{\widetilde{\sigma}^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

其中 $\widetilde{\sigma}^2 = ab$.

我们察觉, 条件 $p+q=1$ 和 $pb-qa=0$ 导致 $ab = pb^2+qa^2$. 换句话说, $\sigma^2 = \widetilde{\sigma}^2$, 而这就是说,

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t,$$

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{D}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \sigma^2 t.$$

Lindeberg 条件 (20) 也对测度 P^n 替换为 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 而满足. 因此, 再次应用泛函中心极限定理 (随着 $S_0^n \to S_0$), 我们求得

$$\mathrm{Law}(S_t^n; t \leqslant 1 \mid \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(S_t; t \leqslant 1 \mid \widetilde{\mathsf{P}}), \tag{26}$$

其中

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \widetilde{W}_t\right\},$$

$\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\leqslant 1}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是维纳过程, 这里 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是由 Girsanov 定理 (第三章 §3e) 如下确定的唯一鞅测度:

$$d\widetilde{\mathsf{P}} = \exp\left\{-\frac{\mu - r}{\sigma}W_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right\} d\mathsf{P}.$$

这时, $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$.

这样, 下列定理成立:

定理. 如果在 (6)–(10) 中定义的 *Cox-Ross-Rubinstein* “极限前” 模型中, 参数 $a>0$, $b>0$, $p>0$ 和 $q>0$ 满足 $pb-qa=0$ 和 $p+q=1$, 那么向 *Black-Merton-Scholes* “极限” 模型的收敛性 (21) 和 (26) 同时成立.

4. 现在略微改变 Cox-Ross-Rubinstein “极限前” 模型, 其中放弃 “限制” 条件 $pb-qa=0$, 但是仍然保持应用泛函极限定理的可能性.

为此, 我们将认为, 对于奇数值 $k=1,3,\cdots$, 量 ρ_k^n 还是用公式 (9) 来定义, 而对于偶数值 $k=2,4,\cdots$,

$$\rho_k^n = \frac{\mu}{n} + \eta_k^n, \quad \mu > 0,$$

其中

$$\mathsf{P}^n\left(\eta_k^n = -\frac{b}{\sqrt{n}}\right) = p, \quad \mathsf{P}^n\left(\eta_k^n = \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = q.$$

于是对于 $k=2,4,\cdots$,

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\rho_k^n = \frac{\mu}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}(pb-aq),$$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}(\rho_k^n)^2 = \frac{1}{n}(pb^2+qa^2) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\rho_k^n = \frac{pq}{n}(a+b)^2 + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

因此, 考虑到 (对于奇数 k 的) 公式 (11)–(13), 我们求得

$$\sum_{k=1}^{[nt]}\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t,$$

$$\sum_{k=1}^{[nt]}\mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \sigma^2 t,$$

其中

$$\sigma^2 = pq(a+b)^2.$$

这样, 在所考察的不均匀 Cox-Ross-Rubinstein 模型中, 与均匀情形下一样的结果成立:

$$\mathrm{Law}(S_t^n; t \leqslant 1 \mid \mathsf{P}^n) \to \mathrm{Law}(S_t; t \leqslant 1 \mid \mathsf{P}), \tag{27}$$

其中过程 $S=(S_t)_{t\leqslant 1}$ 由带 $\sigma^2 = pq(a+b)^2$ 的公式 (22) 来确定.

现在设 $\widehat{\mathsf{P}}^n$ 为鞅测度, 关于它, 量 $\rho_1^n,\cdots,\rho_n^n$ 还是形成独立随机变量序列, 且

$$\widehat{\mathsf{P}}^n\left(\xi_k^n = \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = \widehat{p}_k^n, \quad \widehat{\mathsf{P}}^n\left(\xi_k^n = -\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = \widehat{q}_k^n,$$

其中对于奇数 k, $\widehat{p}_k^n = \widetilde{p}^n$ 和 $\widehat{q}_k^n = \widetilde{q}^n$, 且

$$\widehat{\mathsf{P}}^n\left(\eta_k^n = -\frac{b}{\sqrt{n}}\right) = \widehat{p}_k^n, \quad \widehat{\mathsf{P}}^n\left(\eta_k^n = \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = \widehat{q}_k^n,$$

其中对于偶数 k, $\widehat{p}_k^n$ 和 $\widehat{q}_k^n$ 由下列公式来确定 (根据鞅性要求): $\widehat{p}_k^n = \widehat{p}^n$, $\widehat{q}_k^n = \widehat{q}^n$, 这里

$$\widehat{p}^n = \frac{a}{a+b} - \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{r-\mu}{a+b},$$

$$\widehat{q}^n = \frac{b}{a+b} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{r-\mu}{a+b}.$$

于是对于所有 $k = 1, \cdots, n$,

$$\mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}^n} \rho_k^n = \frac{r}{n},$$
$$\mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}^n} (\rho_k^n)^2 = \frac{ab}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$
$$\mathsf{D}_{\widehat{\mathsf{P}}^n} \rho_k^n = \frac{ab}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}^n} \left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \left(r - \frac{\widehat{\sigma}^2}{2}\right) t,$$
$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{D}_{\widehat{\mathsf{P}}^n} \left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \sigma^2 t,$$

其中 $\widehat{\sigma}^2 = ab$, 以及再考虑到所满足的 Lindeberg 条件, 我们求得 (随着 $S_0^n \to S_0$)

$$\mathrm{Law}(S_t^n; t \leqslant 1 \,|\, \widehat{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(S_t; t \leqslant 1 \,|\, \widehat{\mathsf{P}}), \tag{28}$$

其中

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\widehat{\sigma}^2}{2}\right) t + \widehat{\sigma} \widehat{W}_t\right\},$$

以及 $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t \leqslant 1}$ 关于测度 $\widehat{\mathsf{P}}$ 是维纳过程, 且

$$d\widehat{\mathsf{P}} = \exp\left\{-\frac{\mu - r}{\widehat{\sigma}} W_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\widehat{\sigma}}\right)^2\right\} d\mathsf{P}.$$

我们注意到, 一般来说, $ab \neq pq(a+b)^2$, 而这就是说, $\widehat{\sigma}^2 \neq \sigma^2$. 尤其是, 如果在“极限”模型中波动率为 σ^2, 而参数 $a > 0, b > 0, p > 0$ 和 $q > 0$ 选取为使得 $p + q = 1$ 和 $\sigma^2 = pq(a+b)^2$, 那么将有泛函收敛性 (27) 成立, 但是在 (28) 中的“极限”波动率 $\widehat{\sigma}^2$ 可能 (在缺乏以前运用的“限制”条件 $pb - aq = 0$ 的情况下) 不同于 σ^2.

所引入的不均匀 Cox-Ross-Rubinstein 模型表明, 在这些模型的选择中, 作为带参数 (μ, σ^2) 的 Black-Merton-Scholes 模型的近似, 必须相当小心地选取“极限前”模型的参数 (p, q, a, b), 因为即使具有相对于原来的概率测度的收敛性 (27), 还完全可能发生相应的关于鞅测度的收敛性 (对带参数 (μ, σ^2) 的 Black-Merton-Scholes 模型的收敛性) 不成立. 而这转而导致“极限前”模型的合理 (对冲) 价格 $\mathbb{C}_1^n$ 可能不收敛于“极限”模型中的 (所期待的) 价格 $\mathbb{C}_1$.

显然, 类似的局面也可能在其他近似模式中发生.

5. 与上面所考察的过程 $S^n = (S^n_t)_{t\leqslant 1}$ 向过程 $S = (S_t)_{t\leqslant 1}$ 的既关于原来的测度 (P^n 和 P), 又关于鞅测度 ($\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$) 的收敛性相联系, 自然要引入这一方向的某些一般结果.

出于这一目的, 为简化讨论, 认为 $B^n_t \equiv 1$, $B_t \equiv 1$, $t \leqslant 1$, $n \leqslant 1$, 我们首先注意到, 由分布律 $\mathrm{Law}(S^n \,|\, \mathsf{P}^n)$ 的弱收敛, 即使在 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd (\mathsf{P}^n)$ 的邻近性假定下, 一般来说, 不能得到 $\mathrm{Law}(S^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n)$ 的弱收敛性, 尽管序列 $(\mathrm{Law}(S^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n))_{n\geqslant 1}$ 是紧密的 (详情参见专著 [250] 第 X 章中的第 3 节), 因而, 在原则上, 可能有多个极限测度 (取不同的子列).

允许确保极限概率测度的唯一性的标准例子之一在于, 除了分布律 $\mathrm{Law}(S^n \,|\, \mathsf{P}^n)$ 的弱收敛条件和邻近性 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd (\mathsf{P}^n)$ 以外, 还要求联合分布律 $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \mathsf{P}^n)$ 的弱收敛性, 其中 $Z^n = (Z^n_t)_{t\leqslant 1}$ 和 $Z^n_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_t}{d\mathsf{P}^n_t}$ 为测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n_t$ 关于测度 P^n_t 的密度 ($\widetilde{\mathsf{P}}^n_t$ 和 P^n_t 是测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ 和 P^n 在 σ-代数 $\mathscr{F}^n_t$ 上的局限, 其中 $\mathscr{F}^n_t$ 属于其上定义过程 $S^n = (S^n_t)_{t\leqslant 1}$ 的随机基底 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}^n_t)_{t\leqslant 1}, \mathsf{P}^n))$.

于是由所谓 *Le Cam* 第三引理的推广文本 (参见 [250; 第 X 章, 定理 3.3]) 得到, 分布律 $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n)$ 的序列弱收敛于某个概率测度, 它关于分布律 $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \mathsf{P}^n)$ $(n \geqslant 1)$ 的弱极限测度绝对连续. 如果同时 $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \mathsf{P}^n) \to \mathrm{Law}(S, Z \,|\, \mathsf{P})$, 那么 $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(S, Z \,|\, \widetilde{\mathsf{P}})$, 其中测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 满足 $d\widetilde{\mathsf{P}} = Zd\mathsf{P}$.

6. 为了解释这些结果, 我们再转向上面所考察的 Cox-Ross-Rubinstein 模型 (6)-(7); 为简单起见, 假设 $r = 0$, $B^n_0 = 1$, 并使这一模型采用第五章 §3d 第 7 点中在描述最小鞅测度的构造时所运用的形式. (也参见著作 [392].)

设 $H^n_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \rho^n_l$. 于是, 如果 $pb - qa = 0$, 那么有 $M^n_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \xi^n_l$ 的序列 $M^n = (M^n_k)_{k\leqslant n}$ 将是平方可积鞅, 其平方特征为 $\langle M^n\rangle = (\langle M^n\rangle_k)_{k\leqslant n}$, 其中 $\langle M^n\rangle_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \mathsf{D}\xi^n_l = \sigma^2 k$, $\sigma^2 = pb^2 + qa^2\ (= ab)$.

如果令 $a^n_k = \frac{\mu}{\sigma^2}$, 那么序列 $H^n = (H^n_k)_{k\leqslant n}$ 的 Doob 分解 (第二章 §1b) 可 (用增量的术语) 表达为下列形式:

$$\Delta H^n_k = a^n_k \Delta\langle M^n\rangle_k + \Delta M^n_k. \tag{29}$$

设 $b\mu < \sigma^2$. 于是有

$$d\widetilde{\mathsf{P}}^n = \prod_{k=1}^{n} (1 - a^n_k \Delta M^n_k) d\mathsf{P}^n \tag{30}$$

的 (最小) 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ (比较第五章 §3d 中的 (31)) 将是概率测度, 并且同时还是序列 $H^n = (H^n_k)_{k\leqslant n}$ 的 (唯一) 鞅测度, 后者可由第五章 §3d 第 7 点中的叙述可得, 也可直接验证来确立.

令

$$Z_t^n = \prod_{k=1}^{[nt]}(1 - a_k^n \Delta M_k^n) = \mathscr{E}\left(-\sum_{k\leqslant \cdot} a_k^n \Delta M_k^n\right)_{[nt]}, \tag{31}$$

我们把 S_t^n 表示为下列形式:

$$\begin{aligned} S_t^n &= S_0^n \prod_{k=1}^{[nt]}(1 + \Delta H_k^n) = S_0^n \mathscr{E}(H^n)_{[nt]} \\ &= S_0^n \mathscr{E}\left(\sum_{k\leqslant \cdot} a_k^n \Delta\langle M^n\rangle_k + M_\cdot^n\right)_{[nt]}. \end{aligned} \tag{32}$$

又设 $M = (M_t)_{t\leqslant 1}$ 为有平方特征 $\langle M\rangle = (\langle M\rangle_t)_{t\leqslant 1}$ 的 (在某个随机基底 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\leqslant 1}, \mathsf{P})$ 上的) 平方可积鞅, $a = (a_t)_{t\leqslant 1}$ 为某个满足 $a^2 \cdot \langle M\rangle_1 < \infty$ $\left(\text{即 } \int_0^1 a_t^2 d\langle M\rangle_t < \infty\right)$ 的可料过程,

$$H_t = \int_0^t a_s d\langle M\rangle_s + M_t, \tag{33}$$

以及

$$Z_t = \mathscr{E}\left(-\int_0^\cdot a_s dM_s\right)_t, \quad S_t = S_0 \mathscr{E}(H)_t. \tag{34}$$

在公式 (31)–(34) 中所表达的结构表明, 必须要对所引入的对象提出要求才能有弱收敛性

$$\mathrm{Law}(S_t^n, Z_t^n; t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}^n) \to \mathrm{Law}(S_t, Z_t; t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}). \tag{35}$$

这样, 如果 $a^n = (a_t^n)_{t\leqslant 1}$, $M^n = (M_t^n)_{t\leqslant 1}$ 和 $\langle M^n\rangle = (\langle M^n\rangle_t)_{t\leqslant 1}$ 为由 $(a_k^n)_{k\leqslant n}$, $(M_k^n)_{k\leqslant n}$ 和 $(\langle M^n\rangle_k)_{k\leqslant n}$ 所构造的按段常数过程, 那么为了有收敛性 (35), 显然只需分布律

$$\mathrm{Law}\left(M_t^n, \sum_{k=1}^{[nt]} a_k^n \Delta M_k^n, \sum_{k=1}^{[nt]} a_k^n \Delta\langle M^n\rangle_k; t \leqslant 1 \,\middle|\, \mathsf{P}^n\right)$$

收敛于分布律

$$\mathrm{Law}\left(M_t, \int_0^t a_s dM_s, \int_0^t a_s d\langle M\rangle_s; t \leqslant 1 \,\middle|\, \mathsf{P}\right),$$

以及收敛性 $S_0^n \to S_0$.

这种鞅和随机积分的收敛性的各种各样的条件例如可在 [250; 第 IX 章] 和 [254] 中找到. 特别是, 由 [254] 中的定理 2.6 和 2.11 导出, 只要

$$\mathrm{Law}(M_t^n, a_t^n; t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}^n) \to \mathrm{Law}(M_t, a_t; t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P})$$

成立, 以及下列鞅的跳跃的一致小条件满足:

$$\sup_n \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left[\sup_{t\leqslant 1}|\Delta M_t^n|\right] < \infty,$$

那么所要求的收敛性成立.

对于模型 (6)–(7), 这个条件显然满足, 并且作为极限过程, $M = (M_t)_{t\leqslant 1}$ 可取为 (正如由第 3 点得到) $M_t = \sigma W_t$ 的过程, 其中 $W = (W_t)_{t\leqslant 1}$ 是标准维纳过程, $\sigma^2 = pb^2 + qa^2$. 于是 $H_t = \mu t + \sigma W_t$, 以及 $S_t = S_0\mathscr{E}(H)_t$. 由于 $d\mathscr{E}(H)_t = \mathscr{E}(H)_t dH_t$, 故 $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$. 这就是说, 正如所期待的, 过程 $S = (S_t)_{t\leqslant 1}$ 无非就是几何布朗运动:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}.$$

由 (34) 我们也求得

$$Z_t = \exp\left\{-\frac{\mu}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 t\right\}.$$

在所考察的情形下, 如同在 §3c 第 5 点的例 1 中那样来确立, 邻近性 $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd (\mathsf{P}^n)$ 成立. 因此, 由所陈述的 "Le Cam 第三引理" 的推广文本导出

$$\mathrm{Law}(S_t^n; t \leqslant 1 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(S_t; t \leqslant 1 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}),$$

其中 $d\widetilde{\mathsf{P}} = Z_1 d\mathsf{P}$.

由于根据 Girsanov 定理 (第三章 §3e), 有 $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu}{\sigma}t$ 的过程 $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\leqslant 1}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为维纳过程, 故

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(\mu t + \sigma W_t; t \leqslant 1 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) &= \mathrm{Law}(\sigma \widetilde{W}_t; t \leqslant 1 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) \\ &= \mathrm{Law}(\sigma W_t; t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}).\end{aligned}$$

因此,

$$\mathrm{Law}(S_t; t \leqslant 1 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) = \mathrm{Law}(S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t}; t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}),$$

它就是前面在第 3 点中直接应用泛函中心极限定理所确立的结果 (参见 (26)).

4. 二叉树 (B, S)-市场上的欧式期权

§4a. 关于期权合约的定价问题

1. 按照第一章 §1a 中所叙述的传统和分类, 在金融理论中通常区分出下列两种形式的金融工具 (特别是对于证券):

基本的, 或者第一位的,

以及

衍生的, 或者第二位的.

在前面几章中, 汇率和基本证券 (银行账户, 股票, 债券) 已经被投以许多关注: 考察其动态变化的各种模型, 引入统计分析结果, 以用来特别是解释金融时间数据的现象, 诸如聚集性, 分形性, 具有长记忆性等等.

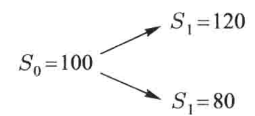
对给出衍生证券定价基础的理论问题也投以很大的关注, 它们依靠在 "公平" 构建的金融市场的无套利性的观念上.

在第一章中已经注意到, 使用衍生证券不仅是由于它们的投机利益才有意义. 衍生证券的重要价值在于它们起着对冲金融工具的作用, 即, 它是防范由未来价格运动的不确定性所引起的可能风险的金融工具.

比如公司 A 的股票 "今日" 价格为 $S_0 = 100$, 而投资者期待它的价格上扬 ($S_1 = 120$), 那么他可能 (在时刻 $n = 0$) 购买股票, 并在以后 (在时刻 $n = 1$) 出售它, 获利为 $S_1 - S_0 = 120 - 100 = 20$.

当然, 价格也可能下跌 ($S_0 = 100 \downarrow S_1 = 80$), 于是购买–出售导致亏损: $S_1 - S_0 = 80 - 100 = -20$.

因此, 在所考察的局面下, 可能有下列价格运动:



"大" 盈利 (=20, 或者 $S_0 = 100$ 的 20%) 伴随着 "大" 亏损风险 ($= -20$, 它也构成买价 $S_0 = 100$ 的 20% 的亏损).

然而, 除了所描述的投资者在基本证券市场上进行的策略 (在该情形下为购买–出售股票) 以外, 它还可能在衍生证券市场上这样运作: 购买执行时刻为 $n = 1$ 的买入期权, 使他有权 (参见第一章中的 §1c) 在时刻 $n = 1$ 按照比如说价格 $K = 100$ 来购买股票.

于是, 如果 $S_0 = 100$ 以及 $S_1 = 120$, 那么投资者按照 (在约定的未来) 价格 $K = 100$ 购买股票, 并立即按现货市场上的市场价格 $S_1 = 120$ (在所谓现货市场[1]) 出售, 获利 $(S_1 - K)^+ = 20$.

当然, 为了持有这样的有权按约定的价格 ($K = 100$) 购买股票的期权, 必须对期权的发行者支付 "权利金". 设这一权利金 $\mathbb{C}_1 = 10$. 于是在股票价格上扬的情形下 ($S_0 = 100 \uparrow S_1 = 120$) 期权购买者的纯收益将是 10. 在价格下跌的情形下 ($S_0 = 100 \downarrow S_1 = 80$) 期权购买者不再把期权提交执行 ("当股票能以较低的市场价

[1] 在金融文献中, 经常运用 (参见例如 [50]) 下列术语: 与未来交割、未来运作等等相联系的合约 (诸如期权、期货、远期等等) 通常称为期货 (forward, forward delivery); 而预计要立即交割的合约称为现货 (spot).

格 $S_1 = 80$ 购买时, 按照价格 $K = 100$ 去购买股票是无意义的"), 带来的亏损等于他为期权所支付的 "权利金" $(= 10)$.

这样一来, 使用买入期权 (作为衍生证券的一种形式) 降低了投资者的风险 (亏损从 20 单位降低为现在的只有 10 单位), 不过, 可能的收益当然也变少 (10 取代 20).

在这一含义下, 可以说, 对于预料价格上扬 (即, 按照第一章 §1c 的术语: "牛市") 的投机者来说, 基于购买买入期权的策略比起基于直接的购买–出售股票的策略来, 具有较大的 "防范" 可能亏损的力量.

现在我们考察 "熊市": 投机者预料 (在所考察情形下的股票) 价格下跌. 在原理上, 不禁止在多个市场上出售股票的合约, 尽管在这些市场上作物理上的出售可能不行. 我们设想在时刻 $n = 1$ 签订了按价格 100 出售股票的合约. 如果价格正如所预料的 "熊市", S_1 变为 80, 那么他在市场上按照这一 "市场" 价格 $S_1 = 80$ 购买股票, 而履行合约为他带来 20 单位的收益. 如果 $S_1 = 120$, 那么 "牛市"①亏损变为 20 单位. 换句话说, 再次说明, 可能有 "高" 收益, 也可能有高 "亏损".

类似于 "牛市", "熊市" 也有可能转向衍生证券市场. 例如, 他可能购买卖出期权 (再次设其价格为 10 单位, 而 $K = 100$), 使他有权利 (对他来说, 也可能不执行) 按照价格 $K = 100$ 来出售股票. 于是, 如果 $S_1 = 80$, 那么他按这一 "市场" 价格购买股票, 并按期权合约预定的价格 $K = 100$ 出售. 考虑到所支付的权利金, 纯收益在价格下跌的情形下 $(S_0 = 100 \downarrow S_1 = 80)$ 为 $20 - 10 = 10$. 如果发生价格上扬, 那么 "牛市"②带来的亏损为 10 单位. 这样一来, 持有卖出期权降低了投机风险, 与此相应的是也减少了可能的投机收益.

上面所引入的数字特征取得相当任意, 尽管如此, 从整体上来说它们恰当地说明了衍生证券的 "投机" 作用和 "防范" 作用.

2. 联系期权的根本问题之一在于: 怎样计算持有期权合约所应该支付的 "权利金" 的公平合理价值. 这一问题无论对于证券的购买者还是发行–出售者来说都有意义; 对于后者来说, 同样重要的问题在于怎样支配所得到的 "权利金", 以保证签约时所预定的条件得到满足. 当然, 发行者感兴趣的问题还有在期权合约的市场 "波动" 时, 他的整体收益和亏损的评估.

注意, 这样那样的衍生证券的定价理论依赖于以怎样的模型来描述基本证券, 怎样作出有关证券市场的结构和功能的假设. 在这方面, 最简单的是用二叉树 CRR-模型 (即, Cox-Ross-Rubinstein 模型) 描述的 (B, S)-市场 (参见第二章 §1c). 尽管这一模型很简单, 以此为例, 就能完全理解基于 "无套利" 思想的定价的一般原理和阐释定价的技巧. 这时, 期权引人注目的就不仅是因为其自身, 并且也是因为与证券市场上的决策相联系的许多其他问题; 它们或者有可能用期权的语言来改写, 或者有可

① 在原版上, 这里为 "熊市", 英文版删去 "熊市". —— 译者注

② 在原版和英文版上这里都是 "熊市". —— 译者注

能运用基于简单而意味深长的"对冲"思想的成熟发展的期权合约定价技巧.

§4b. 合理价值定价和对冲策略定价. I. 一般偿付函数情形

1. 在由两种资产所组成的 (B,S)-市场的*CRR*-模型中: $B=(B_n)$ 为银行账户, 而 $S=(S_n)$ 为股票, 假定

$$\begin{aligned}\Delta B_n &= rB_{n-1},\\ \Delta S_n &= \rho_n S_{n-1},\end{aligned} \tag{1}$$

其中 (ρ_n) 为取两个值 a 和 b $(a<b)$ 的独立随机变量序列, 而 r 为利率, $-1<a<r<b$.

除了要求 (1) 以外, 假定, 给定在渗透概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathsf{P})$ 上的序列 $\rho=(\rho_n)$ 满足

$$\mathsf{P}(\rho_n=b)=p,\quad \mathsf{P}(\rho_n=a)=q,$$

$p+q=1$, $0<p<1$, 并且对于每个 n, 量 ρ_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

在所考察的模型下, 所有的随机性, 形象地说, 都"来自"量 ρ_n, 因而, 作为基本事件空间 Ω 或者可取作 $\Omega_N=\{a,b\}^N$, 即有 $x_n=a$ 或者 b $(n\leqslant N)$ 的序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的空间, 或者是空间 $\Omega_\infty=\{a,b\}^\infty$, 即有 $x_n=a$ 或者 b $(n\in\{1,2,\cdots\})$ 的序列 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ 的空间. 这时, $\rho_n(x)=x_n$, 并且由于所考察的空间 Ω_N 和 Ω_∞ 的离散性, 在相应的 Borel 集合上的概率测度 P_N 或者 P 完全由其有限维分布 $\mathsf{P}_n=\mathsf{P}_n(x_1,\cdots,x_n)$ 来确定, 其中 $n\leqslant N$ 或者 $n<\infty$.

如果 $\nu_b(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}I_b(x_i)$ 为 x_i $(i\leqslant n)$ 等于 b 的个数, 那么, 显然,

$$\mathsf{P}_n(x_1,\cdots,x_n)=p^{\nu_b(x_1,\cdots,x_n)}q^{n-\nu_b(x_1,\cdots,x_n)}. \tag{2}$$

另一方面, 可以说, $\mathsf{P}_n=\underbrace{\mathsf{Q}\otimes\cdots\otimes\mathsf{Q}}_{n\text{次}}$ 是测度 Q 的直积, 其中 Q 满足 $\mathsf{Q}(\{b\})=p$, $\mathsf{Q}(\{a\})=q$, 而 $p>0$, $q>0$, $p+q=1$. 根据第五章 §1d, *CRR*-模型是无套利完全市场, 而根据第一和第二基本定理, 对于每个 $n\geqslant 1$, 存在唯一鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_n\sim\mathsf{P}_n$, 有下列简单结构 (比较 (2)):

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n(x_1,\cdots,x_n)=\widetilde{p}^{\nu_b(x_1,\cdots,x_n)}\widetilde{q}^{n-\nu_b(x_1,\cdots,x_n)}, \tag{3}$$

其中

$$\widetilde{p}=\frac{r-a}{b-a},\quad \widetilde{q}=\frac{b-r}{b-a}. \tag{4}$$

由 (3) 得到, 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ 如同测度 P_n 一样, 有"直积"结构: $\widetilde{\mathsf{P}}_n=\underbrace{\widetilde{\mathsf{Q}}\otimes\cdots\otimes\widetilde{\mathsf{Q}}}_{n\text{次}}$, 其中 $\widetilde{\mathsf{Q}}(\{b\})=\widetilde{p}$, $\widetilde{\mathsf{Q}}(\{a\})=\widetilde{q}$.

2. 我们将考察执行时间 $N<\infty$ 的欧式期权, 其偿付函数 (偿付索求) f_N 一般来说, 依赖于所有以前的值 $S_0, S_1, \cdots, S_N$, 或者等价地依赖值 $S_0, \rho_1, \cdots, \rho_N$. (关于有关期权的各种定义, 参见第一章中的 §1c.)

正如已经注意到, 既对于期权合约的出售 (发行) 者来说, 也对于其购买者来说, 首要的问题在于理解这一合约的 "公平" (或者 "合理") 价值.

根据第五章 §1b 中的叙述, 在无套利完全市场上, 其中包括所考察的二叉树 (B,S)-市场, 公平 (合理) 价格自然认为是 (完善欧式对冲) 量:

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})=\inf\{x\geqslant 0\colon \exists\pi, \text{ 使得 } X_0^\pi=x \text{ 和 } X_N^\pi=f_N\,(\mathsf{P}\text{-a.s.})\}, \tag{5}$$

其中 $X^\pi=(X_n^\pi)_{0\leqslant n\leqslant N}$ 为对应自融资策略 $\pi=(\beta,\gamma)$ 的资本. (详情参见第五章 §1b, 以及本章的 §1b.)

这时, $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ 可按 §1b 中的下列公式 (4) 来计算:

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})=B_0\widetilde{\mathsf{E}}\frac{f_N}{B_N}, \tag{6}$$

其中 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 是按鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 的均值.

对于模型 (1), $B_N=B_0(1+r)^N$. 因此, 这里

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})\equiv\widetilde{\mathsf{E}}\frac{f_N}{(1+r)^N}, \tag{7}$$

并且从原理的视角来看, 这一公式完全解决了有偿付函数 f_N 的期权合约的合理价格问题.

尤其引人注目的是, 在所考察的模型中, 从购买者处获得权利金 $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ 的期权出售者, 可以构成这样的组合 $\widetilde{\pi}(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$, 使得其资本 $X^{\widetilde{\pi}}=(X_n^{\widetilde{\pi}})_{n\leqslant N}$ 在时刻 N 恰好复制了偿付函数 f_N. 这时, 正如在 §1b 中已经注意到, 求组合 $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ 的标准方法如下组成.

我们构成鞅 $M=(M_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}}_N)_{n\leqslant N}$, 其中

$$M_n=\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right).$$

根据 "$\dfrac{S}{B}$-表示式", 可求得这样的可料序列 $\widetilde{\gamma}=(\widetilde{\gamma}_i)_{i\leqslant N}$, 使得

$$M_n=M_0+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\gamma}_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right),\quad n\leqslant N. \tag{8}$$

令 $\widetilde{\beta}_k=M_k-\dfrac{\widetilde{\gamma}_kS_k}{B_k}$, 我们得到 (参见第五章 §4b 和本章中的 §1b) 自融资对冲 $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$, 其资本

$$X_k^{\widetilde{\pi}}=\widetilde{\beta}_kB_k+\widetilde{\gamma}_kS_k=B_k\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N}\,\middle|\,\mathscr{F}_k\right)$$

满足

$$X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}), \tag{9}$$

以及 “完善” 性质

$$X_N^{\widetilde{\pi}} = f_N.$$

由于

$$\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) = \frac{S_{k-1}(\rho_k - r)}{B_k}, \tag{10}$$

我们由 (8) 看到

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(\rho)}(\rho_k - r) = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(\rho)} \Delta m_k^{(\rho)}, \tag{11}$$

其中 $\widetilde{\alpha}_k^{(\rho)}$ 和 $\widetilde{\gamma}_k$ 由下列关系式相联系:

$$\widetilde{\gamma}_k = \frac{\widetilde{\alpha}_k^{(\rho)} B_k}{S_{k-1}}, \tag{12}$$

而序列 $m^{(\rho)} = (m_n^{(\rho)}, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}}_N)_{n \leqslant N}$,

$$m_n^{(\rho)} = \sum_{k=1}^{n}(\rho_k - r) \tag{13}$$

形成鞅.

以后将变得很明显, 除了序列 $\rho = (\rho_n)$ 以外, 还要适当地引入序列 $\delta = (\delta_n)$, 令

$$\delta_n = \frac{\rho_n - a}{b - a}. \tag{14}$$

显然这时有

$$\rho_n = \begin{cases} b \\ a \end{cases} \Longleftrightarrow \delta_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \tag{15}$$

以及 $\mathscr{F}_n = \sigma(\rho_1, \cdots, \rho_n) = \sigma(\delta_1, \cdots, \delta_n)$.

由于

$$\delta_k - \widetilde{p} = \frac{\rho_k - r}{b - a}, \tag{16}$$

故除了 (8) 和 (11) 以外, 我们也有表示式

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(\delta)} m_k^{(\delta)}, \tag{17}$$

其中序列 $m^{(\delta)} = (m_k^{(\delta)}, \mathscr{F}_k, \widetilde{\mathsf{P}}_N)$,

$$m_l^{(\delta)} = \sum_{l=1}^{n}(\delta_n - \widetilde{p}) \tag{18}$$

是鞅, 以及

$$\widetilde{\alpha}_k^{(\delta)} = (b-a)\widetilde{\alpha}_k^{(\rho)}. \tag{19}$$

我们把所叙述的结果概述为下列断言.

定理 1. 1) 在 CRR-模型中, 对于任何 N 和任何 $\mathscr{F}_N$-可测的偿付索求 f_N, 公平价格 $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ 由下列公式来确定:

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P}) = \widetilde{\mathsf{E}}\frac{f_N}{(1+r)^N}, \tag{20}$$

其中 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 为按鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 的均值.

2) 存在完善自融资对冲 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$, 其资本 $X^{\widetilde{\pi}} = (X_n^{\widetilde{\pi}})_{n\leqslant N}$ 满足

$$X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathbb{C}(f_N;\mathsf{P}), \quad X_N^{\widetilde{\pi}} = f_N$$

和

$$X_n^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{(1+r)^N}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right). \tag{21}$$

3) 对冲 $\widetilde{\pi}$ 的成分 $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)_{n\leqslant N}$ 和 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n\leqslant N}$ 满足

$$\widetilde{\beta}_n = M_n - \frac{\widetilde{\gamma}_n S_n}{B_n},$$

其中 $\widetilde{\gamma}_n$ $(n\leqslant N)$ 由对于鞅 $M = (M_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}}_N)_{n\leqslant N}$ 的 "$\dfrac{S}{B}$-表示式" (8) 来确定, 这里

$$M_n = \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right).$$

3. 正如由定理的阐述可见, 求出完善对冲 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ 以最直接的方式联系着由相互等价的表示式 (8), (11) 或 (17) 之一定义的鞅 $M = (M_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}}_N)_{n\leqslant N}$ 的获得可能. 下面的定理描述了一种成功获得这样的表示式的相当有意义的情形.

定理 2. 设偿付函数

$$f_N = B_N g(\Delta_N), \tag{22}$$

其中 $g = g(\Delta_N)$ 为 $\Delta_N = \delta_1 + \cdots + \delta_N$ 的某个函数.

那么在表示式 (17) 中系数

$$\widetilde{\alpha}_k^{(\delta)} = G_{N-k}(\Delta_{k-1};\widetilde{p}), \qquad 1\leqslant i\leqslant N, \tag{23}$$

其中 $\Delta_0 = 0$ 以及

$$G_n(x;\widetilde{p}) = \sum_{k=0}^{n}[g(x+k+1)-g(x+k)]C_n^k\widetilde{p}^k\widetilde{q}^{n-k}. \tag{24}$$

证明. 我们首先察觉, $M_n = \widetilde{\mathsf{E}}(M_N \mid \mathscr{F}_n)$, 其中 $M_N = \dfrac{f_N}{B_N}$.
由于 $\Delta M_n = \widetilde{\alpha}_n^{(\delta)} \Delta m_n^{(\delta)}$, 故对于 $\widetilde{\alpha}_n^{(\delta)} = \widetilde{\alpha}_n^{(\delta)}(\delta_1, \cdots, \delta_{n-1})$, 我们求得

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_n^{(\delta)} &= \frac{\widetilde{E}(M_N \mid \delta_1, \cdots, \delta_{n-1}, 1) - \widetilde{\mathsf{E}}(M_N \mid \delta_1, \cdots, \delta_{n-1})}{1-\widetilde{p}} \\ &= \frac{\widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \mid \delta_1, \cdots, \delta_{n-1}, 1) - \widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \mid \delta_1, \cdots, \delta_{n-1})}{1-\widetilde{p}}.\end{aligned} \tag{25}$$

在集合 $\{\omega \colon \Delta_{n-1} = x, \delta_n = 1\}$ 上,

$$\widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \mid \mathscr{F}_n) = \widetilde{\mathsf{E}} g(x + 1 + \Delta_N - \Delta_n),$$

以及

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= \widetilde{\mathsf{E}} g(x + \Delta_N - \Delta_{n-1}) \\ &= \widetilde{p}\widetilde{\mathsf{E}} g(x + 1 + \Delta_N - \Delta_n) + (1-\widetilde{p})\widetilde{\mathsf{E}} g(x + \Delta_N - \Delta_n).\end{aligned}$$

因此, 在这个集合上,

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \mid \mathscr{F}_n) - \widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\ &\quad = (1-\widetilde{p})\widetilde{\mathsf{E}}[g(x + 1 + \Delta_N - \Delta_n) - g(x + \Delta_N - \Delta_n)] \\ &\quad = (1-\widetilde{p}) \sum_{k=0}^{N-n} [g(x+1+k) - g(x+k)] C_{N-n}^k \widetilde{p}^k (1-\widetilde{p})^{N-n-k} \\ &\quad = (1-\widetilde{p}) G_{N-n}(x; \widetilde{p}),\end{aligned}$$

再考虑到 (25), 就导致所要求的表示式 (23).
定理得证.

§4c. 合理价值定价和对冲策略定价. II. Markov 偿付函数情形

1. 我们将假定偿付函数 f_N 有下列 "Markov" 形式: $f_N = f(S_N)$, 其中 $f = f(x)$ 为 $x \geqslant 0$ 的某个非负函数.

设

$$X_n^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\mathsf{E}}[f(S_N)(1+r)^{-(N-n)} \mid \mathscr{F}_n] \tag{1}$$

为在时刻 n 的完善对冲 $\widetilde{\pi}$ 的资本, 特别是,

$$\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) = X_0^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\mathsf{E}}[f(S_N)(1+r)^{-N}]. \tag{2}$$

记

$$F_n(x; p) = \sum_{k=0}^{n} f(x(1+b)^k (1+a)^{n-k}) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \tag{3}$$

于是, 由于

$$\prod_{n<k\leqslant N}(1+\rho_k)=(1+b)^{\Delta_N-\Delta_n}(1+a)^{(N-n)-(\Delta_N-\Delta_n)}, \tag{4}$$

其中 $\Delta_n=\delta_1+\cdots+\delta_n$, $\delta_k=\dfrac{\rho_k-a}{b-a}$, 故

$$\widetilde{\mathsf{E}}f\left(x\prod_{n<k\leqslant N}(1+\rho_k)\right)=F_{N-n}(x;\widetilde{p}), \tag{5}$$

这里 $\widetilde{p}=\dfrac{r-a}{b-a}$.

最后, 考虑

$$S_N=S_n\prod_{n<k\leqslant N}(1+\rho_k), \tag{6}$$

由 (5) 我们得到下列结果.

定理 1. 在有 Markov 偿付函数 $f_N=f(S_N)$ 的 *CRR*-模型中, 完善对冲 $\widetilde{\pi}$ 的资本 $X^{\widetilde{\pi}}=(X_n^{\widetilde{\pi}})_{n\leqslant N}$ 由下列公式确定:

$$X_n^{\widetilde{\pi}}=(1+r)^{-(N-n)}F_{N-n}(S_n;\widetilde{p}). \tag{7}$$

特别是, 期权的合理价格由下列公式确定:

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})\equiv X_0^{\widetilde{\pi}}=(1+r)^{-N}F_N(S_0;\widetilde{p}). \tag{8}$$

2. 我们现在转向完善对冲 $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ 的结构问题.

令

$$g(x)=\frac{f(S_0(1+b)^x(1+a)^{N-x})}{B_N}. \tag{9}$$

于是根据上节中的定理 2, 在下列对于

$$M_N=\frac{X_N^{\widetilde{\pi}}}{B_N}=\frac{f(S_N)}{B_N}$$

的表示式中:

$$M_N=M_0+\sum_{k=1}^{N}\widetilde{\alpha}_k^{(\delta)}(\delta_k-\widetilde{p}),$$

可料函数

$$\widetilde{\alpha}_i^{(\delta)}=G_{N-i}(\Delta_{i-1};\widetilde{p}), \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}G_{N-i}(x;\widetilde{p})&=\frac{1}{B_N}\sum_{k=0}^{N-i}C_{N-i}^k\widetilde{p}^k(1-\widetilde{p})^{N-i-k}\\&\times\left[f\left(S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{x+k+1}\right)-f\left(S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{x+k}\right)\right].\end{aligned} \tag{11}$$

如果这里令 $x = \Delta_{i-1}$, 那么考虑到等式

$$S_{i-1} = S_0(1+a)^{i-1}\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\Delta_{i-1}},$$

以及记号 (3), 由 (11) 得到,

$$G_{N-i}(\Delta_i; \widetilde{p}) = \frac{1}{B_N}[F_{N-i}(S_{i-1}(1+b); \widetilde{p}) - F_{N-i}(S_{i-1}(1+a); \widetilde{p})]. \tag{12}$$

现在我们察觉, 根据 §4b 中的公式 (12) 和 (16),

$$\widetilde{\gamma}_i = \frac{\widetilde{\alpha}_i^{(\delta)} B_i}{S_{i-1}(b-a)} = \frac{G_{N-i}(\Delta_{i-1}; \widetilde{p}) B_i}{S_{i-1}(b-a)}. \tag{13}$$

由 (12) 和 (13) 我们求得

$$\widetilde{\gamma}_i = (1+r)^{-(N-i)} \cdot \frac{F_{N-i}(S_{i-1}(1+b); \widetilde{p}) - F_{N-i}(S_{i-1}(1+a); \widetilde{p})}{S_{i-1}(b-a)}. \tag{14}$$

如同在 §4b 中那样, 记

$$\widetilde{\beta}_i = M_i - \frac{\widetilde{\gamma}_i S_i}{B_i}.$$

由策略 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 的自融资性,

$$\Delta\widetilde{\beta}_i \cdot B_{i-1} + \Delta\widetilde{\gamma}_i \cdot S_{i-1} = 0.$$

因此,

$$X_{i-1}^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_i B_{i-1} + \widetilde{\gamma}_{i-1} S_{i-1} = \widetilde{\beta}_i B_{i-1} + \widetilde{\gamma}_i S_{i-1},$$

而这就是说,

$$\widetilde{\beta}_i = \frac{X_{i-1}^{\widetilde{\pi}}}{B_{i-1}} - \frac{\widetilde{\gamma}_i S_{i-1}}{B_{i-1}}.$$

考虑到 (7) 和 (14), 我们求得

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_i &= \frac{F_{N-i+1}(S_{i-1}; \widetilde{p})}{B_N} - \frac{G_{N-i}(\Delta_{i-1}; \widetilde{p})(1+r)}{b-a} \\ &= \frac{1}{B_N}\Big\{F_{N-i+1}(S_{i-1}; \widetilde{p}) \\ &\quad - \frac{1+r}{b-a}[F_{N-i}(S_{i-1}(1+b); \widetilde{p}) - F_{N-i}(S_{i-1}(1+a); \widetilde{p})]\Big\}.\end{aligned} \tag{15}$$

我们综述所得到的结果.

定理 2. *在有 $f_N = f(S_N)$ 的 CRR-模型中, 完善对冲 $\widetilde{\pi}(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 的成分 $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_i)_{i \leqslant N}$ 和 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_i)_{i \leqslant N}$ 由公式 (14) 和 (15) 确定.*

推论 1. 可料函数 $\widetilde{\beta}_i$ 和 $\widetilde{\gamma}_i$ 只依赖于 "过去的" 值 S_{i-1}:

$$\widetilde{\beta}_i = \widetilde{\beta}_i(S_{i-1}), \quad \widetilde{\gamma}_i = \widetilde{\gamma}_i(S_{i-1}).$$

推论 2. 设非负函数 $f = f(x)$ 不减. 那么由 (3) 和 (14) 得到, 对于完善对冲 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$, 函数 $\widetilde{\gamma}_i \geqslant 0$ 对于所有 $i \leqslant N$ 成立.

注. 如果把量 $\widetilde{\gamma}_i$ 的负性解释为卖空股票 (即所谓 short-selling), 那么推论 2 的结果意味着, 在 $f(x)$ 为非负函数的情形下, 完善对冲是无卖空对冲.

§4d. 标准买入期权和标准卖出期权

1. 对于标准的买入期权来说,

$$f(S_N) = (S_N - K)^+,$$

其中 N 为到期时刻 (maturity time), 而 K 是执行价格 (strike price). 在上节中得到的对于完善对冲的合理价格在这里自然可简化.

根据 §4c 中的定义 (3),

$$F_n(S_0; \widetilde{p}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \widetilde{p}^k (1-\widetilde{p})^{n-k} \max\left\{0, S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K\right\}. \tag{1}$$

设

$$K_0 = K_0\left(a, b, N; \frac{S_0}{K}\right)$$

为满足下列条件的最小整数:

$$S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{K_0} > K. \tag{2}$$

为简单起见, 在 $f_N = (S_N - K)^+$ 的情形下, 记 $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$ 为 $\mathbb{C}_N$ 或 $\mathbb{C}_N^{(K)}$, 如果需要强调对 K 的依赖性.

如果 $K_0 > N$, 那么 $F_N(S_0; \widetilde{p}) = 0$, 因而, 在这一情形下 (参见 §4c 中的 (8)), 合理价格 $\mathbb{C}_N = 0$, 因为这时显然有 $S_N < K$, 使得期权购买者不可能有任何收益, 从而其价格为零.

因此, 我们将假定 $K_0 \leqslant N$. 于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_N &= (1+r)^{-N} F_N(S_0; \widetilde{p}) \\
&= S_0 \sum_{k=K_0}^{N} C_N^k \widetilde{p}^k (1-\widetilde{p})^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k \\
&\quad - K(1+r)^{-N} \sum_{k=K_0}^{N} C_N^k \widetilde{p}^k (1-\widetilde{p})^{N-k}.
\end{aligned} \tag{3}$$

令

$$p^* = \frac{1+b}{1+r}\widetilde{p}, \tag{4}$$

$$\mathbb{B}(j,N;p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}. \tag{5}$$

在这些记号下, 我们得到下列 G. Cox, R. Ross 和 M. Rubinstein [82] 的结果.

定理. 对于有偿付函数 $f(S_N) = (S_N - K)^+$ 的标准欧式期权, 公平 (合理) 价格

$$\mathbb{C}_N = S_0 \mathbb{B}(K_0, N; p^*) - K(1+r)^{-N}\mathbb{B}(K_0, N; \widetilde{p}), \tag{6}$$

其中

$$K_0 = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N} \Big/ \ln \frac{1+a}{1+b}\right]. \tag{7}$$

如果 $K_0 > N$, 那么 $\mathbb{C}_N = 0$.

2. 由于

$$(K - S_N)^+ = (S_N - K)^+ - S_N + K,$$

故对于卖出期权的合理 (公平) 价格, 记为 $\mathbb{P}_N$, 由下列公式确定:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_N &= \widetilde{\mathsf{E}}(1+r)^{-N}(K - S_N)^+ \\ &= \mathbb{C}_N - \widetilde{\mathsf{E}}(1+r)^{-N}S_N + K(1+r)^{-N}.\end{aligned} \tag{8}$$

这里 $\widetilde{\mathsf{E}}(1+r)^{-N}S_N = S_0$. 因此, 下列所谓买入–卖出期权平价恒等式成立:

$$\mathbb{P}_N = \mathbb{C}_N - S_0 + K(1+r)^{-N}. \tag{9}$$

3. 假定 $f = f(S_N)$ 为某个偿付函数, 而 $\mathbb{C}_N^{(f)} = B_0 \widetilde{\mathsf{E}} \dfrac{f(S_N)}{B_N}$ 为相应的合理价格.

下列有意思的观察 (参见例如, [121], [122]) 表明, 正如对于偿付函数 $(S_N - K)^+$ 的合理价格的值 $\mathbb{C}_N^{(K)}$ $(K \geqslant 0)$ 那样, 可用来求出对于别的偿付函数 f 的值 $\mathbb{C}_N^{(f)}$.

假定函数 $f = f(x)$ $(x \geqslant 0)$ 有一阶导数 $f'(x) = \int_0^x \mu(dy)$, 其中 $\mu = \mu(dy)$ 为 $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ 上的 (带符号的) 有限测度. (如果函数 $f(y)$ 存在 "通常的" 二阶导数, 那么 $\mu(dy) = f''(y)dy$.) 于是直接可验证

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^\infty (x - K)^+ \mu(dK),$$

而这就是说,

$$f(S_N) = f(0) + S_N f'(0) + \int_0^\infty (S_N - K)^+ \mu(dK) \ (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

取关于鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ 的数学期望, 我们求得

$$\widetilde{\mathsf{E}}\frac{f(S_N)}{B_N} = \frac{f(0)}{B_N} + \frac{S_0}{B_0}f'(0) + \int_0^\infty \widetilde{\mathsf{E}}\frac{(S_N-K)^+}{B_N}\mu(dK),$$

因而, 根据 §1b 中的公式 (6),

$$\mathbb{C}_N^{(f)} = (1+r)^{-N}f(0) + S_0 f'(0) + \int_0^\infty \mathbb{C}_N^{(K)}\mu(dK). \tag{10}$$

我们察觉, 如果 $f(x) = (x-K_*)^+$, $K_* > 0$, 那么测度 $\mu(dx)$ 聚集在点 K_* 上, 即 $\mu_*(dK) = \delta_{\{K_*\}}(dx)$, 并且正如早就期待的, $\mathbb{C}_N^{(f)} = \mathbb{C}_N^{(K_*)}$.

4. 公式 (6) 和 (9) 解决了买入期权和卖出期权的合理价格求值的问题. 对于这些期权的发行者来说, 更有实际意义的是计算完善对冲 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$, 它可依靠上节公式 (15) 和 (14) 来引入. 对这些公式我们不作详细分析, 而只限于对一个简单例子的讨论, 其思想取自著作 [162]. (也参见 [443], 以及在本章开始考察的类似的说明性的例子.)

例. 我们考察两种货币, 比如 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$. 设 S_n 是 100 单位货币 $\mathbb{A}$ 用货币 $\mathbb{B}$ 的单位来度量的价值, 并且 $n=0$ 和 1. 假定 $S_0 = 150$, 并期待在时刻 $n=1$ 价格 S_1 可能变为 180 (货币 $\mathbb{A}$ 的汇率上涨) 或者 90 (货币 $\mathbb{A}$ 的汇率下跌).

记

$$S_1 = S_0(1+\rho_1), \tag{11}$$

我们求得, ρ_1 取两个值 b 和 a, 其中 $b = \frac{1}{5}$ 和 $a = -\frac{2}{5}$, 分别对应货币 $\mathbb{A}$ 的汇率的上涨和下降.

设 $B_0 = 1$ (按货币 $\mathbb{B}$ 的单位) 和 $r = 0$. 尤其是, (为简化计算) 假定对银行账户的资金借贷都没有利息.

设 $N=1$ 和 $f(S_1) = (S_1-K)^+$, 其中 $K = 150\,(\mathbb{B})$, 即 $K = 150$ 单位货币 $\mathbb{B}$. 这样一来, 当货币 $\mathbb{A}$ 的汇率上涨时, 买入期权购买者得到 $180-150=30$ (货币 $\mathbb{B}$ 单位). 当其下跌时, $f(S_1) = 0$.

暂时还没有对 $\rho_1 = b$ 和 $\rho_1 = a$ 的概率说什么. 如果假定货币 $\mathbb{A}$ 的汇率上涨和下跌各以概率 $\frac{1}{2}$ 发生, 那么 $\mathsf{E}f(S_1) = 30\cdot\frac{1}{2} = 15$, 并且追溯到 Bernoulli 和 Huygens 时代 (参见例如, [186; 397–402 页]), 这种期权所要求的自然支付为量 $\mathsf{E}f(S_1) = 15$ 单位货币 $\mathbb{B}$.

然而, 应该强调, 这一值本质上依赖于关于概率 $p = \mathsf{P}(\rho_1 = b)$ 和 $1-p = \mathsf{P}(\rho_1 = a)$ 的概率假定. 如果 $p = \frac{1}{2}$, 那么我们看到, $\mathsf{E}f(S_1) = 15\,(\mathbb{B})$. 但是如果 $p \neq \frac{1}{2}$, 那么值 $\mathsf{E}f(S_1)$ 也随之改变.

如果同时还考虑到在现实状况下, 实际上对精确的值 p 并无决定性的证据, 那么变得明显的是, 确定自然价格的经典途径不可能被认为是令人满意的.

在这一含义下, 上述合理定价理论是在 p 可能是满足 $0<p<1$ 的任意数的假定下来运作的, 而用来 (按经典模式) 进行计算的值应该取值

$$\widetilde{p}=\frac{r-a}{b-a}.$$

在所考察的例子中,

$$\widetilde{p}=\frac{0+\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}.$$

若 $N=1$, 则当 $a=-\frac{2}{5}$, $b=\frac{1}{5}$, $S_0=K=150$ 时, 对应的值 $K_0=K_0(a,b,1;S_0/K)=1$, 因而, 根据 (3),

$$\mathbb{C}_1=S_0\widetilde{p}(1+b)-K\widetilde{p}=S_0\widetilde{p}b=150\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=20.$$

这样一来, 购买者获得期权, 必须支付等于 20 (单位货币 $\mathbb{B}$) 的权利金 $\mathbb{C}_1$, 它现在可看作期权出售 (发行) 者的*初始资本* $X_0=20\,(\mathbb{B})$, 并作为*投资者*把它投入市场.

我们把资本 X_0 表示为它 (对于 (B,S)-市场) 的通常形式: $X_0=\beta_0B_0+\gamma_0S_0$. 如果认为 $B_0=1$ 以及 $S_0=150$, 那么资本 $X_0=20\,(\mathbb{B})$ 可记为形式 $20=0+\frac{2}{15}\cdot150$. 换句话说, $\beta_0=0$, $\gamma_0=\frac{2}{15}$, 并把这个组合 (β_0,γ_0) 理解为: 在货币 $\mathbb{B}$ 的银行账户中存入 0 单位, 而 $\gamma_0\cdot S_0=\frac{2}{15}\cdot150=20$ 为可转换为货币 $\mathbb{A}$ 的 20 单位货币 $\mathbb{B}$.

设发行者有可能 (从货币 $\mathbb{B}$ 的银行账户中) 贷出自然必须要归还的资金. 那么初始资本 $X_0=20\,(\mathbb{B})$ 可能例如表示为这样的形式: $X_0=-30+\frac{1}{3}\cdot150$, 它对应组合 $(\beta_0,\gamma_0)=(-30,\frac{1}{3})$, 意味着从银行账户贷出 30 单位货币 $\mathbb{B}$, 但发行者随即把 $\frac{1}{3}\cdot150$ 单位货币 $\mathbb{B}$ 换成货币 $\mathbb{A}$, 得到 33.33 单位.

假定, 发行者作为所考察的 (B,S)-市场的投资者, 选取组合 $(\beta_1,\gamma_1)=(\beta_0,\gamma_0)$. 我们考察这一组合在时刻 $N=1$ 给出什么的问题.

由所作的假定, $B_1=B_0=1$, 在银行账户中将有 $\beta_1B_1=-30$ 单位货币 $\mathbb{B}$.

如果发生货币 $\mathbb{A}$ "上涨" ("$180\,\mathbb{B}=100\,\mathbb{A}$"), 对发行者来说, 33.33 单位这种货币价值 60 单位货币 $\mathbb{B}$, 其中 30 单位用来归还银行账户. 扣去 30 单位, 发行者还有 $60-30=30$ 单位货币 $\mathbb{B}$, 用来支付期权购买者, 完全执行合约条件.

如果发生货币 $\mathbb{A}$ "下跌", 那么 33.33 单位这种货币价值 30 单位货币 $\mathbb{A}$, 发行者把它归还给银行账户. 对于期权购买者则什么也不用支付 (他放弃了!), 发行者完全"清账".

所选择的组合 $(\beta_1\gamma_1)=(-30,\frac{1}{3})$ 可能显得有点人为. 然而, 正是上述理论导致这一价值.

其实, 根据 §4c 中的公式 (14), 完善对冲 $\gamma_1=\gamma_1(S_0)$ 的 "最优" 值由下列方式

来计算:

$$\begin{aligned}\gamma_1(S_0) &= \frac{F_0(S_0(1+b);\widetilde{p}) - F_0(S_0(1+a);\widetilde{p})}{S_0(b-a)} \\ &= \frac{f(S_0(1+b)) - f(S_0(1+a))}{S_0(b-a)} = \frac{f(S_0(1+b))}{S_0(b-a)} \\ &= \frac{(S_0(1+b)-K)^+}{S_0(b-a)} = \frac{b}{b-a} = \frac{1/5}{1/5+2/5} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

值 $\beta_1 = \beta_0$ 由下列条件来确定:

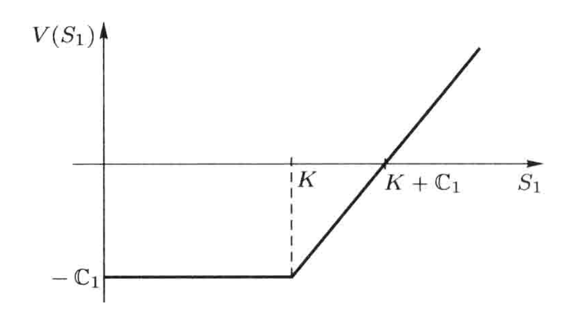
$$X_0 = \beta_0 + \gamma_0 S_0.$$

由于 $X_0 = 20$, $\gamma_0 = \frac{1}{3}$ 和 $S_0 = 150$, 故 $\beta_1 = \beta_0 = -30$, 也就是取上述值.

由所引入的讨论来看很明显, 期权购买者的纯收益 $V(S_1)$ (作为 K 给定时的 S_1 的函数) 由下列公式给定:

$$V(S_1) = (S_1 - K)^+ - \mathbb{C}_1,$$

其图像表现在下列图上:



当然, 这里提出的问题自然是期权出售者有怎样的收益.

不难看出, 在上面所考察的例子中, 无论是在货币 $\mathbb{A}$ "上涨" 的情形下, 还是在 "下跌" 的情形下, 这一收益总是等于零. 这就需要解释, 为什么在金融市场上, 谁会去发行类似的期权和其他衍生证券.

其实, 这涉及更为复杂的局面, 其中首先是因为存在 "经纪费用"、" 佣金"、"税收" 等等, 它们自然增加了上面已经计算的权利金的量值. 例如, "佣金" 可看作期权出售者的收益. 然而, 还需要注意到这样的情况, 发行者 (可能在一个短时期内) 持有由权利金所汇集的补充资金, 可用来使他的资本增值.

还可提出这样的问题: 为什么在金融市场上会存在和运用形形色色、五花八门的期权和其他衍生证券?

一种解释在于在市场上总是有些人在盘算汇率、股价等等或者下跌, 或者上涨. 由此就必定有人应运而生来利用这一局面. 正是这样造就发行买入期权的发行者 (为出现 "牛市" 时考量), 或者发行卖出期权的发行者 (为出现 "熊市" 时考量), 或者它们与其他衍生证券的组合配置的发行者.

§4e. 基于期权的策略 (组合, 价差, 配置)

1. 在实际中, 已知有各种各样的期权及其组合. 在第一章 §1c 中, 引进了某些期权的名称 (“有后效期权”, “亚式期权” 等等). 由于许多期权的非同寻常和意味深长, 都被称之为 “特种期权 (exotic options)” (参见例如, [414]).

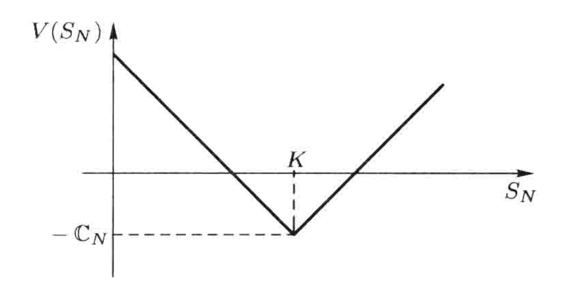
我们也引入一系列基于各种期权形式的流行策略的名称和某些特征. 通常这些策略可分为两类: 组合和价差. 它们之间的区别在于, 组合由不同种的期权形式所构成, 而价差是由同一种的期权形式所构成. (详情参见例如, [50], 其中也包含相应的计算信息以及反映金融工程问题的书目, 这里所说的金融工程的重要工具就是所考察的基于期权的策略.)

2. 组合 (combinations).

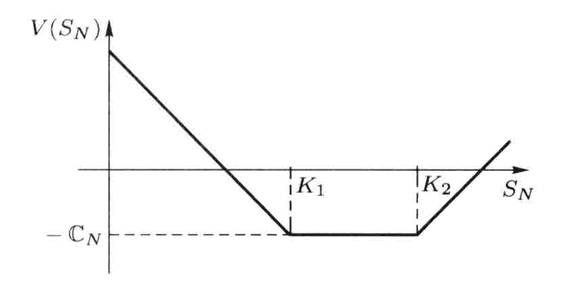
跨骑 (*straddle*) 是在同一种股票上有同样的执行价格 K 和到期时间 N 的买入期权与卖出期权的组合. 对于这样的组合, 购买者的盈亏函数 $V(S_N)\,(= f(S_N) - \mathbb{C}_N)$ 由下列公式来确定:

$$V(S_N) = |S_N - K| - \mathbb{C}_N.$$

这个函数的图像表现在下列图上:



宽跨 (*strangle*) 是在同一种股票上有同样的到期日 N 而有不同的执行价格 K_1 和 K_2 的买入期权与卖出期权的组合. 对于购买者的函数 $V(S_N)$ 的典型图像有下列样式:



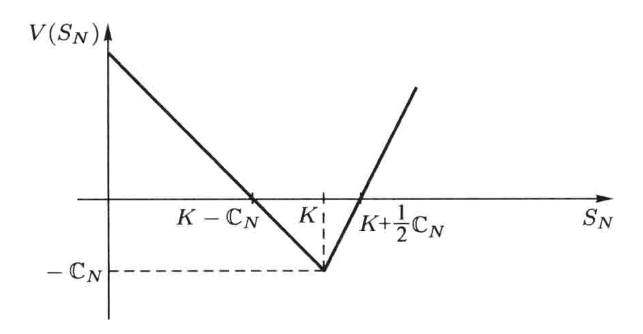
解析上, 函数 $V(S_N)$ 可记为下列形式:

$$V(S_N) = |S_N - K_2| I(S_N > K_2) + |S_N - K_1| I(S_N < K_2) - \mathbb{C}_N.$$

斜跨 (*strap*) 是有同样的到期日 N 但一般来说有不同的执行价格 K_1 和 K_2 的一个卖出期权与两个买入期权的组合. 如果 $K_1 = K_2 = K$, 那么函数

$$V(S_N) = 2|S_N - K|I(S_N > K) + |S_N - K|I(S_N < K) - \mathbb{C}_N.$$

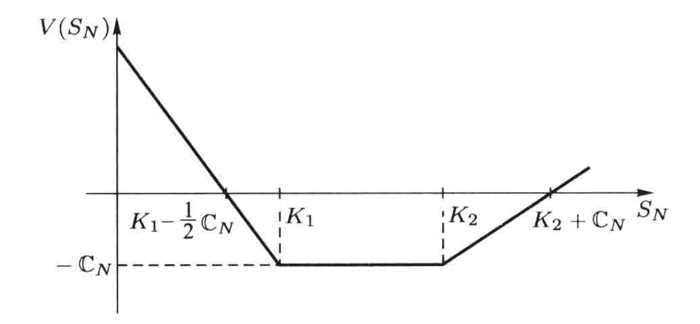
在这一情形下, 函数 $V(S_N)$ 的性态图形有 "不对称" 特征:



宽斜跨 (*strip*) 是有同样的到期日 N 但一般来说有不同的执行价格 K_1 和 K_2 的一个买入期权与两个卖出期权的组合. 相应的函数 $V(S_N)$ 有下列形式:

$$V(S_N) = |S_N - K_2|I(S_N > K_2) + 2|S_N - K_1|I(S_N < K) - \mathbb{C}_N.$$

函数 $V(S_N)$ 的图形在下图中画出:

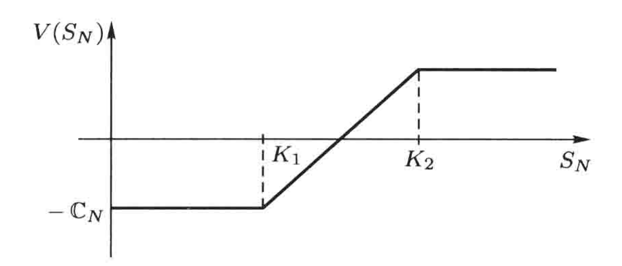


3. 价差 (spreads).

"牛市" 价差是由购买有执行价格 K_1 的买入期权和出售有 (较高的) 执行价格 $K_2 > K_1$ 的买入期权所构成的策略. 在这一情形下,

$$V(S_N) = |K_2 - K_1|I(S_N \geqslant K_2) + |S_N - K_1|I(K_1 < S_N < K_2) - \mathbb{C}_N,$$

其函数图像有下列样式:

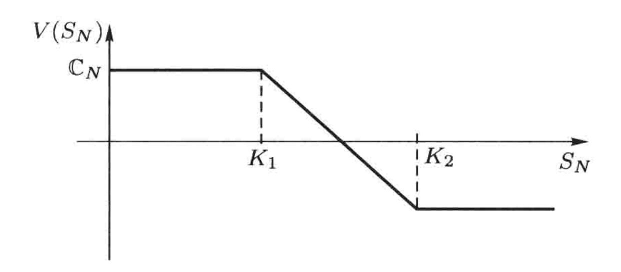


当投资者预料 (比如股票) 价格上扬时, 为限制自己的亏损量, 他们就会适当地投向 "牛市" 价差. 然而, 这一组合也限制了盈余量.

"熊市" 价差是由出售有执行价格 K_1 的买入期权和购买有 (较高的) 执行价格 $K_2 > K_1$ 的买入期权所构成的策略. 对于这一组合,

$$V(S_N) = -|K_2 - K_1| I(S_N \geqslant K_2) + |S_N - K_1| I(K_1 < S_N < K_2) + \mathbb{C}_N,$$

相应的图像有下列样式:



当投资者预料 (比如股票) 价格下跌, 同时, 又力求限制可能在价格上扬时所产生的亏损量时, 投向类似的组合就很有意义.

关于其他形式的价差配置参见 [50] 中的 §24.

4. 除了上述的标准 (买入和卖出) 期权的组合以外, 在证券市场上还会遇到其他各种配置, 例如由同时购买期权 (作为衍生证券) 和股票 (作为基本证券) 所构成的策略. 当投资者为防范股票价格低于一定水平时的风险时, 就会采用类似的策略. 如果发生这种下跌, 那么持有卖出期权的投资者就可按较高的 (执行) 价格抛出股票, 而不受 (较低的) 现价所影响. (参见 [50] 中的 §22.)

5. 二叉树 (B,S)-市场上的美式期权

§5a. 关于美式期权的定价问题

1. 在考察美式期权时, "定价理论" 的基本问题 (无论是离散时间情形下, 还是连续时间情形下) 归结如下:

(i) 带给定的偿付函数的期权合约有怎样的合理 (公平互利) 价格;
(ii) 期权购买者有怎样的合理提交执行时刻;
(iii) 期权出售者为确保满足合约条件有怎样的最优对冲策略.

本节致力于离散时间情形下的美式期权定价, 主要关注前两类问题 (i) 和 (ii). 在原理上, 有关问题 (iii) 的求出对冲策略的解答将在 §2c 的定理 2 和 3 中给出.

2. 我们将保持在 §4b 中描述的 (B,S)-市场的CRR-模型, 即假定 $\Delta B_n = rB_{n-1}$, $\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}$, 其中 $\rho = (\rho_n)$ 为有 $\mathsf{P}(\rho_n = b) = p$, $\mathsf{P}(\rho_n = a) = q$ 的独立同分布随机变量序列, 而 $-1 < a < r < b$, $p + q = 1$, $0 < p < 1$.

在本质上用来简化今后的数学分析的补充假定在于取某个 $\lambda > 1$, 使得

$$b = \lambda - 1 \quad 和 \quad a = \lambda^{-1} - 1. \tag{1}$$

尤其是, 取代确定价格值 S_n $(n \geqslant 1)$ 演变的两个参数 a 和 b, 我们将假定只有一个参数 λ, 而 a 和 b 则由公式 (1) 来求得.

于是, 显然有

$$S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n}, \tag{2}$$

其中 $\mathsf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathsf{P}(\rho_i = b) = p$, $\mathsf{P}(\varepsilon_i = -1) = \mathsf{P}(\rho_i = a) = q$. (参见第二章 §1e.)

如果还假定, S_0 属于集合 $E = \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \cdots\}$, 那么我们看到, 对于任何 $n \geqslant 1$, 状态 S_n 将属于同一个集合 E.

有 $S_0 \in E$ 并用关系式 (2) 来描述的序列 $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ 通常称为 (比较第二章 §1c) 关于状态集合 $E = \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \cdots\}$ 的几何随机游走.

设 $x \in E$ 而 P_x 表示序列 $(S_n)_{n \geqslant 0}$ 关于测度 P 的概率分布, 其中假定 $S_0 = x$, $\mathsf{P}_x = \mathrm{Law}((S_n)_{n \geqslant 0} \,|\, \mathsf{P}, S_0 = x)$.

对应随机过程理论的标准术语, 可以说, 所考察的有概率族 P_x $(x \in E)$ 的序列 $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ 形成齐次 *Markov* 随机游走, 或者 (离散时间) 齐次 Markov 过程.

设 T 为一步转移算子, 即, 对于定义在 E 上的函数 $g = g(x)$, 有

$$Tg(x) = \mathsf{E}_x g(S_1), \quad x \in E, \tag{3}$$

其中 E_x 是关于测度 P_x 的均值.

在所考察的情形 (2) 中,

$$Tg(x) = pg(\lambda x) + (1-p) g\left(\frac{x}{\lambda}\right). \tag{4}$$

3. 用CRR-模型描述的 (B,S)-市场既是无套利的, 又是完全的, 这时, 唯一的鞅测度是如下定义的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$:

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\varepsilon_i = 1) = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_i = b) = \frac{r-a}{b-a}, \quad \widetilde{\mathsf{P}}(\varepsilon_i = -1) = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_i = a) = \frac{b-r}{b-a}.$$

(参见例如, 第五章中的 §1d.)

根据第五章中所叙述的 "无套利–鞅" 的思路, 所有概率计算不应对于原来的测度 P 来进行, 而是必须关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 来进行. 为了不引入新的记号, 从一开始我们就假定, $\mathsf{P}=\widetilde{\mathsf{P}}$, 而这就是说,

$$p=\frac{r-a}{b-a},\quad q=\frac{b-r}{b-a}. \tag{5}$$

考虑到假定 (1), 我们求得,

$$p=\frac{\alpha^{-1}-\lambda^{-1}}{\lambda-\lambda^{-1}},\quad q=\frac{\lambda-\alpha^{-1}}{\lambda-\lambda^{-1}}, \tag{6}$$

其中 $\alpha=(1+r)^{-1}$.

设 $f=(f_0,f_1,\cdots)$ 为偿付函数系, 它们通常给定在渗透概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0},\mathsf{P})$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$.

对应于 §2a, 我们将以 $\mathfrak{M}_n^N$ 表示所有满足 $n\leqslant\tau\leqslant N$ 的停时的类; 以 $\mathfrak{M}_n^\infty$ 表示所有满足 $\tau\geqslant n$ 的停时的类.

在美式期权情形下, 期权购买者有可能独立选择执行时刻 τ, 并使他获得偿付为 f_τ. 如果假定, 合约在时刻 $n=0$ 签定, 而其终止日为时刻 $n=N$, 那么可以说, 美式期权购买者有可能在类 $\mathfrak{M}_0^N$ 中选择任何时刻 τ 来作为合约终止运作的时刻. 这时, 当然, 期权出售者必须在其运作中, 考虑对他来说, 既由于购买者所选择的时刻 τ, 又 (在不完全市场上) 由可能的鞅测度之一所作的 "大自然" 的选择, 所造成的最不利的可能性. 因此, 对应 §1a, 在构成美式期权的出售者的策略时, 自然要掌握实现 "美式对冲" 的策略.

我们所考察的 (B,S)-市场是完全的, 并且对于美式对冲的上价格 (参见 §2c 中的 (5))

$$\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})=\inf\{y\colon \exists\pi \text{ 使得 } X_0^\pi=y,\ X_\tau^\pi\geqslant f_\tau\ (\mathsf{P}\text{-a.s.}),\forall\tau\in\mathfrak{M}_0^N\}, \tag{7}$$

它自然被认为是美式期权的价格, 并且下列公式成立 (参见 §2c 中的 (19)):

$$\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\mathsf{E}\frac{f_\tau}{B_\tau}. \tag{8}$$

我们记得, 这里 E 是按 (鞅) 测度 P 的均值.

4. 在上面引进的叙述中, 也给出了期权出售者在怎样的条件下怎样做才能满足合约条件的基本观念.

由美式对冲的一般理论 (第 2 节) 得到, 用公式 (8) 所确定的期权合约的价格 (权利金) $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})$ 就是那个出售者还有可能满足该合约条件的最低可接受价格.

期权的购买者也在这一含义下, 把价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})$ 理解为对于交易双方互利的价格. 这时, 根据一般理论, 期权出售者能这样来形成自己的对冲策略 π, 使得它的资本 X_τ^π 对于任何 $\tau\in\mathfrak{M}_0^N$, 都不小于 f_τ.

现在考察这样的问题: 作为购买者, 他同意合约的价格等于 $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})$, 必定以最自然的方式来选取合约停止运作的时刻, 或者干脆说, 把期权提交执行的时刻.

很明显, 如果购买者在满足 $X_\sigma^\pi > f_\sigma$ 的时刻 σ 终止合约的运作, 那么这就为出售者在满足向购买者支付 f_σ 的合约条件同时, 带来纯收益 $X_\sigma^\pi - f_\sigma$. 因此, 购买者应该选取使得 $X_\sigma^\pi = f_\sigma$ 的时刻 σ. 这样的时刻实际上是存在的, 而正如 §2c 的定理 4 得到, 它就是在下列最优停时问题求解结果中得到的时刻 τ_0^N:

$$\text{“}\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\mathsf{E}\frac{f_\tau}{B_\tau}\text{”}. \tag{9}$$

5. 由 (8) 可见, 求出价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})$ 归结为求解随机序列 $f_0, f_1, \cdots, f_N$ 的最优停时问题.

在 §§5b, c 中, 将基本上遵照著作 [443], 考察分别有函数 $f_n = (S_n - K)^+$ 和 $f_n = (K - S_n)$ (以及略微一般的函数 $f_n = \beta^n(S_n - K)^+$ 和 $f_n = \beta^n(K - S_n)^+$) 的标准买入期权和标准卖出期权. 取代序列 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 的 “Markov 性质”, 这一函数 f_n 的特殊结构可用来求解所考察的最优停时问题, 它将在以后用来作为 §2a 第 5 点中描述的最优停时法则理论的 “Markov 文本”.

§5b. 标准买入期权定价

1. 假设我们考察标准买入期权, 其在时刻 n 的偿付函数为

$$f_n(x) = \beta^n(x-K)^+, \quad x\in E, \tag{1}$$

其中 $0<\beta\leqslant 1$, $E=\{x=\lambda^k\colon k=0,\pm1,\cdots\}$, $\lambda>1$.

对于 $0\leqslant n\leqslant N$, 记

$$V_n^N(x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_x(\alpha\beta)^\tau(S_\tau - K)^+, \tag{2}$$

其中 $S_{N+k} = S_n\lambda^{\varepsilon_{n+1}+\cdots+\varepsilon_{n+k}}$, $S_n = x$.

注意到以下这点是有益的:

$$V_n^N(x) = (\alpha\beta)^n V_0^{N-n}(x), \tag{3}$$

并且对应 §5a 中的 (8), 我们感兴趣的价格 (在假定 $S_0 = x$ 下)

$$\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P}) = V_0^N(x). \tag{4}$$

根据 §2a 中的定理 3 及其有关的注,

$$V_0^N(x) = Q^N g(x), \tag{5}$$

其中 $g(x)=(x-K)^+$ 以及

$$Qg(x)=\max(g(x),\alpha\beta Tg(x)). \tag{6}$$

这时, 在类 $\mathfrak{M}_0^N$ 中, 记为 τ_0^N 的最优时刻存在, 并可取为下列形式:

$$\tau_0^N=\min\{0\leqslant n\leqslant N\colon V_0^{N-n}(S_n)=g(S_n)\}. \tag{7}$$

如果记

$$\begin{aligned} D_n^N&=\{x\in E\colon V_0^{N-n}(x)=g(x)\}\\ &=\{x\in E\colon V_n^N(x)=(\alpha\beta)^n g(x)\}, \end{aligned} \tag{8}$$

那么我们看到

$$\tau_0^N=\min\{0\leqslant n\leqslant N\colon S_n\in D_n^N\}. \tag{9}$$

这样一来, 有了 "停止区域" 序列为

$$D_0^N\subseteq D_1^N\subseteq\cdots\subseteq D_N^N=E, \tag{10}$$

以及 "观察延续区域" 序列为

$$C_0^N\supseteq C_1^N\supseteq\cdots\supseteq C_N^N=\varnothing \tag{11}$$

以后, 其中 $C_n^N=E\setminus D_n^N$, 可以把买入期权关于终止运作期权合约的法则陈述如下.

如果 $S_0\in D_0^N$, 那么 $\tau_0^N=0$; 换句话说, 购买者应该立即同意所提出的偿付函数 $(S_0-K)^+$.

如果 $S_0\in C_0^N=E\setminus D_0^N$, 这是典型局面, 那么购买者期待下一个值 S_1, 并依据 $S_1\in D_1^N$ 还是 $S_1\in C_1^N$ 来作决策: 取 $\tau_1^N=1$ 还是 $\tau_1^N>1$, 如此等等.

在当前所考察的标准买入期权的情形下, 不难以定性方式描述集合 D_n^N 和 C_n^N 的结构, $0\leqslant n\leqslant N$; 尤其是, 描述购买者选择期权提交执行时刻的法则.

2. 由 (4)–(7) 可见, 求出函数 $V_0^N(x)$ 和时刻 τ_0^N 归结为对于 $n=1,2,\cdots,N$, 求函数序列 $V_0^n(x)=Q^n g(x)$.

根据假定, $0<\beta\leqslant 1$. 我们指出, 情形 $\beta=1$ 可用初等方式来考察.

事实上, 由于序列 $(\alpha^n S_n)_{n\geqslant 0}$ 关于任何测度 P_x $(x\in E)$ 为鞅, 故 $(\alpha^n(S_n-K))_{n\geqslant 0}$ 将是下鞅, 并且由 Jensen 不等式, 对于凸函数 $x\rightsquigarrow x^+$, 序列 $(\alpha^n(S_n-K)^+)_{n\geqslant 0}$ 也是下鞅.

也就是说, 根据 Doob 停止定理 (第五章 §3a), 对于任何 Markov 时刻 $0\leqslant\tau\leqslant N$,

$$\mathsf{E}_x\alpha^\tau(S_\tau-1)^+\leqslant\mathsf{E}_x\alpha^N(S_N-1)^+. \tag{12}$$

由此直接得到, 在最优停时问题

$$“\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_x\alpha^{\tau}(S_\tau-K)^{+}”$$

中, 可取最优停时 $\tau_0^N=N$, 而这就是说, 如果 $S_0=x$, 那么

$$\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})=V_0^N(x)=\mathsf{E}_x\alpha^N(S_N-K)^{+}. \tag{13}$$

这样一来, (按某种解释方式) 下列 R. Merton [346] 的结果成立:

如果折现因子 $\beta=1$, 那么标准美式期权和标准欧式期权 “重合”.

这时, 对应的值 $V_0^N(x)$ 按 §4d 的公式 (6) 来确定.

3. 现在考察更有意义的 $0<\beta<1$ 的情形.

定理 1. *对于每个 $N\geqslant 0$, 存在数列 $x_n^N\in E\cup\{0\}$, $0\leqslant n\leqslant N$, 使得*

$$D_n^N=\{x\in E\colon x\in[x_n^N,\infty)\},$$

$$C_n^N=\{x\in E\colon x\in(0,x_n^N)\},$$

以及

$$\tau_0^N=\min\{0\leqslant n\leqslant N\colon S_n\in D_n^N\}=\min\{0\leqslant n\leqslant N\colon S_n\in[x_n^N,\infty)\}.$$

这时,

$$0=x_N^N\leqslant x_{N-1}^N\leqslant\cdots\leqslant x_0^N, \tag{14}$$

以及

$$V_0^N(x)=\begin{cases} g(x), & x\in D_0^N=[x_0^N,\infty),\\ Q^N g(x), & x\in C_0^N=(0,x_0^N).\end{cases} \tag{15}$$

合理价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})=V_0^N(S_0)$.

证明. 为简化计算, 我们将设 $K=1$, 并逐次考察 $N=1,2,\cdots$, 对于 $n\leqslant N$ 来分析 $Q^n g(x)$.

设 $N=1$ 以及起点 $x=1$, 即, $x=\lambda^0$. 根据 §5a 中的公式 (4), 对于函数 $g(x)=(x-1)^{+}$, 我们求得 (考虑到假定 $\lambda>1$)

$$\begin{aligned}
&Tg(1)=pg(\lambda)+(1-p)g(\lambda^{-1})=p(\lambda-1)>0,\\
&Qg(1)=\max(g(1),\alpha\beta Tg(1))=\max(0,\alpha\beta p(\lambda-1))=\alpha\beta p(\lambda-1)>0.
\end{aligned}$$

因此, 运用算子 Q 使 $g=g(x)$ 在 $x=1$ 的值 “提升” 到值 $Qg(1)=\alpha\beta p(\lambda-1)$. 由类似的方式我们求得

$$Tg(\lambda)=p(\lambda^2-1),\quad Qg(\lambda)=(\lambda-1)\max\left(1,\beta\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-1}\right).$$

由此可见, 如果 $\beta \leqslant \dfrac{\lambda-1}{\lambda-\alpha}$, 那么运用算子 Q 不改变 $g(\lambda)=\lambda-1$ 的值. 但是如果 $\beta > \dfrac{\lambda-1}{\lambda-\alpha}$, 那么算子 Q 把 $g(\lambda)=\lambda-1$ "提升" 为值 $\beta(\lambda-\alpha)\,(>\lambda-1)$.

现在设 $x=\lambda^k$, $k>1$. 在这一情形下,

$$Tg(\lambda^k)=\lambda^k\alpha^{-1}-1, \quad Qg(\lambda^k)=\max(\lambda^k-1, \beta(\lambda^k-\alpha)).$$

我们察觉,

$$Qg(\lambda^k)=g(\lambda^k) \iff \lambda^k-1 \geqslant \beta(\lambda^k-\alpha) \iff \lambda^k(1-\beta) \geqslant 1-\alpha\beta. \tag{16}$$

由于

$$\lambda^k(1-\beta) \geqslant 1-\alpha\beta \Longrightarrow \lambda^{k+1}(1-\beta) \geqslant 1-\alpha\beta,$$

故

$$Qg(\lambda^k)=g(\lambda^k) \Longrightarrow Qg(\lambda^{k+1})=g(\lambda^{k+1}),$$

它可以用下列方式来解释: 如果 $\lambda^k \in D_0^1$, 那么点 $\lambda^{k+1}, \lambda^{k+2}, \cdots$ 也属于 D_0^1.

由 (16) 得到, 对于充分大的 k, 值 λ^k 显然属于 D_0^1.

设 $x_0^1=\min\{x \in E \colon Qg(x)=g(x)\}$. 于是由所述得到, $[x_0^1, \infty) \subseteq D_0^1$. 尤其是, 可断定, $[x_0^1, \infty)=D_0^1$.

其实, 我们考察点 $x=\lambda^k$, $k \leqslant -1$. 于是 $Tg(x)=0$, $Qg(x)=0$, 因而, 既作为在这些点上的瞬时停止, 又作为观察 (一步) 延续, 使得它们全都只有零收益. 从而, 点 $x=\lambda^k$ $(k \leqslant -1)$ 可进入观察延续区域 C_0^1. 显然属于在这一区域的有 $x=\lambda^0=1$ 和那些满足 $\lambda^k<x_0^1$ 的有 $k>1$ 的点 $x=\lambda^k$.

这样, 如果 $N=1$, 那么

$$\tau_0^1=\begin{cases}0, & \text{当 } S_0 \in [x_0^1, \infty), \\ 1, & \text{当 } S_0 \in (0, x_0^1).\end{cases}$$

用类似的方式逐次考察 $N=2,3,\cdots$, 其中仅有的差别在于, 如果说前面研究的是算子 Q 怎样 "提升" $g(x)$, 那么现在需要把这个函数取代为研究函数 $Qg(x), Q^2g(x), \cdots$, 其中每一个都如同 $g=g(x)$ 一样都是下凸的 (参见下面的图 58), 并且对于充分大的 x 重合于 $g(x)$. 由这些性质得到, 对于每个 N, 可求得 x_n^N, 使得 $D_n^N=[x_n^N, \infty)$.

我们不拘泥于这一并不复杂的分析的细节, 而是只注意到, 在 $N=2$ 的情形下, 立即明显有 $D_1^2=D_0^1$, 而这就是说, $x_1^2=x_0^1$. 考察集合 $D_0^2=\{x \colon Q^2g(x)=g(x)\}=\{x \colon g(x) \geqslant TQg(x)\}$ 表明, 存在值 x_0^2, 使得 $[x_0^2, \infty)=D_0^2$. 这时, $0=x_2^2 \leqslant x_1^2 \leqslant x_0^2$, 而 τ_0^2 有下列结构:

$$\tau_0^2=\begin{cases}0, & \text{当 } S_0 \in [x_0^2, \infty), \\ 1, & \text{当 } S_0 \in (0, x_0^2), S_1 \in [x_1^2, \infty), \\ 2, & \text{当 } S_0 \in (0, x_0^2), S_1 \in (0, x_1^2).\end{cases}$$

下面引进的图 57 和图 58 给出 "停止区域" (D_n^N) 和 "观察延续区域" (C_n^N) 的直观表示, 同时还有关于函数 $V_0^N(x) = Q^N g(x)$ 的样式的直观表示.

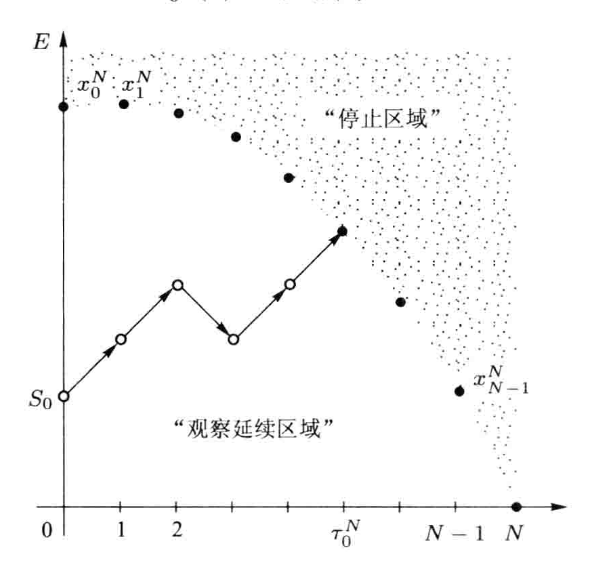


图 57 买入期权. 停止区域 $D_0^N = [x_0^N, \infty), D_1^N = [x_1^N, \infty), \cdots, D_N^N = [0, \infty)$, 以及观察延续区域 $C_0^N = (0, x_0^N), C_1^N = (0, x_1^N), \cdots, C_N^N = \varnothing$. 轨线 $(S_0, S_1, S_2, \cdots)$ 由时刻 τ_0^N 处的观察延续区域导出

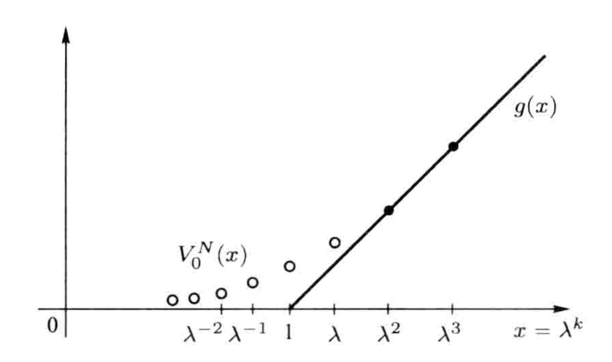


图 58 对于有偿付函数 $f_n = \beta^n g(x)$ $(0 < \beta < 1,\ 0 \leqslant n \leqslant N,\ \lambda > 1)$ 的离散买入期权的函数 $g(x) = (x-1)^+$ 和 $V_0^N(x) = Q^N g(x)$ 的图像

4. 正如上面的叙述所得到, 在 $S_0 = x$ 的情形下, 求出合理价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P})$ 归结为求出函数 $V_0^N(x) = Q^N g(x)$, 它可运用下列等式以递推方式来进行计算:

$$\begin{aligned} Q^n g(x) &= \max(Q^{n-1} g(x), \alpha\beta T Q^{n-1} g(x)) \\ &= \max(g(x), \alpha\beta T Q^{n-1} g(x)). \end{aligned} \tag{17}$$

(参见 [441;2.2.1].)

显然, $V_0^N(x) \leqslant V_0^{N+1}(x)$, 因而, 存在

$$V^*(x) = \lim_{N \to \infty} V_0^N(x). \tag{18}$$

根据第五章 §6a 中的定理 4, 函数 $V^* = V^*(x)$ 是函数 $g = g(x)$ 的最小 $\alpha\beta$-超过优函数, 即, $V^* = V^*(x)$ 是有下列性质的函数 $U = U(x)$ 中的最小者: $U(x) \geqslant g(x)$ 和 $U(x) \geqslant (\alpha\beta)TU(x)$. 这时, $V^* = V^*(x)$ 满足由 (17) 和 (18) 所导出的方程:

$$V^*(x) = \max(g(x), (\alpha\beta)TV^*(x)). \tag{19}$$

由同样的定理, 函数 $V(x)$ 无非就是在类 $\mathfrak{M}_0^\infty = \{\tau = \tau(\omega)\colon 0 \leqslant \tau(\omega) < \infty, \omega \in \Omega\}$ 中的下列最优停时问题中的解:

$$V^*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x(\alpha\beta)^\tau g(S_\tau). \tag{20}$$

函数 $V^* = V^*(x)$ 的值也在下列视角下有意义: $V^*(S_0)$ 同时还是合理价格的值:

$$\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f; \mathsf{P}) = \inf\{y\colon \exists\pi, \text{ 使得} X_0^\pi \geqslant \beta^\tau g(S_\tau)\, \forall\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty\}, \tag{21}$$

其中偿付函数系 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 为

$$f_n(x) = \beta^n (x - K)^+, \tag{22}$$

并假定购买者可运用集合 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中的任何时刻 τ 选为停时. (这个断言的证明类似于 §1c 中的定理证明.)

考察执行时间在集合 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中、而不是在带某个有限的 N 的 $\mathfrak{M}_0^N$ 中的期权从实际的视角来看可能意义不大. 然而, 应该注意到, 具有折现因子 $0 < \beta < 1$ 不允许有对应的 "太大的" 最优停时. 同时, 型为 (20) 的问题的解析解, 比起有有限 N 的问题的解来, 大大简化, 并且对于充分大的 N, 函数 $V^*(x)$ 至少也可推想为对于函数 $V_0^N(x)$ 的值的近似.

5. 我们转向求出函数 $V^*(x)$, 正如我们所知, 它满足方程 (19).

我们察觉, $D_0^N \supseteq D_0^{N+1}$, 而这意味着 $x_0^N \leqslant x_0^{N+1}$. 因此, 存在 $\lim_{N\to\infty} x_0^N = x^*$, 且由 (19), 所求的函数 $V^*(x)$ 必定有下列形式:

$$V^*(x) = \begin{cases} g(x), & x \geqslant x^*, \\ (\alpha\beta)TV^*(x), & x < x^*. \end{cases} \tag{23}$$

我们强调, 这里无论是 "边界" 点 x^*, 还是函数 $V^*(x)$ 本身, 都未知, 以至它们都必须确定. 类似类型的问题属于 "自由边界问题", 或者说, 它们还被称为 "Stephan 问题" (例如, [441]).

一般来说, 问题 (23) 的解 $(x^*, V^*(x))$ 可能不唯一, 为了分离出 "正确的" 解, 可能需要补充条件. 下面指出, 由怎样的考虑来求出这些补充条件.

记 $C^* = (0, x^*)$ 和 $D^* = [x^*, \infty)$. 于是在区域 C^* 中, 函数 $V^*(x)$ 满足方程

$$\varphi(x) = \alpha\beta T\varphi(x), \tag{24}$$

即, 由 §5a 中的 (4), 方程

$$\varphi(x) = \alpha\beta\left[p\varphi(\lambda x) + (1-p)\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right]. \tag{25}$$

根据有限差分方程的一般理论 (参见 [174]), 这一方程的解应该具有形式 $\varphi(x) = x^\gamma$. 据此, 我们求得, γ 必定是下列方程的根:

$$1 = \beta[\alpha p\lambda^\gamma + \alpha(1-p)\lambda^{-\gamma}]. \tag{26}$$

我们记得, $p = \dfrac{r-a}{b-a}$, $b = \lambda - 1$, $a = \lambda^{-1} - 1$. 这时, p 由下列条件来确定 (参见第五章 §4d 中的 (4)):

$$\mathsf{E}\frac{1+\rho_1}{1+r} = 1,$$

它无非就是关系式

$$\alpha\lambda p + \alpha(1-p)\lambda^{-1} = 1. \tag{27}$$

比较 (26) 和 (27) 可见, 如果 $\beta = 1$, 那么方程 (26) 有一个根 $\gamma_1 = 1$ 和第二个根 γ_2, 使得

$$\lambda^{\gamma_2} = \frac{1-p}{\lambda p}. \tag{28}$$

由于

$$\frac{1-p}{\lambda p} = \frac{\alpha\lambda - 1}{\lambda - \alpha} < 1,$$

故 $\gamma_2 < 0$.

这样, 如果 $\beta = 1$, 那么方程 (26) 的一般解有下列形式:

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2 x^{\gamma_2}, \tag{29}$$

其中 $\gamma_2 < 0$.

根据所考察的问题的含义, 所求函数 $V^*(x)$ 必定是非负不减函数. 由此得到, $c_2 = 0$. 因此,

$$V^*(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant x^*, \\ c_1 x, & x < x^*, \end{cases} \tag{30}$$

其中 x^* 和 c_1 待定.

由序列 $(\alpha^n(S_n - 1)^+)_{n\geqslant 0}$ 关于任何测度 P_x $(x \in E)$ 的下鞅性质, 导出 $x^* = \infty$, 因为在 $\beta = 1$ 的情形下, 对于每个点 $x \geqslant 1$,

$$\alpha T g(x) > g(x),$$

而这就是说, 显然, "至少有一个观察比立即停止更有利."

又, 在 (30) 中常数 $c_1 \geqslant 1$, 因为如果假定 $c_1 < 1$, 那么将得到 $x^* < \infty$.

另一方面, 常数 c_1 不可能大于 1; 这是由 (补充) 性质: $V^*(x)$ 必定是函数 $g(x)$ 的最小 α-超过优函数, 而在函数 $V^*(x) = c_1 x$ $(c_1 \geqslant 1)$ 的类中, 这样的函数显然是有值 $c_1 = 1$ 的函数.

这样一来, 在 $\beta = 1$ 和 $g(x) = (x-1)^+$ 的情形下,

$$V^*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x \alpha^\tau g(S_\tau) = x,$$

并且最优停时 (在类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中) 不存在. 然而, 我们注意到, 对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及任何 $x \in E$ 可求得有限的停时 $\tau_{x,\varepsilon}$, 使得

$$\mathsf{E}_x \alpha^{\tau_{x,\varepsilon}} g(S_{\tau_{x,\varepsilon}}) \geqslant V^*(x) - \varepsilon.$$

(详情参见 [441; 第 III 章].)

6. 现在设 $0 < \beta < 1$. 在这一情形下, 方程 (26) 有两个根 $\gamma_1 > 1$ 和 $\gamma_2 < 0$, 使得作为二次方程

$$y = \beta[\alpha p y^2 + \alpha(1-p)] \tag{31}$$

的根来确定的量 $y_1 = \lambda^{\gamma_1}$ 和 $y_2 = \lambda^{\gamma_2}$ 有下列形式:

$$y_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad y_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \tag{32}$$

其中 $A = (\alpha\beta p)^{-1}$, $B = (1-p)p^{-1}$.

这样一来, 如果 $0 < \beta < 1$, 那么方程 (25) 的一般解 $\varphi(x)$ 可表示为下列形式:

$$\varphi(x) = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2}. \tag{33}$$

同理, 在 $\beta = 1$ 的情形下, 这里的常数 c_2 等于零, 并且由 (23) 得到, 所求的函数

$$V^*(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant x^*, \\ c^* x^{\gamma_1}, & x < x^*, \end{cases} \tag{34}$$

其中 x^* 和 c^* 为待定常数. (参见后面的公式 (40)–(43).)

为求出未知值 x^* 和 c^*, 我们利用下列事实: 所求函数 $V^*(x)$ 必定是函数 $g(x) = (x-1)^+$ $(x \in E)$ 的最小 $\alpha\beta$-超过优函数.

下列讨论表明, 怎样在函数

$$\overline{V}_{\overline{c}}(x; \overline{x}) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant \overline{x}, \\ \overline{c} x^{\gamma_1}, & x < \overline{x}, \end{cases} \tag{35}$$

(其中 $x, \overline{x} \in E$, $\overline{c} > 0$ 和 $\gamma_1 > 1$) 的类中求出 $g(x) = (x-1)^+$ 的最小优函数. (当然, 然后需要断定, 这样求得的函数是 $\alpha\beta$-超过函数.)

为此, 我们察觉, 对于充分大的 $\overline{c}$, 函数 $\varphi_{\overline{c}}(x) = \overline{c}x^{\gamma_1}$ 显然对于所有 $x \in E$ 大于函数 $g(x)$. 因此, 由 (35), 怎样在函数 $\overline{V}_{\overline{c}}(x;\overline{x})$ 中求出 $g(x)$ 的最小优函数就变得很明显.

我们取充分大的 $\overline{c}$, 使得它对于所有 $x \in E$, 明显有 $\varphi_{\overline{c}}(x) > g(x)$, 然后开始减小 $\overline{c}$, 直至值 $\overline{c}_1$, 使得函数 $\varphi_{\overline{c}_1}(x)$ 在某个点, 比如 $\overline{x}_1$, 与函数 $g(x)$ "相遇".

由函数 $\varphi_{\overline{c}}(x)$ $(x \in E)$ 的凸性, 原则上可能还存在一个点 $\overline{x}_2 \in E$, 使得 $\overline{x}_2 > \overline{x}_1$, 且 $\varphi_{\overline{c}_1}(\overline{x}_2) = g(\overline{x}_2)$.

在我们所考察的情形下, 相空间 $E = \{x = \lambda^k, k = 0, \pm 1, \cdots\}$ 离散. 然而, 如果认为, $\lambda = 1 + \Delta$, $\Delta > 0$, 并且 Δ 很小, 那么点 $\overline{x}_1$ 和 $\overline{x}_2$ 之间的距离也将很小, 尤其是当 $\Delta \downarrow 0$ 时, 这两个点将 "粘合" 为一个点, 比如 $\widetilde{x}$.

显然, 这个点 $\widetilde{x}$ 无非就是集合 $(0, \infty)$ 中的这样的值: 它使得函数 $\varphi_{\widetilde{c}}(x) = \widetilde{c}x^{\gamma_1}$ 对某个 $\widetilde{c}$ 与函数 $g(x) = (x-1)^+$ $(x \in (0, \infty))$ 在此相切.

如上所述, 很明显, $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{x}$ 由下列两个方程的方程组来确定:

$$\varphi_{\widetilde{c}}(\widetilde{x}) = g(\widetilde{x}), \tag{36}$$

$$\left.\frac{d\varphi_{\overline{c}}(x)}{dx}\right|_{x=\widetilde{x}-} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=\widetilde{x}+}, \tag{37}$$

由此求得

$$\widetilde{x} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}, \quad \widetilde{c} = \frac{(\gamma_1 - 1)^{\gamma_1 - 1}}{\gamma_1^{\gamma_1}}. \tag{38}$$

这时显然有函数

$$\widetilde{V}(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant \widetilde{x}, \\ \widetilde{c}x^{\gamma_1}, & x < \widetilde{x}, \end{cases} \tag{39}$$

将对于充分小的 $\Delta > 0$ 给出形为 (35) 的函数中的最小函数的良好逼近. (比较第 8 章 §2a 中的 (37).)

注. 特别要注意 "光滑粘合" 条件 (37), 它在上述讨论中的出现是完全自然的. 在最优停时问题中, 这个条件经常起着用来分离出 "需要的" 解的补充条件的作用. (参见 [441] 和以后的第八章.)

上述求出最小优函数的定性方法在更为细致的分析下, 导出 (参见 [443]) 下列对于参数 $\overline{x}$ 和 $\overline{c}$ 的 "最优" 值 x^* 和 c^*, 其中相应的函数 $V^*(x) = \overline{V}_{c^*}(x; x^*)$ 不仅是 $g(x)$ 的最小优函数, 并且也是 $\alpha\beta$-超过函数:

$$c^* = \min(c_1^*, c_2^*), \tag{40}$$

其中

$$c_1^* = (\lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]} - 1)\lambda^{-\gamma_1[\log_\lambda \widetilde{x}]}, \tag{41}$$

$$c_2^* = (\lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]} - 1)\lambda^{-\gamma_1[\log_\lambda \widetilde{x}] - \gamma_1} \tag{42}$$

以及

$$x^* = \begin{cases} \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]}, & \text{当 } c^* = c_1^*, \\ \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]+1}, & \text{当 } c^* = c_2^*, \end{cases} \tag{43}$$

($[y]$ 为数 y 的整数部分, 而 $\widetilde{x}$ 在 (38) 中定义).

所求得的函数 $V^*(x)$ 对于 $x < x^*$ 的 $\alpha\beta$-超过性质对于 $x < x^*$ 显然, 因为对于这些值, 按该函数结构的本身, $\alpha\beta TV^*(x) = V^*(x)$. 如果 $x \geqslant x^*$, 那么不等式 $\alpha\beta TV^*(x) \leqslant V^*(x)$ 可通过考虑 (40)–(43) 和对于满足 $V^*(x) = x-1$ 的这些函数值 x 直接验证来确立.

7. 根据 §2a 中的定理 4, 所求得的函数 $V^*(x)$ 恰好是 $\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x(\alpha\beta)^\tau g(S_\tau)$, 这时, 时刻

$$\tau^* = \inf\{n\colon V^*(S_n) = g(S_n)\} = \inf\{n\colon S_n \geqslant x^*\}$$

将是最优停时, 只要 $\mathsf{P}_x(\tau^* < \infty) = 1$, $x \in E$.

显然,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_x(\tau^* > N) &= \mathsf{P}_x\left(\max_{n\leqslant N} S_n < x^*\right) \\ &= \mathsf{P}_x\left(S_0 \max_{n\leqslant N} \lambda^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n} < x^*\right), \end{aligned} \tag{44}$$

并且由于 $\mathsf{P}(\varepsilon_i = 1) = p$, $\mathsf{P}(\varepsilon_i = -1) = q$, 故当 $p \geqslant q$ 时, 右端的概率当 $N \to \infty$ 时趋向于零.

由 (5), 不等式 $p \geqslant q$ 等价于

$$r \geqslant \frac{a+b}{2}. \tag{45}$$

考虑到 $b = \lambda - 1$ 和 $a = \lambda^{-1} - 1$, 我们求得, $\mathsf{P}_x(\tau^* < \infty) = 1$ 对于任何 $x < x^*$ 成立, 只要

$$r \geqslant \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} - 1. \tag{46}$$

如果 $x \geqslant x^*$, 那么也有无条件 (46) 时的概率 $\mathsf{P}_x(\tau^* = 0) = 1$.

总之, 我们导得下列结果.

定理 2. 设 $0 < \beta < 1$, 且条件 (46) 满足.

对于有偿付函数 $f_n = \beta^n (S_n - 1)^+$ $(n \geqslant 0)$ 的美式买入期权的合理价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P})$ 由下列公式确定:

$$\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P}) = V^*(S_0),$$

其中

$$V^*(S_0) = \begin{cases} S_0 - 1, & S_0 \geqslant x^*, \\ c^* S_0^{\gamma_1}, & S_0 < x^*, \end{cases}$$

而常数 c^* 和 x^* 按照公式 (40)–(43) 来求得. 期权提交执行的最优时刻 $\tau^* = \inf\{n\colon S_n \geqslant x^*\}$. 这时,

$$V^*(S_0) = \mathsf{E}_{S_0}(\alpha\beta)^{\tau^*}(S_{\tau^*} - 1)^+.$$

§5c. 标准卖出期权定价

1. 对于标准卖出期权, 偿付函数有下列形式:

$$f_n(y) = \beta^n (K - y)^+, \quad x \in E, \tag{1}$$

其中 $0 < \beta \leqslant 1$, $E = \{y = \lambda^k\colon k = 0, \pm 1, \cdots\}$, $\lambda > 1$.

类似于上节中的记号, 我们将令

$$V_n^N(y) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_y(\alpha\beta)^\tau (K - S_\tau)^+, \tag{2}$$

$$V^*(y) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_y(\alpha\beta)^\tau (K - S_\tau)^+. \tag{3}$$

计算这些量的意义在于

$$V_0^N(y) = \widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P}), \quad y = S_0, \tag{4}$$

以及

$$V^*(y) = \widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f; \mathsf{P}), \quad y = S_0, \tag{5}$$

其中对于有用公式 (1) 来定义的 $f_n = f_n(y)$ 的函数系 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 的 $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P})$ 和 $\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f; \mathsf{P})$, 分别由 §5a 中的公式 (7) 和 §5b 中的公式 (21) 来确定.

定理 1. 对于每个 $N \geqslant 0$, 存在在 $E \cup \{+\infty\}$ 中取值的序列 y_n^N, $0 \leqslant n \leqslant N$, 使得

$$D_n^N = \{y \in E\colon y \in (0, y_n^N]\}, \tag{6}$$

$$C_n^N = \{y \in E\colon y \in (y_n^N, \infty)\}, \tag{7}$$

以及

$$\begin{aligned} \tau_0^N &= \min\{0 \leqslant n \leqslant N\colon S_n \in D_n^N\} \\ &= \min\{0 \leqslant n \leqslant N\colon S_n \in (0, y_n^N]\}. \end{aligned}$$

这时,

$$y_0^N \leqslant \cdots \leqslant y_{N-1}^N \leqslant y_N^N = \infty, \tag{8}$$

以及

$$V_0^N(y) = \begin{cases} g(y), & y \in D_0^N = (0, y_0^N], \\ Q^N g(y), & y \in C_0^N = (y_0^N, \infty). \end{cases} \tag{9}$$

合理价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P}) = V_0^N(S_0)$.

证明. 类似于 §5b 中引入的对于买入期权情形下的证明, 并且基于对于点 $y \in E$ 的集合的分析, 其中集合 E 是在算子 Q^n 的作用下, "提升" 函数 $g(y)$ 时产生的.

这时注意到下列这点是有益的: 在算子 Q 的作用下, 呈现 $g(y)$ 在点 $y = K$ 处 "登峰" (上面为简单起见, 令 $K = 1$), 而 $Qg(y) = g(y) = 0$ 对于 $y > K$ 成立. 因此, 这些值 $y \in E$ 既可置于观察停止区域, 也可置于观察延续区域. 公式 (6) 和 (7) 表明, 这样的点被放入观察延续区域.

2. 我们考察求函数 $V^*(y)$ $\left(= \lim\limits_{N\to\infty} V_0^N(y)\right)$, 值 $y^* = \lim\limits_{N\to\infty} y_0^N$ 和最优时刻 τ^* 的问题:

$$V^*(y) = \mathsf{E}_y(\alpha\beta)^{\tau^*}(K - S_{\tau^*})^+, \tag{10}$$

为了简单, 再次令 $K = 1$.

记 $C^* = (y^*, \infty)$, $D^* = (0, y^*]$. 正如在 §5b 中那样, 我们求得, 函数 $V^*(y)$ 在区域 C^* 中是下列方程的解:

$$\varphi(y) = \alpha\beta\left[p\varphi(\lambda y) + (1-p)\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right].$$

这个方程的一般解有形式为 $c_1 y^{\gamma_1} + c_2 y^{\gamma_2}$, 其中 $\gamma_1 > 1$ 和 $\gamma_2 < 0$ (参见 §5b 中的 (31), (32)).

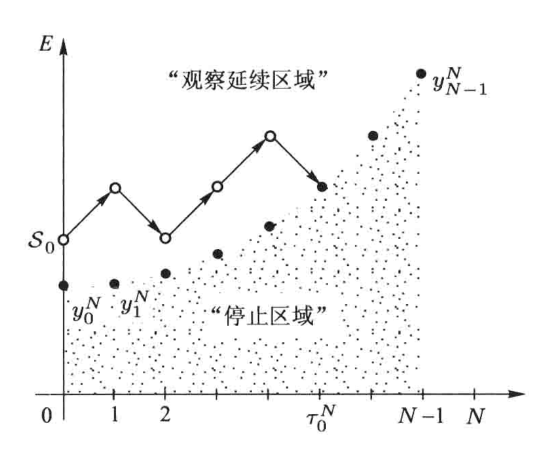


图 59 卖出期权. 停止区域 $D_0^N = (0, y_0^N], \cdots, D_{N-1}^N = (0, y_{N-1}^N], D_N^N = (0, \infty)$, 以及观察延续区域 $C_0^N = (y_0^N, \infty), \cdots, C_{N-1}^N = (y_{N-1}^N, \infty), C_N^N = \varnothing$. 轨线 $(S_0, S_1, S_2, \cdots)$ 在时刻 τ_0^N 走出观察延续区域

由于 $V^*(y) \leqslant 1$, 故 $c_1 = 0$, 而这就是说, 函数 $V^*(y)$ 应该在函数

$$\overline{V}_{\overline{c}}(y;\overline{y}) = \begin{cases} 1 - y, & y \leqslant \overline{y}, \\ \overline{c}y^{\gamma_2}, & y > \overline{y} \end{cases} \tag{11}$$

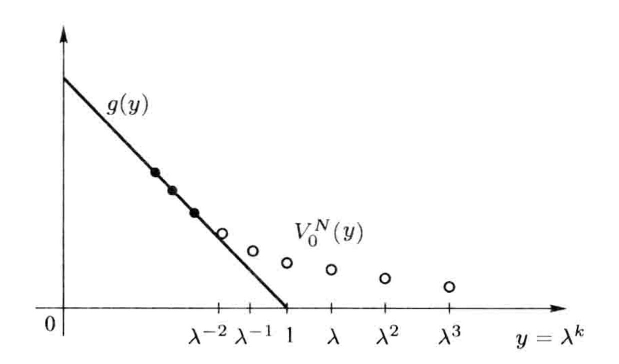


图 60 对于有偿付函数 $f_n = \beta^n g(x)$ $(0 < \beta \leqslant 1,\ 0 \leqslant n \leqslant N,\ \lambda > 1)$ 的卖出期权的函数 $g(y) = (1-y)^+$ 和 $V_0^N(y) = Q^N g(y)$ 的图像

的类中, 其中参数 $\bar{c}$ 和 $\bar{y}$ 的 "最优" 值 c^* 和 y^* 必定由上面 (§5b 第 6 点) 提到的下述补充考虑来确定: $V^*(y) = \overline{V}_{c^*}(y; y^*)$ 必须是 $g(y) = (1-y)^+$ 的最小 $\alpha\beta$-超过优函数.

遵循 §5b 中叙述的 (对小 $\Delta = 1 - \lambda > 0$) 求 (对于参数 c^* 和 y^* 的) 近似值 $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{y}$, 我们求得, 它们必须由下列两个方程的方程组来确定:

$$\begin{gathered}\varphi_{\widetilde{c}}(\widetilde{y}) = g(\widetilde{y}),\\ \left.\frac{d\varphi_{\widetilde{c}}(y)}{dy}\right|_{y=\widetilde{y}+} = \left.\frac{dg(y)}{dy}\right|_{y=\widetilde{y}-}.\end{gathered} \tag{12}$$

求解这个方程组, 我们得到

$$\widetilde{y} = \left|\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}\right|, \quad \widetilde{c} = \frac{|\gamma_2|^{|\gamma_2|}}{|\gamma_2 - 1|^{|\gamma_2 - 1|}}. \tag{13}$$

借助于在 "极限" 模式 $(\lambda \downarrow 1)$ 下得到的值 $\widetilde{y}$ 和 $\widetilde{c}$, 可给出对于量 y^* 和 c^* 的公式 (参见 [443]), 并且在原来的 "极限前" $(\lambda > 1)$ 模式下:

$$c^* = \min(c_1^*, c_2^*), \tag{14}$$

其中

$$c_1^* = (1 - \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{y}]})\lambda^{-\gamma_2[\log_\lambda \widetilde{y}]}, \tag{15}$$

$$c_2^* = (1 - \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{y}]+1})\lambda^{-\gamma_2[\log_\lambda \widetilde{y}] - \gamma_2}, \tag{16}$$

以及

$$y^* = \begin{cases} \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{y}]}, & \text{当 } c^* = c_1^*, \\ \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{y}]+1}, & \text{当 } c^* = c_2^*. \end{cases} \tag{17}$$

函数 $g(y) = (1-y)^+$ 的最小优函数 $V^*(y)$ 的 $\alpha\beta$-超过性质可通过直接验证来确立.

最后, 我们察觉, 条件

$$r \leqslant \frac{a+b}{2} = \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} - 1 \tag{18}$$

(比较 §5b 中的 (45)) 确保性质 $\mathsf{P}_y(\tau^* < \infty) = 1$ $(y \in E)$ 对于时刻 $\tau^* = \inf\{n\colon S_n \leqslant y^*\}$ 成立. (如果 $y \leqslant y^*$, 那么 $\mathsf{P}_y(\tau^* = 0) = 1$.)

因此, 在条件 (14) 满足时, 时刻 τ^* 在下列含义下最优: 性质 (10) 对于所有 $y \in E$ 满足.

定理 2. 设 $0 < \beta \leqslant 1$ 以及条件 (18) 满足.

对于有偿付函数 $f_n = \beta^n(1 - S_n)^+$ $(n \geqslant 0)$ 的美式卖出期权的合理价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P})$ 由下列公式来确定:

$$\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P}) = V^*(S_0), \tag{19}$$

其中

$$V^*(S_0) = \begin{cases} 1 - S_0, & S_0 \leqslant y^*, \\ c^* S_0^{\gamma_2}, & S_0 > y^*, \end{cases} \tag{20}$$

而常数 c^* 和 y^* 可由公式 (14)–(17) 求得. 期权提交执行的最优时刻 $\tau^* = \inf\{n\colon S_n \leqslant y^*\}$. 这时,

$$V^*(S_0) = \mathsf{E}_{S_0}(\alpha\beta)^{\tau^*}(1 - S_{\tau^*})^+.$$

§5d. 有后效的期权. “俄国期权” 定价

1. 对于上面考察的标准买入期权和卖出期权, 偿付函数 f_n 有 *Markov* 结构:

$$f_n = \beta^n(S_n - K)^+ \quad \text{和} \quad f_n = \beta^n(K - S_n)^+. \tag{1}$$

无论是从理论视角还是从金融工程视角来看, 各种有后效的期权也都有一定的意义. 有下列偿付函数的期权可作为这种期权的例子:

$$f_n = \beta^n \left(aS_n - \min_{0 \leqslant r \leqslant n} S_r \right)^+, \tag{2}$$

$$f_n = \beta^n \left(\max_{0 \leqslant r \leqslant n} S_r - aS_n \right)^+, \tag{3}$$

或者

$$f_n = \beta^n \left(aS_n - \sum_{k=0}^{n} S_k \right)^+, \tag{4}$$

$$f_n = \beta^n \left(\sum_{k=0}^{n} S_k - aS_n \right)^+, \tag{5}$$

其中 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $a \geqslant 0$.

有偿付函数 (4) 和 (5) 的期权称为亚式 (买入和卖出) 期权. 有偿付函数 (2) 和 (3) 的 (买入和卖出) 期权在 $a = 0$ 的情形下, 在著作 [434], [435] 中讨论, 其中它们有 “俄国期权” 之称. 也参见著作 [118], [283]. 下面的叙述将遵照著作 [283].

2. 我们将考察 *CRR*-模型, 其中 ρ_n 取两个值: $\lambda - 1$ 和 $\lambda^{-1} - 1$, 而 $\lambda > 1$. 这时, 为确定起见, 我们考察有偿付函数 (3) 的美式买入期权, 其中 $0 < \beta < 1$ 起着折现因子的作用.

根据一般理论 (参见第 2 节), 这种期权的合理价格 $\widehat{\mathbb{C}}$ 按下列公式计算:

$$\widehat{\mathbb{C}} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E} \alpha^\tau f_\tau, \tag{6}$$

其中 $\alpha = (1+r)^{-1}$ 以及 E 为按 p 和 q 由 §5a 中的公式 (6) 来定义的鞅测度 P 取均值.

由于

$$\widehat{\mathbb{C}} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}(\alpha\beta)^\tau \left(\max_{0 \leqslant r \leqslant \tau} S_\tau - a S_\tau \right)^+ \tag{7}$$

和 $S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n}$, 故量 $\widehat{\mathbb{C}}$ 显然有限 ($\widehat{\mathbb{C}} \leqslant S_0$), 只要下列条件满足:

$$\alpha\beta\lambda \leqslant 1. \tag{8}$$

令 $Y_n = \max\limits_{k \leqslant n} S_k$. 很明显,

$$Y_n = \max\{Y_{n-1}, S_n\}, \tag{9}$$

这时, 序列 $(S_n, Y_n)_{n \geqslant 0}$ 是 Markov 序列, 并且, 在原则上, 最优停时问题 (7) 的解可基于二维 Markov 链的最优停时法则的一般结果来求解 (参见 [441] 和 §2a).

然而, 这里引人注目的是下列情况: 所考察的二维问题可归结为某个一维 Markov 问题, 只要运用测度替换的观念和适当选择折现资产 (numéraire). (关于这方面, 也参见后面的第七章 §1b.)

设 $\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty$. 于是, 回忆起 $B_n = B_0 \alpha^{-n}$, $\alpha = (1+r)^{-1}$, 我们求得

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\alpha\beta)^\tau \left(\max_{0 \leqslant r \leqslant \tau} S_\tau - a S_\tau \right)^+ &= \mathsf{E}(\alpha\beta)^\tau \left(\frac{\max_{0 \leqslant r \leqslant \tau} S_r}{S_\tau} - a \right)^+ S_\tau \\ &= S_0 \mathsf{E} \left[\beta^\tau \left(\frac{Y_\tau}{S_\tau} - a \right)^+ \cdot \frac{S_\tau / S_0}{B_\tau / B_0} \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

记 $Z_n = \dfrac{S_n/S_0}{B_n/B_0}$. 于是我们看到, $Z_n > 0$, 且关于测度 P 序列 $Z = (Z_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P})_{n \geqslant 0}$ 是有 $\mathsf{E} Z_n = 1$ 的鞅.

对于 $A \in \mathscr{F}_n$, 令

$$\widehat{\mathsf{P}}_n(A) = \mathsf{E}(Z_n I_A).$$

显然, 测度串 $(\widehat{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 0}$ 是协调的 (其含义为 $\widehat{\mathsf{P}}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n = \widehat{\mathsf{P}}_n$, $n \geqslant 0$), 并且根据 Ionescu Tulcea 测度延拓定理 (参见例如, [439; 第 II 章, §9]), (在空间 $\Omega = \{-1,1\}^\infty$ 中) 存在测度 $\widehat{\mathsf{P}}$, 使得 $\widehat{\mathsf{P}} \mid \mathscr{F}_n = \widehat{\mathsf{P}}_n$, $n \geqslant 0$.

于是

$$\mathsf{E}(\alpha\beta)^\tau \left(\max_{0\leqslant r\leqslant\tau} S_r - aS_\tau\right)^+ = S_0 \widehat{\mathsf{E}}\beta^\tau \left(\frac{Y_\tau}{S_\tau} - a\right)^+. \tag{11}$$

这里令

$$X_n = \frac{Y_n}{S_n}, \tag{12}$$

以及我们察觉

$$X_{n+1} = \max\left(\frac{X_n}{\lambda^{\varepsilon_{n+1}}}, 1\right), \tag{13}$$

并且所有 X_n 在集合 $\widehat{E} = \{1, \lambda, \lambda^2, \cdots\}$ 中取值.

关于新测度 $\widehat{\mathsf{P}}$, 序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 仍然是独立同分布随机变量序列, 且

$$\widehat{p} = \widehat{\mathsf{P}}(\varepsilon_n = 1) = \mathsf{E}I_{(\varepsilon_n=1)}\alpha\lambda^{\varepsilon_1} = \alpha\lambda p \tag{14}$$

和

$$\widehat{q} = \widehat{\mathsf{P}}(\varepsilon_n = -1) = \frac{\alpha}{\lambda}(1-p). \tag{15}$$

我们将考察由递推关系式 (13) 所定义的序列 $(X_n)_{n\geqslant 0}$, 其中假定 $X_0 = x \in \widehat{E}$. 设 $\widehat{\mathsf{P}}_x$ 是该序列的分布. 于是有 $x \in \widehat{E}$, $\widehat{\mathscr{F}_n} = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ 的序列 $X = (X_n, \widehat{\mathscr{F}_n}, \widehat{\mathsf{P}}_x)$ $(n \geqslant 0)$ 为 Markov 序列, 因而, 为求出价格 $\widehat{\mathbb{C}}$ 需要考察下列最优停时问题:

$$\widehat{V}(x) = \sup_{\tau\in\widehat{\mathfrak{M}}_0^\infty} \widehat{\mathsf{E}}_x \beta^\tau (X_\tau - a)^+, \quad x \in \widehat{E}, \tag{16}$$

其中 $\widehat{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 为满足 $\{\omega\colon \tau(\omega) \leqslant n\} \in \widehat{\mathscr{F}_n}$ $(n \geqslant 0)$ 的有限停时 $\tau = \tau(\omega)$ 的类.

我们感兴趣的价格 $\widehat{\mathbb{C}}$ 与这个问题的解 $\widehat{V}(1)$ 通过下列公式相联系:

$$\widehat{\mathbb{C}} = S_0 \widehat{V}(1). \tag{17}$$

注 1. 由于在 (7) 中 sup 是关于类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 来取的, 故严格地说, 为使公式 (17) 成立, 需要在 $\widehat{V}(x)$ 的定义 (参见 (16)) 中, sup 不是对类 $\widehat{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 来取, 而是对于更广的类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 来取. 然而, 实际上, 由对于 Markov 序列的最优停止法则的一般理论 (参见 [441]) 可得, 这两个类是重合的, 并且在实质上, 可如下证明 (参见注 2).

3. 设 $g(x) = (x-a)^+$, $x \in \widehat{E}$, 以及

$$\widehat{V}_0^N(x) = \sup_{\tau\in\widehat{\mathfrak{M}}_0^N} \widehat{E}_x \beta^\tau g(X_\tau),$$

其中 $\widehat{\mathfrak{M}}_0^N$ 为 $\widehat{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 中有性质 $\tau(\omega) \leqslant N$ $(\omega \in \Omega)$ 的最优停时 τ 的类. (参见图 61.)

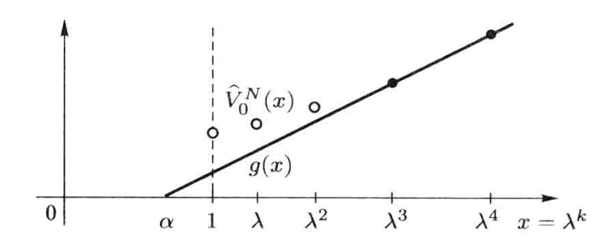


图 61 函数 $g(x)=(x-a)^+$ 和 $V_0^N(x)=Q^N g(x)$ 在 $0<a<1$ 情形下的图像

我们再记

$$\widehat{T}f(x) = \widehat{\mathsf{E}}_x f(X_1) = \widehat{p} f\left(\frac{x}{\lambda} \wedge 1\right) + (1-\widehat{p}) f(\lambda x), \tag{18}$$

$$\widehat{Q}f(x) = \max(f(x), \beta \widehat{T} f(x)). \tag{19}$$

由 §2a 中的定理 3 及其注得到

$$\widehat{V}_0^N(x) = \widehat{Q}^N g(x), \tag{20}$$

以及最优停时 $\widehat{\tau}_0^N \in \widehat{\mathfrak{M}}_0^N$ 有下列结构 (比较 §5b 中的 (9)):

$$\widehat{\tau}_0^N = \min\{0 \leqslant n \leqslant N \colon X_n \in \widehat{D}_n^N\}, \tag{21}$$

其中

$$\widehat{D}_n^N = \{x \in \widehat{E} \colon \widehat{V}_0^{N-n}(x) = g(x)\}. \tag{22}$$

显然, $\widehat{D}_0^N \subseteq \widehat{D}_1^N \subseteq \cdots \subseteq \widehat{D}_N^N = \widehat{E} \equiv \{1, \lambda, \lambda^2, \cdots\}$.

完全如同在 §5b 中那样, 考察函数序列 $\widehat{Q}g(x), \cdots, \widehat{Q}^N g(x)$, 并把它们与 $g(x)$ 作比较, 我们求得, “停止区域” $\widehat{D}_n^N$ 有下列形式:

$$\widehat{D}_n^N = \{x \in \widehat{E} \colon x \in [\widehat{x}_n^N, \infty)\}, \tag{23}$$

其中

$$1 = \widehat{x}_N^N \leqslant \widehat{x}_{N-1}^N \leqslant \cdots \leqslant \widehat{x}_0^N. \tag{24}$$

停止区域 $\widehat{D}_n^N$ 和观察延续区域 $\widehat{C}_n^N = \widehat{E} \setminus \widehat{D}_n^N$ 之间的定性关系也如同 §5b 中的图 57 中那样 (在记号上要作这样的显然的替换: $S_i \to X_i$, $E \to \widehat{E}, \cdots, x_N^N = 0 \to \widehat{x}_N^N = 1$).

注 2. 如果

$$V_0^N(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \widehat{\mathsf{E}}_x \beta^\tau g(X_\tau),$$

那么由 §2a 中的定理 3 导出, $V_0^N(x)=\widehat{Q}^N g(x)$. 把这个等式与 (20) 相比较, 我们看到, $\widehat{V}_0^N(x)=V_0^N(x)$, $x\in\widehat{E}$, 以及由公式 (21) 所确定的时刻 $\widehat{\tau}_0^N$, 将不仅是在类 $\widehat{\mathfrak{M}}_0^N$ 中, 并且也在更广的类 $\mathfrak{M}_0^N$ 中是最优的.

4. 由于 $g(x)\geqslant 0$, 故根据 §2b 中的定理 4, 函数 $\widehat{V}(x)=\lim\limits_{N\to\infty}\widehat{V}_0^N(x)$. 令

$$\widehat{\tau}=\inf\{n\geqslant 0\colon \widehat{V}(X_n)=g(X_n)\}=\inf\{n\geqslant 0\colon X_n\in\widehat{D}\},$$

其中 $\widehat{D}=\{x\in E\colon x\in[x,\infty)\}$ 以及 $\widehat{x}=\lim\limits_{N\to\infty}\widehat{x}_0^N$.

根据同样的定理, 时刻 $\widehat{\tau}$ 将是问题 (16) 的最优停时仅当 $\widehat{\mathsf{P}}_x(\widehat{\tau}<\infty)=1$, $x\in\widehat{E}$. 暂时搁置时刻 $\widehat{\tau}$ 的这一性质, 我们转向求值 $\widehat{x}$ 和函数 $\widehat{V}(x)$.

函数 $\widehat{V}(x)$ 满足方程

$$\widehat{V}(x)=\max(g(x),\beta\widehat{T}\widehat{V}(x)),\quad x\in\widehat{E},\tag{25}$$

因而, 在 "观察延续区域" $\widehat{C}=\widehat{E}\setminus\widehat{D}$ 中, 它是下列方程的解之一:

$$\varphi(x)=\beta\widehat{T}\varphi(x),\quad x\in\widehat{C},\tag{26}$$

或者按展开形式,

$$\varphi(x)=\beta\left[\widehat{p}\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\vee 1\right)+(1-\widehat{p})\varphi(\lambda x)\right],\quad x\in\widehat{C}.\tag{27}$$

特别是, 当 $x=1$ 时,

$$\varphi(1)=\beta[\widehat{p}\varphi(1)+(1-\widehat{p})\varphi(\lambda)],\tag{28}$$

以及当 $x\geqslant\lambda$ 时,

$$\varphi(x)=\beta\left[\widehat{p}\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)+(1-\widehat{p})\varphi(\lambda x)\right].\tag{29}$$

自然以 x^γ 的形式来求方程 (29) 的解 (比较 §5b 中的第 5 点). 于是我们得到对于 γ 的方程

$$\frac{1}{\beta}=\widehat{p}\lambda^{-\gamma}+(1-\widehat{p})\lambda^\gamma,\tag{30}$$

它有两个解 $\gamma_1<0$ 和 $\gamma_2>1$, 使得量 $y_1=\lambda^{\gamma_1}$ 和 $y_2=\lambda^{\gamma_2}$ 由下列公式确定:

$$y_1=\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B},\quad y_2=\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B},\tag{31}$$

其中

$$A=\frac{1}{(1-\widehat{p})\beta},\quad B=\frac{\widehat{p}}{1-\widehat{p}}.\tag{32}$$

当 $x\geqslant\lambda$ 时, 方程 (29) 的通解 $\varphi(x)$ 可表示为这样的形式: $c\psi_b(x)$, 其中 $\psi_b(x)=bx^{\gamma_1}+(1-b)x^{\gamma_2}$.

由于 $\psi_b(1)=1$, 故常数 $c=\varphi(1)$.

把 $\varphi(\lambda)=\varphi(1)\psi_b(\lambda)$ 代入方程 (28), 并考虑到由问题的含义有 $\varphi(1)\neq 0$, 我们得到未知值 b 的方程

$$1=\beta\left\{\widehat{p}+(1-\widehat{p})\left[b\lambda^{\gamma_1}+(1-b)\lambda^{\gamma_2}\right]\right\}, \tag{33}$$

其解为

$$\widehat{b}=\frac{(1-\widehat{p})\lambda^{\gamma_2}+\widehat{p}-\beta^{-1}}{(1-\widehat{p})(\lambda^{\gamma_2}-\lambda^{\gamma_1})}. \tag{34}$$

利用 γ_1 和 γ_2 由方程 (30) 来确定, 不难确立 $0<\widehat{b}<1$.

设 $\widehat{V}_{c_0}(x)=c_0\psi_{\widehat{b}}(x)$, $x<x_0$, 其中 c_0 和 x_0 为待定常数. 显然, 所求函数 $\widehat{V}(x)$ 为下列一族函数中的函数:

$$\widehat{V}_{c_0}(x;x_0)=\begin{cases}(x-a)^+, & x\geqslant x_0,\\ \widehat{V}_{c_0}(x), & x<x_0.\end{cases} \tag{35}$$

这时, 记为 $\widehat{c}$ 和 $\widehat{x}$ 的常数 c_0 和 x_0 的最优值, 可由下列考虑来得到: 所求函数 $\widehat{V}(x)=\widehat{V}(x;\widehat{x})$ 必定是函数 $g(x)$ 的最小 β-超过优函数, 即它同时满足两个不等式:

$$\begin{aligned}&\widehat{V}(x)\geqslant g(x),\\ &\widehat{V}(x)\geqslant\beta\widehat{T}\widehat{V}(x),\end{aligned} \tag{36}$$

其中 $x\in\widehat{E}=\{1,\lambda,\lambda^2,\cdots\}$.

证明这个解存在以及求得 $\widehat{c}$ 和 $\widehat{x}$ 的精确解完全如同标准买入期权的情形一样 (参见 §5b 第 6 点和 [283]). 在这一情形下, 当 $\Delta=\lambda-1$ 接近于零, 作为 $\widehat{c}$ 和 $\widehat{x}$ 的近似值, 可取下列方式得到的量 $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{x}$. (比较在 §§5b, c 中的对应程序.)

我们将认为, 给定在集合 $\widehat{E}=\{1,\lambda,\lambda^2,\cdots\}$ 上的函数 $\psi_{\widehat{b}}(x)$, $\widehat{V}_{c_0}(x)$, $g(x)$, $\widehat{V}_{c_0}(x;x_0)$ 在集合 $[1,\infty)$ 上用同样的表达式来定义. 于是对应的近似值 $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{x}$ 由下列补充考虑来确定:

$$\begin{aligned}&\widehat{V}_{\widetilde{c}}(\widetilde{x})=g(\widetilde{x}),\\ &\left.\frac{d\widehat{V}_{\widetilde{c}}(x)}{dx}\right|_{x=\widetilde{x}-}=\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=\widetilde{x}+}.\end{aligned} \tag{37}$$

考虑到

$$\widehat{V}_{\widetilde{c}}(x)=\widetilde{c}\psi_{\widehat{b}}(x)=\widetilde{c}[\widehat{b}x^{\gamma_1}+(1-\widehat{b})x^{\gamma_2}],$$

$g(x)=(x-a)^+$ 以及显然有 $\widetilde{x}>a$, 我们求得, $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{x}$ 是下列方程组的解:

$$\begin{aligned}&\widetilde{c}[\widehat{b}\widetilde{x}^{\gamma_1}+(1-\widehat{b})\widetilde{x}^{\gamma_2}]=\widetilde{x}-a,\\ &\widetilde{c}[\widehat{b}\gamma_1\widetilde{x}^{\gamma_1-1}+(1-\widehat{b})\gamma_2\widetilde{x}^{\gamma_2-1}]=1.\end{aligned} \tag{38}$$

特别是, 当 $a = 0$ 时,

$$\widetilde{x} = \left(\frac{\widehat{b}}{1 - \widehat{b}} \frac{1 - \gamma_1}{\gamma_2 - 1} \right)^{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}}, \tag{39}$$

$$\widetilde{c} = \frac{\widetilde{x}}{\gamma_1 \widehat{b} \widetilde{x}^{\gamma_1} + \gamma_2 (1 - \widehat{b}) \widetilde{x}^{\gamma_2}}. \tag{40}$$

由所引入的讨论得到, 对于充分小的 $\Delta > 0$, 值 $\widehat{V}_{\widetilde{c}}(1)$ 接近于 $\widehat{V}(1)$. 从而, 考虑到公式 (17) 和 $\widehat{V}_{\widetilde{c}}(1) = \widetilde{c}$, 我们求得, 对于小 $\Delta > 0$, 价格 $\widehat{\mathbb{C}} \approx S_0 \cdot \widetilde{c}$. (更详尽的分析参见 [283]. 也比较第八章 §2d.)

第七章　随机金融模型中的套利理论. 连续时间

1. 半鞅模型中的证券组合

§1a. 容许策略. I. 自融资. 向量随机积分

在有关连续时间情形的本章中, 将考察两种证券市场模型:

由银行账户 B 和有限种股票 $S=(S_1,\cdots,S^d)$ 所组成的 (B,S)-市场,

和

由银行账户 B 和一般来说有连续统个数的债券 $\mathcal{P}=\{\mathsf{P}(t,T);0\leqslant t\leqslant T,T>0\}$ 所组成的 $(B,\mathcal{P})$-市场.

第 1–4 节有关 (B,S)-市场. $(B,\mathcal{P})$-市场有其自有特点, 对它的讨论在分离的第 5 节.

1. 设金融市场由 $d+1$ 种资产 $X=(X^0,X^1,\cdots,X^d)$ 所组成, 并且在连续性条件下运作, 其中的概率统计本性用渗透概率空间 (随机基底) $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 来描述, 其中 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为进入的 "信息" 流.

我们关于资产 $X^i=(X_t^i)_{t\geqslant 0}$ $(i=0,1,\cdots,d)$ 的基本假定在于它们是正半鞅 (参见第三章 §5a).

类似于离散时间情形, 每个可料 (参见第三章 §5a) $(d+1)$-维过程 $\pi=(\pi^0,\pi^1,\cdots,\pi^d)$ $(\pi^i=(\pi_t^i)_{t\geqslant 0})$ 将称为证券组合, 并说 π 定义了在所考察的由 $d+1$ 种资产所组成的市场上的 (投资, 交易等等的) 策略.

过程 $X^\pi=(X_t^\pi)_{t\geqslant 0}$ 有值

$$X_t^\pi=\sum_{i=0}^{d}\pi_t^iX_t^i, \tag{1}$$

或者以向量记法,

$$X_t^\pi=(\pi_t,X_t), \tag{2}$$

它将称为组合的资本或者资本过程. 值 $x=X_0^\pi$ 是初始资本量. 有时为了强调初始资本, 记 $X^\pi=X^\pi(x)$.

2. 在第五章 §1a 中, 对于离散时间情形曾引入自融资策略, 并把它的作用解释为使得相应的资本 X^π 演变仅仅只需考虑市场上的资产价格 X^i 的变化, 而没有任何外部资本的 "流入或流出".

对于连续时间情形, 自融资性的定义变得有点微妙, 最终, 它联系着容许对所考察的半鞅进行积分的函数类的描述问题.

我们记得, 在离散时间情形下 (参见第五章 §1a), 组合 $\pi=(\pi^0,\pi^1,\cdots,\pi^d)$ 称为

自融资 ($\pi \in SF$), 是指对每个 $n \geqslant 1$,

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^n (\pi_k, \Delta X_k), \tag{3}$$

或者以展开形式,

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^d \pi_k^i \Delta X_k^i. \tag{4}$$

完全一样, 在连续时间情形下, 自然可说, π 是自融资组合, 或者自融资策略 ($\pi \in SF$), 是指对于每个 $t > 0$,

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t (\pi_s, dX_s), \tag{5}$$

或者同样以展开形式,

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \sum_{i=0}^d \pi_s^i dX_s^i, \tag{6}$$

它以符号形式将记为

$$dX_t^\pi = (\pi_t, dX_t).$$

当然, 这里首先需要给出 "向量随机积分 (5)" 的定义.

其定义的方法之一在于按定义, 简单地令

$$\int_0^t (\pi_s, dX_s) \equiv \sum_{i=0}^d \int_0^t \pi_s^i dX_s^i, \tag{7}$$

即把 "向量随机积分" 理解为通常的 "随机积分" 之和.

类似的定义方法对于 "简单" 函数完全有效 (并且我们能完全把握), 按其实质, 它是对应的 "积分" 概念自身的最自然的 (如果它不是唯一的) 构造.

然而, 定义 (7) 看来并没有囊括所有情形. "向量随机积分 $\int_0^t (\pi_s, dX_s)$" 例如完全可能如下正确定义: 通过对于 (在适当含义下) 逼近过程 $\pi = (\pi_s)_{s\geqslant 0}$ 的 "简单" 过程 $\pi(n) = (\pi_s(n))_{s\geqslant 0}$ $(n \geqslant 1)$ 对应积分 $\int_0^t (\pi_s^{(n)}, dX_s)$ 的极限过程.

这里的实质如下.

首先, 即使通常的 (纯量) 随机积分 $\pi^i \cdot X_t^i \equiv \int_0^t \pi_s^i dX_s^i$ 一般来说, 也可对于更广的可料过程 π^i 来定义, 而不仅是对于局部有界可料过程来定义, 正如在第三章 §5a 中所叙述. (过程 π^i 的局部有界性的诱人特点在于, 如果 $X^i \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$, 那么随机积分 $\pi^i \cdot X^i$ 同样属于类 $\mathscr{M}_{\text{loc}}$; 参见第三章 §5a 第 7 点中的性质 (c).)

其次, "按分量定义" (7) 并没有考虑所参与的半鞅的可能 "解释", 它在原理上, 可对可用 "简单" 向量过程 $\pi(n)$ $(n \geqslant 1)$ 逼近的向量过程 $\pi = (\pi^0, \pi^1, \cdots, \pi^d)$ 的更广的类引入.

3. 我们阐释考虑到所注意到的状况的 "向量随机积分" 的基本观念和结果, 其证明细节可在专门文献中找到 (参见例如, [73], [172], [248; 第 II 章], [249], [250], [303], [304], [347]).

设 $X = (X^1, \cdots, X^d)$ 为 d-维半鞅, 它有下列 (某种) 分解式:

$$X = X_0 + A + M, \tag{8}$$

其中 $A = (A^1, \cdots, A^d)$ 是有界变差过程, 而 $M = (M^1, \cdots, M^d)$ 是局部鞅 ($A \in \mathscr{V}$, $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$).

显然可求得这样的与流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 协调的 $C_0 = 0$ 的不减过程 $C = (C_t)_{t \geqslant 0}$ 以及 $c^i = (c_t^i)$ 和 $c^{ij} = (c_t^{ij})$, $i, j = 1, \cdots, d$, 使得

$$A_t^i = \int_0^t c_s^i dC_s, \quad t > 0, \tag{9}$$

而二次变差

$$[M^i, M^j]_t = \int_0^t c_s^{ij} dC_s. \tag{10}$$

(关于过程 $[M^i, M^j]$ 的定义以及它们满足性质 $[M^i, M^j]^{1/2} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ 参见第三章 §5b.)

设 $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^d)$ 为可料过程.

我们将说,

$$\pi \in L_{\mathrm{var}}(A), \tag{11}$$

是指 (对于所有 $\omega \in \Omega$)

$$\int_0^t \left| \sum_{i=1}^d \pi_s^i c_s^i \right| dC_s < \infty, \quad t > 0. \tag{12}$$

我们也将记 ($q \geqslant 1$)

$$\pi \in L_{\mathrm{loc}}^q(M), \tag{13}$$

它是指过程

$$\left[\left(\sum_{i,j=1}^d \pi^i c^{ij} \pi^j \right) \cdot C \right]^{q/2} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}},$$

即如果对于某个 Markov 时刻序列 $\tau_n \uparrow \infty$, 当 $n \to \infty$,

$$\mathsf{E} \left[\int_0^{\tau_n} \left(\sum_{i,j=1}^d \pi_s^i c_s^{ij} \pi_s^j \right) dC_s \right]^{q/2} < \infty. \tag{14}$$

如果对于某个表示式 $X = X_0 + A + M$, 可料过程 $\pi \in L_{\mathrm{var}}(A) \cap L_{\mathrm{loc}}^q(M)$, 那么我们说

$$\pi \in L^q(X), \tag{15}$$

或者 $\pi \in L^q(X; \mathsf{P}, \mathbb{F})$, 如果需要强调所有讨论都是关于测度 P 和流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 来进行的.

我们强调, π 对类 $L^q(X)$ 的属性不依赖于确定性过程 $C = (C_t)_{t\geqslant 0}$ 的具体选择. (参见例如, [249].)

无论在纯量情形下, 还是在向量情形下, 随机积分 $\int_0^t (\pi_s, dX_s)$ $(t > 0, \pi \in L^q(X))$ 的标准定义之一都在于按定义, 令

$$\int_0^t (\pi_s, dX_s) \equiv \int_0^t (\pi_s, dA_s) + \int_0^t (\pi_s, dM_s), \tag{16}$$

其中

$$\int_0^t (\pi_s, dA_s) \equiv \sum_{i=1}^d \int_0^t \pi_s^i c_s^i dC_s \tag{17}$$

为 (沿轨线的) Lebesgue-Stieltjes 积分之和, 以及

$$\int_0^t (\pi_s, dM_s) \tag{18}$$

是关于局部鞅 $M = (M^1, \cdots, M^d)$ 的随机积分.

关于有界变差过程 (对 $\pi \in L_{\text{var}}(A)$ 和每个 $\omega \in \Omega$) 的 Lebesgue-Stieltjes 积分不会带来困难.

这里的基本问题在于:

a) 给出关于局部鞅 (对于 $\pi \in L^q_{\text{loc}}(M)$) 的 (向量) 积分 (18) 的定义;

b) 证明定义 (16) 的正确性, 换句话说, 确立这样得到的积分 $\int_0^t (\pi_s, dX_s)$ 与具体的半鞅分解式 (8) 无关.

注 1. “自然” 定义 (16) 包含一系列 “暗礁”.

例如, 由此并不能完全自动得到线性性质:

$$a\int_0^t (\pi'_s, dX_s) + b\int_0^t (\pi''_s, dX_s) = \int_0^t (a\pi'_s + b\pi''_s, dX_s).$$

关于测度 P 替换为某个等价测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的不变可积性质 (即 $L^q(X; \mathsf{P}, \mathbb{F}) = L^q(X; \widetilde{\mathsf{P}}, \mathbb{F})$ 以及对应的积分值重合 (至少P-a.s.)) 是否成立先验上也不明显.

不明显的还有该积分定义关于原来的 σ-代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的递推不变性. 也就是说, 设 $\mathbb{F}$-半鞅 X 满足 X_t 为 $\mathscr{G}$-可测, 其中 $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)_{t\geqslant 0}$ 为满足常设条件的 σ-代数流, 且 $\mathscr{G}_t \subseteq \mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$. 众所周知 (参见例如, [249] 和 [250]), $\mathbb{F}$-半鞅 X 于是也将是 $\mathbb{G}$-半鞅. 因此, 自然期待, 如果过程 π 是 $\mathbb{G}$-协调的, 那么

$$\pi \in L^q(X; \mathsf{P}, \mathbb{F}) \Longrightarrow \pi \in L^q(X; \mathsf{P}, \mathbb{G}),$$

以及随机积分值不依赖于在哪个随机基底 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F})$ 或者 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{G})$ 考察过程 π 和 X.

在 [74], [248], [249] 中确立, 其实, 所有这三个性质都顺理成章地满足 (对于任何 $q \geqslant 1$).

4. 我们来描述关于局部鞅 M 对于 $\pi \in L^q_{\text{loc}}(M)$ 的积分 (18).

如果 $\pi \in L^2(M)$, 即

$$\|\pi\|_{L^2(M)} \equiv \left[\mathsf{E}\int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^d \pi_s^i c_s^{ij} \pi_s^j\right) dC_s\right]^{1/2} < \infty, \tag{19}$$

那么随机积分 $(\pi \cdot M)_t \equiv \int_0^t (\pi_s, dM_s)$ 如同纯量情形下对于平方可积鞅一样来定义 (参见第三章 §5a 第 4 点).

也就是说, 先求得简单可料向量过程 $\pi(n) = (\pi^1(n), \cdots, \pi^d(n))$ $(n \geqslant 1)$ 的序列, 使得

$$\|\pi - \pi(n)\|_{L^2(M)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{20}$$

对于这样的过程 $\pi(n)$, 随机积分 $(\pi(n) \cdot M)_t$ 可按公式 (7) 按分量来确定.

根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式 (参见, 例如, [283; 2.34], [304; 第 1 章 §9]),

$$\mathsf{E}\sup_{u \leqslant t}\left|\int_0^u (\pi_s(n), dM_s)\right|^2 \leqslant C_2 \|\pi(n)\|_{L^2(M)}, \quad t > 0, \tag{21}$$

其中 C_2 为某个普适常数.

由 (20) 和 (21) 我们断定,

$$\mathsf{E}\sup_{u \leqslant t}\left|\int_0^u (\pi_s(n) - \pi_s(m), dM_s)\right|^2 \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

由随机变量空间 L^2 的完备性我们求得, 对每个 $t \geqslant 0$, 可求得记为 $(\pi \cdot M)_t$ 或 $\int_0^t (\pi_s, dM_s)$ 的随机变量, 它称为 $\pi \in L^2(M)$ 关于局部鞅 M 的向量随机积分, 并满足

$$\mathsf{E}\sup_{u \leqslant t}\left|\int_0^u (\pi_s(n), dM_s) - \int_0^u (\pi_s, dM_s)\right|^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

由此不难导出 (比较 [250; 第 I 章] 中的定理 4.40 的证明), 量 $\int_0^t (\pi_s, dM_s)$ $(t \geqslant 0)$ 可选择为使得过程 $\left(\int_0^t (\pi_s, dM_s)\right)_{t \geqslant 0}$ 与流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 协调, 并且对每个时刻 $t > 0$, 有右连续和带左极限的轨线.

对于 $\pi \in L^2(M)$ 的所给出的随机积分的定义可用标准的局部化方法推广到可料过程 $\pi \in L^2_{\text{loc}}(M)$, 即那些对 $q = 2$ 满足性质 (14) 的过程.

关于局部鞅 M 对类 $L^1_{\text{loc}}(M)$ 中的过程 π 构造随机积分就大为复杂, 这里 $\pi \in L^1_{\text{loc}}(M)$, 是指过程 π 有这样的性质:

$$\left[\left(\sum_{i,j=1}^d \pi_s^i c_s^{ij} \pi_s^j\right) \cdot C\right]^{1/2} \in \mathscr{A}_{\text{loc}}.$$

即使在纯量情形下 ($d=1$), 这时这一条件取下列形式:

$$(\pi^2 \cdot [M,M])^{1/2} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}},$$

随机积分 $\pi \cdot M$ 的构造也要求应用相当精细的技巧, 所依据的远不是局部鞅的平凡性质 (参见 [304] 中的第 2 章 §2).

注 2. 联系条件 $(\pi^2 \cdot [M,M])^{1/2} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$, 注意到以下这点是有益的: 对于局部有界鞅 π 它显然满足, 因为正如在第 3 点中所注意到, 每个局部鞅 M 具有性质 $[M,M]^{1/2} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

关于对局部鞅 M 和 $\pi \in L_{\mathrm{loc}}(M)\,(\equiv L^1_{\mathrm{loc}}(M))$ 定义向量随机积分的各种方法, 以及对于半鞅 X 和 $\pi \in L(X)\,(\equiv L^1(X))$ 的随机积分 $(\pi \cdot X)_t \equiv \int_0^t (\pi_s, dX_s)$ 参见 [74], [248]–[250], 其中都确立了下述自然期待的性质成立 (X 和 Y 是半鞅):

a) 如果 ρ 是有界可料过程以及 $\pi \in L(X)$, 那么 $\rho\pi \in L(X)$, $\rho \in L(\pi \cdot X)$, 以及 $(\rho\pi) \cdot X = \rho \cdot (\pi \cdot X)$;
b) 如果 $X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, 那么 $L_{\mathrm{loc}}(X) \subseteq L(X)$;
c) 如果 $X \in \mathscr{V}$, 那么 $L_{\mathrm{var}}(X) \subseteq L(X)$;
d) $L(X) \cap L(Y) \subseteq L(X+Y)$, 且如果 $\pi \in L(X) \cap L(Y)$, 那么 $\pi \cdot X + \pi \cdot Y = \pi \cdot (X+Y)$;
e) $L(X)$ 是向量空间, 且 $\pi' \cdot X + \pi'' \cdot X = (\pi' + \pi'') \cdot X$, 其中 $\pi', \pi'' \in L(X)$.

在 [248], [249] 中也讨论了满足性质 a)–e) 的过程 π 的类 $L(X)$ 的 "最大性" 问题. 这个类的 "最大性" 也被 J. Mémin [343] 的结果所证实; 根据后者, 空间 $\{\pi \cdot X \colon \pi \in L(X)\}$ 在半鞅空间中关于 *M. Emery* 拓扑是闭的 ([74], [138]).

5. 在过程 $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^d)$ *局部有界*以及 $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ 的情形下, 向量随机积分过程 $\left(\int_0^t (\pi_s, dM_s)\right)_{t \geqslant 0}$ *是局部鞅* ([74], [249]). 在纯量情形下, 这个性质已经在第三章 §5a 的第 7 点注意到.

值得注意的是, 如果局部有界性*不满足*, 那么即使在纯量随机积分的情形下, 关于局部鞅 M 的随机积分 $\int_0^t \pi_s dM_s$ 一般来说不是局部鞅; 正如下列例子所指出.

例 (M. Emery [137]). 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 我们考察两个有同样参数的指数分布的独立停时 σ 和 τ. 令

$$M_t = \begin{cases} 0, & t < \min(\sigma,\tau), \\ 1, & t \geqslant \min(\sigma,\tau) = \sigma, \\ -1, & t \geqslant \min(\sigma,\tau) = \tau. \end{cases} \tag{22}$$

如果 $\mathscr{F}_t = \sigma(M_s, s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, 那么不难断定, $M = (M_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})$ 是鞅.

我们考察决定性过程 (而这也就是可料过程) $\pi = (\pi_t)_{t \geqslant 0}$, 其中 $\pi_0 = 0$, $\pi_t = 1/t$, $t > 0$.

鞅 M 是有界变差过程, 而我们对过程 π 关于 M 进行积分 (在 Lebesgue-Stieltjes 含义下), 因为随机变量 $\min(\sigma,\tau)$ 以概率 1 为严格正.

由第 4 点中提到的性质 b), 按鞅 M 的积分 $\int_0^t \pi_s dM_s$ 与 Lebesgue-Stieltjes 积分相重合.

设 $Y_t = \int_0^t \pi_s dM_s$, $t \geqslant 0$. 由 (22) 我们求得,

$$Y_t = \begin{cases} 0, & t < \min(\sigma,\tau), \\ \dfrac{1}{\min(\sigma,\tau)}, & t \geqslant \min(\sigma,\tau) = \sigma, \\ -\dfrac{1}{\min(\sigma,\tau)}, & t \geqslant \min(\sigma,\tau) = \tau. \end{cases} \tag{23}$$

过程 $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ 不是鞅, 因为 $\mathsf{E}|Y_t| = \infty$, $t > 0$. 这个过程也不是局部鞅, 因为对于任何不恒为零的停时 $T = T(\omega)$, $\mathsf{E}|Y_T| = \infty$. (详情参见 [137].)

6. 联系所引入的 M. Emery 的例子, 自然产生这样的问题: 如果过程为 X, 什么是向量随机积分 $\left(\int_0^t (\pi_s, dX_s)\right)_{t\geqslant 0}$ 为局部鞅的充分条件. 然而, 这样的由过程 π 的局部有界性所组成的条件已经在上面提到.

下列 J.-P. Ansel 和 C. Stricker 的结果 ([9; 推论 3.5]) 给出的条件不用 π 上的有界性的术语来表达, 而用随机积分值的本身来表达 (正如我们以后将看到, 对讨论套利问题来说这样更方便).

定理 ([9]). *设 $X = (X^1, \cdots, X^d)$ 为P-局部鞅, $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^d)$ 为可料过程, 它们使得随机积分 $\pi \cdot X$ 有定义, 并且下有界于某个常数 ($\pi \cdot X_t \geqslant C$, $t \geqslant 0$). 那么 $\pi \cdot X$ 为局部鞅.*

7. 我们回到自融资策略问题.

定义 1. 设 $X = (X^0, X^1, \cdots, X^d)$ 为描述 $d+1$ 种资产价格的 $(d+1)$-维非负半鞅. 策略 $\pi = (\pi^0, \pi^1, \cdots, \pi^d)$ 称为 (关于 X) *容许策略*, 是指 $\pi \in L(X)$.

定义 2. 容许策略 $\pi \in L(X)$ 称为*自融资策略*, 是指其在 (1) 中定义的资本 $X^\pi = (X_t^\pi)_{t\geqslant 0}$ 有表示式 (5).

自融资容许策略类将表示为 SF 或 $SF(X)$; 比较第五章 §1a.

对于离散时间情形, 自融资性 (参见 (3) 或 (4)) 等价于

$$\sum_{i=0}^{d} (X_{k-1}^i, \Delta\pi_k^i) = 0, \quad k \geqslant 1.$$

(第五章 §1a 中的公式 (13).)

我们考察在性质 (7) 满足的假定下这个关系式的连续时间情形的可能类比问题.

为此我们假定, 我们考察的策略 $\pi = (\pi^0, \pi^1, \cdots, \pi^d)$ 的分量是有界变差的 (可料) 过程 ($\pi^i \in \mathscr{V}$, $i = 0, 1, \cdots, d$). 这样的策略的例子例如有用来开始构造随机积分的简单函数 (第三章 §5a).

在这一假定下 ($\pi^i \in \mathscr{V}$), 我们求得

$$d(\pi_t^i X_t^i) = \pi_t^i dX_t^i + X_{t-}^i d\pi_t^i$$

(参见第三章 §5b 第 4 点中的性质 b)), 因而, 自融资条件 (5) 等价于条件

$$\sum_{i=0}^{d} \int_0^t X_{s-}^i d\pi_s^i = 0, \quad t > 0, \tag{24}$$

或者以符号形式,

$$(X_{t-}, d\pi_t) = 0. \tag{25}$$

在 $\pi = (\pi^0, \pi^1, \cdots, \pi^d)$ 为可料自融资策略的更一般的情形下, 我们求得 (根据第三章 §5c 中的 Itô 公式),

$$\begin{aligned} d(\pi_t^i X_t^i) &= \pi_{t-}^i dX_t^i + X_{t-}^i d\pi_t^i + d[X^i, \pi^i]_t \\ &= \pi_t^i dX_t^i - \Delta\pi_t^i dX_t^i + X_{t-}^i d\pi_t^i + d\langle X^{ic}, \pi^{ic}\rangle_t + \Delta\pi_t^i \Delta X_t^i \\ &= \pi_t^i dX_t^i + X_{t-}^i d\pi_t^i + d\langle X^{ic}, \pi^{ic}\rangle_t. \end{aligned} \tag{26}$$

因此, (可料) 半鞅策略 π 的自融资性条件可取下列条件:

$$\sum_{i=0}^{d} X_{t-}^i d\pi_t^i + d\langle X^{ic}, \pi^{ic}\rangle_t = 0. \tag{27}$$

特别是, 如果 $\pi \in \mathscr{V}$, 那么 $\langle X^{ic}, \pi^{ic}\rangle = 0$, 且由 (27) 我们得到 (25).

8. 金融数学在考察连续时间模型时主要限于半鞅类的基本理由在于, 正如我们所看到的, 对于它们来说, 有 (向量) 随机积分概念, 借助于这个概念, 就可定义资本的演变, 并给出自融资性概念. (这一状况早在 M. Harrison, D. Kreps 和 S. Pliska 的著作 [214] 和 [215] 中就完全清晰地注意到, 正是这些著作首先把注意力转向半鞅和随机分析在描述资产价格动态变化上的作用.)

但是, 这当然并不意味着半鞅就能 “解决一切”. 在许多情形下随机积分也可对于非半鞅来定义, 例如, 对于分形布朗运动以及更一般的, 对于广泛的高斯过程类. 很自然, 这时就要专门研究怎样的函数可进行积分的问题.

我们再次回忆起, 在 (纯量) 半鞅情形下, 随机积分可对于所有*局部有界可料函数*来定义 (第三章 §5a). 这时, 尤其是对于金融数学中的计算来说, 重要的是关于局部鞅的随机积分的性质: 对于这样的函数, 这种积分也是*局部鞅*.

然而, 当运作是对于局部无界函数来进行时, 情况大大复杂化. 例如, 上面所引入的 M. Emery 例子表明, 在局部无界函数 π 的情形下, 随机积分过程 $\int_0^{\cdot}(\pi_s, dM_s)$ 即使是关于鞅 M, 一般来说, 它也不是局部鞅.

这种状况与离散时间情形相比有很大反差, 对于后者来说, 每个 "鞅变换" $\sum_{k\leqslant\cdot}(\pi_k, \Delta M_k)$ 都是局部鞅. (参见第二章 §1c 中的定理.)

与此相联系, 提出下列定义是合适的.

定义 3. 设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})_{t\geqslant 0}$ 为半鞅. 我们说, X 是 d 阶鞅变换 ($X \in \mathscr{M}T^d$), 是指可求得鞅 $M = (M^1, \cdots, M^d)$ 和可料过程 $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^d) \in L_{\text{loc}}(M)$, 使得

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\pi_s, dM_s), \quad t \geqslant 0. \tag{28}$$

(比较第二章 §1c 中的定义 7.)

定义 4. 设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})_{t\geqslant 0}$ 为半鞅. 我们说 X 是 d 阶局部鞅变换 ($X \in \mathscr{M}T^d_{\text{loc}}$), 是指可求得局部鞅 $M = (M^1, \cdots, M^d)$ 和可料过程 $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^d) \in L^1_{\text{loc}}(M)$, 使得表示式 (28) 成立.

在离散时间情形下, 类 $\mathscr{M}_{\text{loc}}$, $\mathscr{M}T^d$ 和 $\mathscr{M}T^d_{\text{loc}}$ 对于任何 $d \geqslant 1$ 重合 (第二章 §1c 中的定理). 而在连续时间情形下, 一般来说, 已经不是这样, 正如所引入的 M. Emery 的例子所指出.

9. 上面所引入的自融资性的概念表达了在市场上既无资本流入, 也无资本流出; 它是对证券市场上的组合和运作所作的金融限制的重要形式之一. 在离散时间情形下, 在第五章 §1a 中还考察了其他形式的限制.

对于连续时间情形的对应的平衡条件几乎是自动地转换.

比如, 如果认为, $X^0 = B$ 是银行账户, 而 $X^1 = S$ 是股票, 那么类似于第五章 §1a 中的第 4 点, 当股票支付分红时, 平衡条件将表现为下列样式:

$$dX_t^\pi = \beta_t dB_t + \gamma_t (dS_t + dD_t), \tag{29}$$

其中 D_t 是在时间区间 $[0, t]$ 中所支付的总分红. 这时,

$$d\left(\frac{X_t^\pi}{B_t}\right) = \gamma_t \left(d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) + \frac{dD_t}{B_t}\right). \tag{30}$$

在 "带消费" 和 "运营费用" 的情形下, 条件转换为相应的形式. 参见第五章 §1a 中的公式 (25)–(35) 和 (36)–(40).

§1b. 折现过程

1. 在比较不同的资产的价值 (价格) 时, 要选择某种 "标准的" "基底" 资产, 以它作为单位, 就能导出与其他证券的比较. 例如, 在考察由 500 种资产所组成的

S&P500 市场 (参见第一章 §1b, 以及更详尽的, 例如 [310]) 时, 作为 "基底" 资产的自然就取 S&P500 指数, 它就由这些 (500 种) 资产的价值 (按照某种加权的方式) 所组成.

在第一章中 (参见 §2c), 简要地叙述了流行的定价模型 $CAPM$, 其中经常取银行账户 (无风险资产) 作为 "基底" 资产, 而各种资产的 "倍他" $\beta(A)$ 作为资产 "质量" 和 "风险" 的指标, 由此就可导出各种资产 A 的比较.

以后在考察 $d+1$ 种资产 $X^0, X^1, \cdots, X^d$ 时, 我们规定, 比如资产 X^0 选为 "基底" 资产; 通常把它区分为 "简单构建的" 资产. 然而, 重要的是要强调, 任何过程 $Y=(Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 都可选作这样的资产, 只要它总是严格正.

在选择适当的过程 Y 时, 还有一个纯粹的 "解析" 原因在于, 依靠这样的所谓折现过程的成功选择 (在英法金融文献中, 也运用术语 "numéraire (币制)"; 参见例如, [175]), 与直接运作 X^π 相比, 运作 $\dfrac{X^\pi}{Y}$ 有时可大为简化; 关于这方面参见第五章 §2a 最后的注.

2. 如果 $Y=(Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个正过程, 它与 $X=(X^0, X^1, \cdots, X^d)$ 一起定义在随机基底 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上, 那么对于 $i=0,1,\cdots,d$, 令

$$\overline{X}^i=\frac{X^i}{Y}, \quad \overline{X}^\pi=\frac{X^\pi}{Y}. \tag{1}$$

若 π 为 (关于 X) 的自融资组合, 则自然要阐明它关于折现组合 $\overline{X}=(\overline{X}^0, \overline{X}^1, \cdots, \overline{X}^d)$ 是否是自融资的. 为此, 我们假定, §1a 中的性质 (7) 满足, 并且过程 $Y^{-1}=\dfrac{1}{Y}$ 是有界变差的可料过程 ($Y^{-1}\in\mathscr{V}$). 于是

$$d\overline{X}_t^i=Y_t^{-1}dX_t^i+X_{t-}^i dY_t^{-1}, \tag{2}$$

以及

$$d\overline{X}_t^\pi=Y_t^{-1}dX_t^\pi+X_{t-}^\pi dY_t^{-1}. \tag{3}$$

因此, 由 §1a 中的自融资条件 (6) 可见,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^d \pi_t^i d\overline{X}_t^i &= Y_t^{-1}\sum_{i=0}^d \pi_t^i dX_t^i+\left(\sum_{i=0}^d \pi_t^i X_{t-}^i\right)dY_t^{-1}\\ &= Y_t^{-1}dX_t^\pi+\left(\sum_{i=0}^d \pi_t^i X_{t-}^i\right)dY_t^{-1}.\end{aligned} \tag{4}$$

假定, 对于 $t>0$ (P-a.s.)

$$\sum_{s\leqslant t}\sum_{i=0}^d |\pi_s^i \Delta X_s^i \Delta Y_s^{-1}|<\infty. \tag{5}$$

于是

$$\left(\sum_{i=0}^{d}\pi_t^i X_{t-}^i\right) dY_t^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{d}\pi_t^i X_t^i\right) dY_t^{-1} - \left(\sum_{i=0}^{d}\pi_t^i \Delta X_t^i\right) \Delta Y_t^{-1},$$

并且由 (4) 我们求得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{d}\pi_t^i d\overline{X}_t^i &= Y_t^{-1} dX_t^\pi + X_t^\pi dY_t^{-1} - \left(\sum_{i=0}^{d}\pi_t^i \Delta X_t^i\right) \Delta Y_t^{-1} \\ &= Y_t^{-1} dX_t^\pi + X_{t-}^\pi dY_t^{-1} + \left(\Delta X_t^\pi - \sum_{i=0}^{d}\pi_t^i \Delta X_t^i\right) \Delta Y_t^{-1} \\ &= Y_t^{-1} dX_t^\pi + X_{t-}^\pi dY_t^{-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

因为 $dX_t^\pi = \sum\limits_{i=0}^{d}\pi_t^i dX_t^i$, 以及根据随机积分的性质, $\Delta X_t^\pi = \sum\limits_{i=0}^{d}\pi_t^i \Delta X_t^i$ (参见第三章 §5a 第 7 点中的性质 (f)).

由 (3) 和 (6) 我们得到关系式

$$d\overline{X}_t^\pi = \sum_{i=0}^{d}\pi_t^i d\overline{X}_t^i, \tag{7}$$

它意味着对于折现组合 $\overline{X} = (\overline{X}^0, \overline{X}^1, \cdots, \overline{X}^d)$, 自融资性质满足.

注. 在上面所引入的折现时保持自融资性质的证明中, 假定 Y 是正可料过程, $Y^{-1} \in \mathscr{V}$ 以及性质 (5) 满足. 关于另外的确保自融资性的可能条件参见例如, [175].

折现过程的经典例子是银行账户 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$:

$$B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right), \tag{8}$$

其中 $r = (r(t))_{t\geqslant 0}$ 一般来说, 是某个随机利率, 通常假定为正过程. 银行账户是方便的 “基准”, 它能用来比较其他诸如股票、债券之类的资产的 “质量”.

3. 设 Y^1 和 Y^2 是两种折现资产, 而时间参数 $t \in [0, T]$. 我们将假定, 关于某个在 $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ 上的测度 P^1, 规范过程 $\dfrac{X}{Y_1}$ 是 ($(d+1)$-维) 鞅.

我们将阐明, 什么时候可断定, 存在测度 $\mathsf{P}^2 \sim \mathsf{P}^1$, 使得关于它, 规范过程 $\dfrac{X}{Y^2}$ 也是鞅. (比较第五章第 4 节中的叙述.)

为此, 我们假定, 关于测度 P^1, 过程 $\dfrac{Y^2}{Y^1}$ 是 (正) 鞅.

对于 $A \in \mathscr{F}_T$, 令

$$\mathsf{P}^2(A) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(I_A \frac{Y_T^2}{Y_T^1}\Big/\frac{Y_0^2}{Y_0^1}\right). \tag{9}$$

显然, P^2 是 $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ 上的概率测度, 并且 $\mathsf{P}^2 \sim \mathsf{P}^1$.

根据 "Bayes 公式" (参见第五章 §3a 中的 (4)),

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{\mathsf{P}^2}\left(\frac{X_T^i}{Y_T^2}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(\frac{X_T^i}{Y_T^2}\cdot\frac{Y_T^2}{Y_T^1}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right)\cdot\frac{Y_t^1}{Y_t^2}\\ &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(\frac{X_T^i}{Y_T^1}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right)\cdot\frac{Y_t^1}{Y_t^2}\\ &= \frac{X_t^i}{Y_t^1}\cdot\frac{Y_t^1}{Y_t^2} = \frac{X_t^i}{Y_t^2}\ (\mathsf{P}^2\text{-},\ \mathsf{P}^2\text{-a.s.}).\end{aligned} \tag{10}$$

由此得到, 关于按公式 (9) 构造的测度 P^2, 规范过程 $\dfrac{X}{Y^2}$ 是鞅.

注意到以下这点是有益的: 如果 f_T 为 $\mathscr{F}_T$-可测非负随机变量, 那么由 (9) 和 (10) 导出, (在 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$ 的假定下)

$$Y_0^1\mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(\frac{f_T}{Y_T^1}\right) = Y_0^2\mathsf{E}_{\mathsf{P}^2}\left(\frac{f_T}{Y_T^2}\right), \tag{11}$$

以及 (P^2-, P^1-a.s.)

$$Y_0^1\mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(\frac{F_T}{Y_T^1}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) = Y_0^2\mathsf{E}_{\mathsf{P}^2}\left(\frac{f_T}{Y_T^2}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right). \tag{12}$$

§1c. 容许策略. II. 某些特殊类

1. 对应于 §1a 中的定义 2, 容许策略 $\pi\in SF(X)$ 的资本 $X^\pi=(X_t^\pi)_{t\leqslant T}$ 可表示为下列形式:

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t (\pi_s, dX_s),\quad t\leqslant T, \tag{1}$$

其中 $\int_0^t(\pi_s,dX_s)$ 为关于 (非负) 半鞅 $X=(X^0,X^1,\cdots,X^d)$ 的向量随机积分.

以后将认为 X^0 为正 ($X_t^0>0, t\leqslant T$), 并取它作为折现过程. 这时, 为了不与 "分数" 表达式 $\left(\dfrac{X_t^i}{X_t^0}\text{ 类型}\right)$ 打交道, 我们将立即假定 $X_t^0\equiv 1$, 尤其是, 认为原来的半鞅 $X=(1,X^1,\cdots,X^d)$ 是 $(d+1)$-维折现后的资产.

2. 我们在讨论中引入某个特殊的容许策略类, 其作用将在考察无套利机会的 "鞅判别准则" 时完全揭示 (参见后面的第 4 节和第 5 节).

定义 1. 对于每个 $a\geqslant 0$, 令

$$\Pi_a(X)=\{\pi\in SF(X)\colon X_t^\pi\geqslant -a,\ t\in[0,T]\}. \tag{2}$$

a-容许性条件 "$X_t^\pi\geqslant -a, t\in[0,T]$" 的含义是完全清楚的: 量 $a\geqslant 0$ 限制了策略 π 的最大亏损, 它是由这样那样的经济上的考虑所容许的.

如果 $a > 0$, 那么资本 X^π 容许取负值, 它可解释为具有借债的手段 (例如通过银行账户的贷款或者股票的 "卖空").

在 $a = 0$ 的情形下, 资本总额 $X_t^\pi = \sum_{i=0}^d \pi_t^i X_t^i$ 必定对于所有 $0 \leqslant t \leqslant T$ 保持非负.

类 $\Pi_a(X)$, $a \geqslant 0$, 早在第一批著作中引入 ([214], [215]), 按照套利理论及其后续, 它已经成为最自然的策略类来进行考察, 对于它们来说 (正如著名的 "圣彼得堡赌博"①; 参见例如, [186; 第 2 版]) 不容许无限期采用 "输了赌注加倍" 策略 (比较第五章 §2b 中的例 2).

正是这一类 $\Pi_a(X)$ $(a \geqslant 0)$ 以及它们的某些扩充, 才与一些涉及无套利机会的充要条件的著作相联系, 其中我们首先注意到的是 F. Delbaen 和 V. Schachemayer 的系列著作 (参见例如, 论文 [100], [101] 以及其中的历史文献信息).

3. 类 $\Pi_a(X)$ $(a \geqslant 0)$ 远不是唯一的自然容许策略类.

下列定义在 C. A. Sin 的著作 [447] 中系统运用.

定义 2. 设 $g = (g^0, g^1, \cdots, g^d)$ 为有非负分量的 $(d+1)$-维向量, $g(X_t) = (g, X_t) \left(= \sum_{i=0}^d g^i X_t^i\right)$.

令

$$\Pi_g(X) = \{\pi \in SF(X)\colon X_t^\pi \geqslant -g(X_t),\ t \in [0,T]\}. \tag{3}$$

正如在定义 1 的情形下, 条件 "$X_t^\pi \geqslant -g(X_t)$, $t \in [0,T]$" 的直观含义很明显: 在每个时刻 t, 量 $g(X_t)$ 限制了 "经济上" 容许的最大损失或者最大负债, 其中在银行账户上有资本 g^0, 而第 i 种资产上有股票 g^i, $i = 1, \cdots, d$.

显然, 如果 $g^0 \geqslant a$, 那么 $\Pi_a(X) \subseteq \Pi_g(X)$.

4. 为了以后叙述在半鞅模型下的套利理论问题, 有益的是引入 $\mathscr{F}_T$-可测偿付函数 $\psi = \psi(\omega)$ 的某些 "试验" 类; 这些函数可能是上面引入的容许策略类的策略 π 的收益 $\int_0^T (\pi_s, dX_s)$ 的下界.

---

①这里的 "圣彼得堡赌博" 是指 Jacob Bernoulli (1654—1705) 在其遗著中所提出的一种假想的赌博. 这是一场猜硬币正反面的赌博. 假设第 1 次猜对, 赌徒可得 2 元; 第 1 次猜错, 第 2 次猜对, 赌徒可得 4 元; 一般情况下, 前 $n-1$ 次猜错, 第 n 次猜对可得 2^n 元. 这里自然可认为这是赌徒每次都把自己的赌注加倍. 对于这样的赌博, 赌徒赢得任意大的钱的概率都是正的. 但其条件是他的赌本必须无限制. 从金融学的视角来看 (参见第五章 §2b 中的例 2), 这是一场总是有 "套利" 的赌博. 但是如果赌徒 ("投资者") 的赌本 ("资金") 有限, 他就不可能采用这样的 "投资策略". 因此, 在研究有无限期的证券市场的 "套利理论" 时, 必须要对策略作这里所说的限制. —— 译者注

定义 3. 对于 $a \geqslant 0$, 令

$$\Psi_a(X) = \Big\{\psi \in L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})\colon \psi \leqslant \int_0^T (\pi_s, dX_s) \quad \text{对于某个策略 } \pi \in \Pi_a(X) \text{ 成立}\Big\},$$

以及

$$\Psi_+(X) = \Big\{\psi \in L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})\colon \psi \leqslant \int_0^T (\pi_s, dX_s) \quad \text{对于某个策略 } \pi \in \Pi_+(X) \text{ 成立}\Big\},$$

其中 $\Pi_+(X) = \bigcup_{a \geqslant 0} \Pi_a(X)$.

定义 4. 对于有 $g^i > 0$ $(i = 0, 1, \cdots, d)$ 的 $g = (g^0, g^1, \cdots, g^d)$, 令

$$\Psi_g(X) = \Big\{\psi \in L_g(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})\colon \psi \leqslant \int_0^T (\pi_s, dX_s) \quad \text{对于某个策略 } \pi \in \Pi_g(X) \text{ 成立}\Big\},$$

其中 $L_g(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$ 为满足 $|\psi| \leqslant g(X_T)$ 的 $\mathscr{F}_T$-可测随机变量 ψ 的集合.

5. 如同通常那样, 在随机变量 ψ 的空间 (更确切地说, 随机变量的等价类; 参见例如, [439; 第 II 章, §10]) $L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$ 中, 引入范数

$$\|\psi\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_\omega |\psi| = \inf\{0 \leqslant c < \infty\colon \mathsf{P}(|\psi| > c) = 0\},$$

关于这一范数, 该空间变为完备 (因而, 根据定义, 它是 Banach 空间).

集合 $\Psi_a(X)$ $(a \geqslant 0)$ 和 $\Psi_+(X)$ 关于范数的闭包我们将记为 $\overline{\Psi}_a(X)$ $(a \geqslant 0)$ 和 $\overline{\Psi}_+(X)$.

在空间 $\Psi_g(X)$ 中我们将考察由下列公式定义的范数 $\|\cdot\|_g$:

$$\|\psi\|_g \equiv \left\| \frac{\psi}{g(X_T)} \right\|_\infty .$$

关于这个范数的闭包 $\Psi_g(X)$ 记为 $\overline{\Psi}_g(X)$.

2. 无套利机会的半鞅模型. 完全性

§2a. 无套利的概念及其变型

1. 在离散时间 $(n \leqslant N < \infty)$ 和有限种资产 $(d < \infty)$ 的情形下, 第一基本定理

的扩充版本 (第五章 §2e) 断言, 对于 (B, S)-市场,

$$ELMM \iff EMM \iff NA. \tag{1}$$

这里 NA 是在第五章 §2a 的定义 2 的含义下无套利性质 (NA= No Arbitrage). EMM和$ELMM$分别表示存在等价鞅测度 (Equivalent Martingale Measure) 和存在等价局部鞅测度 (Equivalent Local Martingale Measure).

因此, 如果在所考察的市场上无套利, 那么蕴涵关系 $NA \implies EMM$ 是说鞅测度的存在 ($\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$), 正如上一章中所指出, 给出了在定价时运用发展成熟的鞅论技巧的可能性.

另一方面, 如果 (B, S)-市场模型使得对它至少存在一个鞅测度, 那么蕴涵关系 $EMM \implies NA$ 可用来断定, 我们涉及的是一个 "公平" 运转的市场 (其含义为其中无套利机会).

(1) 中的前面两个蕴涵关系 $\implies$ 和 $\impliedby$ 从原理的视角来看也很重要, 它表明, 在所考察的局面下, 鞅测度类和局部鞅测度类其实是重合的.

显然, 在连续时间情形下 (至少对于半鞅模型), 期待有 (1) 类型的断言. 然而, 在这一情形下, 局面变得大为复杂, 即使, 按其实质来说, "无套利" (在相应的定义下) 成立当且仅当存在有某种 (以后将明确的) "鞅" 性质的等价测度.

以后的叙述将逐渐表明, 为了使 (1) 类型的断言成立的问题有一个令人满意的答案, 必须动用 "无套利" 概念的各种文本, 它们最终用来确定该考虑怎样的策略类.

与此相联系的是, 我们记得, 在离散时间情形下, 为使断言 (1) 成立, 实质上对策略 $\pi = (\beta, \gamma)$ (除了标准的可料性和自融资性假定以外) 没有任何限制.

连续时间情形则是另一回事, 其中为了陈述自融资性质已经必须动用向量随机积分 $\int_0^t (\pi_s, dX_s)$, 而为使它存在对 (可料) 策略 π 必须附加容许性条件: $\pi \in L(X)$.

当然, 如果考察的仅仅是作为 "初等" 策略的有限线性组合的 "简单" 策略 (第三章 §5a), 那么不会产生任何与向量积分定义 (参见 §1a) 有关的 "技巧" 复杂性.

遗憾的是, 在连续时间情形下, 由在 "简单" 策略类中的无套利性事实, 一般来说, 不能成功地确立鞅测度或者由这样那样的 "鞅性质" 的测度的存在. ("简单" 策略类看来对这个问题来说太 "贫乏" 了!)

2. 现在我们转向半鞅模型 $X = (1, X^1, \cdots, X^d)$ ($X^i = (X^i_t)_{t \leqslant T}$, $i = 1, \cdots, d,$) 中有关无套利机会的基本定义.

下列概念可认为是经典定义 (比较第五章 §2a 中的定义 2).

定义 1. 我们说, 性质 (在时刻 T) NA 满足, 是指对于每个有 $X^\pi_0 = 0$ 的策略 $\pi \in SF(X)$,

$$\mathsf{P}(X^\pi_T \geqslant 0) = 1 \implies \mathsf{P}(X^\pi_T = 0) = 1. \tag{2}$$

定义 2. 我们说, 性质 NA_a 和 NA_+ 满足, 是指相应地有

$$\Psi_a(X) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}, \tag{3}$$

以及

$$\Psi_+(X) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}, \tag{4}$$

其中 $\Psi_a(X)$ 和 $\Psi_+(X)$ 在 §1c 中定义, 而 $L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$ 是空间 $L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$ 中的非负随机变量子集.

不难指出, 条件 (4) 等价于条件

$$\Psi_+^0(X) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}, \tag{5}$$

其中

$$\Psi_+^0(X) = \left\{\psi \in L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})\colon \psi = \int_0^T (\pi_s, dX_s) \right. \\ \left. \text{对于某个策略 } \pi \in \Pi_+(X) \text{ 成立}\right\}. \tag{6}$$

定义 3. 我们说, 性质 $\overline{NA}_+$ 满足, 是指

$$\overline{\Psi}_a(X) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}. \tag{7}$$

性质 $\overline{NA}_+$ 是性质 NA_+ 的加强, 它在 F. Delbaen 和 V. Schachermayer 的著作中被系统运用 (参见例如, [100], [101]), 其中它被称为性质 *NFLVR* (No Free Lunch with Vanishing Risk, 没有带消失中的风险的免费午餐).

名称 *NFLVR* 的解释如下.

在考察无套利的 NA_+ 文本的满足问题时, 仅取或者优于、或者重合于策略 $\pi \in \Pi_+(X)$ 的 "收益" $\int_0^T (\pi_s, dX_s)$ 的非负函数作为 "试验" 函数 ψ.

但是在考察无套利机会的 $\overline{NA}_+$-文本时, 将取 (仍然是非负的) 函数 $\psi \in \overline{\Psi}_+(X) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$ 作为 "试验" 函数, 其中可能是作为某些 $\Psi_+(X)$ 中的元素 ψ^k $(k \geqslant 1)$ (关于范数 $\|\cdot\|_\infty$) 的极限而产生的函数, 这里的 ψ^k 一般来说也取非负值 (特别是, 它们可能也是对于某个 π^k 的优于 $\int_0^T (\pi_s^k, dX_s)$ 的函数 ψ^k).

由于 $k \to \infty$ 时, $\|\psi^k - \psi\|_\infty \to 0$, 故可以认为, $\psi^k \geqslant -1/n$ (对于所有 $\omega \in \Omega$ 成立), 它可解释为消失中的风险 (*VR*, 即 Vanishing Risk).

尤其引人注目的是, 无套利机会的 $\overline{NA}_+$-文本, 正如在 [101] 中所确立的, 是一个透彻的充要 ("鞅") 条件. 参见后面的 §2c 中的定理 2.

3. 我们还要引入与类 $\Pi_g(X)$ 中的策略运用相联系的无套利文本.

定义 4. 设 $g=(g^0,g^1,\cdots,g^d)$, 其中 $g^i>0$, $i=0,1,\cdots,d$. 我们说, 性质 NA_g 和 $\overline{NA}_g$ 满足, 是指相应地有

$$\Psi_g(X)\cap L_\infty^+(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathsf{P})=\{0\},$$

以及

$$\overline{\Psi}_g(X)\cap L_\infty^+(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathsf{P})=\{0\}.$$

在著作 [447] 中性质 $\overline{NA}_g$ 称为性质 *NFFLVR* (No Feasible Free Lunch with Vanishing Risk, 没有可行的带消失中的风险的免费午餐; feasible 的含义是可行的, 可能的, 合适的等等).

§2b. 无套利机会的鞅判别准则. I. 充分条件

1. 我们将假定, 金融市场由 $d+1$ 种资产 $X=(1,X^1,\cdots,X^d)$ 所组成, 其中 $X^i=(X_t^i)_{t\leqslant T}$ 为给定在有 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$ 的渗透概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T},\mathsf{P})$ 上的非负半鞅.

我们记得, 如果存在 $(\Omega,\mathscr{F}_T)$ 上的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 满足 $\widetilde{\mathsf{P}}\sim\mathsf{P}$, 且关于这个测度半鞅 X 是

$$\text{鞅 } (X\in\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}))$$

或

$$\text{局部鞅 } (X\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})),$$

那么我们说, 性质

$$EMM$$

或者性质

$$ELMM$$

相应满足.

下列给出无套利机会充分条件的定理 1 和定理 2 对于金融数学和金融工程中的计算来说大概是半鞅模型中的套利理论的最有用的结果.

定理 1. 在半鞅模型 $X=(1,X^1,\cdots,X^d)$ 中对于任何 $a\geqslant0$ 和有 $g^i\geqslant0$ $(i=0,\cdots,d)$ 的 $g=(g^0,g^1,\cdots,g^d)$,

$$ELMM\Longrightarrow NA_a, \tag{1}$$

$$EMM\Longrightarrow NA_g. \tag{2}$$

证明. 设策略 $\pi\in\Pi_g(X)$ 以及 X^π 为其资本:

$$X_t^\pi=X_0^\pi+\int_0^t(\pi_s,dX_s),\quad t\leqslant T. \tag{3}$$

假定, $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为等价于测度 P 的鞅测度. 正如在 §1a 中的注 1 所说, π 关于 X 的可积性质关于测度 P 对它的等价测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的替换不变. 从而, 如果 $\pi \in \Pi_g(X)$, 那么 (3) 中的向量随机积分也对测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 有定义.

对于有 $X_0^\pi = 0$ 的策略 $\pi \in \Pi_g(X)$ (在性质 NA_g 满足的含义下) 无套利的证明思想在于指出, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 过程 X^π 为上鞅.

事实上, 如果上鞅性质满足, 那么

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} X_T^\pi \leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} X_0^\pi = 0, \tag{4}$$

因而, 由条件 $X_T^\pi \geqslant 0$ (P-和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.) 立即得到所要求的关系式 $X_T^\pi = 0$ (P- 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.).

这样, 我们确立了过程 X^π 的 $\widetilde{\mathsf{P}}$-上鞅性质.

如果 $\pi \in \Pi_g(X)$, 那么 (P- 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.)

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t (\pi_s, dX_s) \geqslant -(g, X_t). \tag{5}$$

由于向量随机积分的线性性质, 由 (5) 我们求得

$$\int_0^t (\pi_s + g, dX_s) \geqslant -X_0^\pi - (g, X_0). \tag{6}$$

关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 过程 X 按假定为鞅, 并且根据 J.-P. Ansel 和 K. Stricker 的结果 (参见 §1a 中的第 6 点), (6) 中的向量随机积分将一致下有界, 因而是局部鞅; (根据 Fatou 引理) 这就是说, 它是上鞅.

这样一来,

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t (\pi_s + g, dX_s) - (g, X_t - X_0), \tag{7}$$

其中随机积分为 $\widetilde{\mathsf{P}}$-上鞅, 而 $(g, X_t - X_0)_{t \leqslant T}$ 为 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅. 因此, 对于 $\pi \in \Pi_g(X)$, 过程 X 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是上鞅, 它与 (4) 一起证明了所要求的断言 (2).

为了证明断言 (1) 只需要注意到, 由 $g = (a, 0, \cdots, 0)$ 的 (6) 得到, (按局部鞅的) 随机积分仍然是局部鞅. 由于 $X^0 \equiv 1$, 故对于 $g = (a, 0, \cdots, 0)$, 量 $(g, X_t - X_0) = 0$. 因此, (7) 的右端为 $\widetilde{\mathsf{P}}$-局部鞅, 以及断言 (1) 的证明完成, 正如在蕴涵关系 (2) 的情形下那样.

推论. 由 (1) 导出,

$$ELMM \Longrightarrow NA_+. \tag{8}$$

2. 断言 (1), (2) 和 (8) 可加强为下列形式.

定理 2. 在半鞅模型 $X = (1, X^1, \cdots, X^d)$ 中,

$$ELMM \Longrightarrow \overline{NA}_+, \tag{9}$$

并且如果 $g=(g^0,g^1,\cdots,g^d)$ 有 $g^i>0,\ i=0,1,\cdots,d$, 那么

$$EMM \Longrightarrow \overline{NA}_g. \tag{10}$$

证明. 设 $\psi\in\overline{\Psi}_g(X)$, 并且 $\psi\geqslant 0$. 于是存在 $\Psi_g(X)$ 中的函数序列 $(\psi^k)_{k\geqslant 1}$ 使得

$$\|\psi-\psi^k\|_g=\operatorname*{ess\,sup}_{\omega}\left|\frac{\psi(\omega)-\psi^k(\omega)}{g(X_T(\omega))}\right|\leqslant\frac{1}{k}\to 0,\quad k\to\infty.$$

不妨碍一般性, 可以认为, 对于所有 $\omega\in\Omega$,

$$-\frac{1}{k}\leqslant\frac{\psi(\omega)-\psi^k(\omega)}{g(X_T(\omega))}\leqslant\frac{1}{k}, \tag{11}$$

而这就是说,

$$-\frac{g(X_T(\omega))}{k}\leqslant\psi(\omega)-\frac{g(X_T(\omega))}{k}\leqslant\psi^k(\omega). \tag{12}$$

由于 $\psi^k\in\Psi_g(X)$, 可求得策略 $\pi^k\in\Pi_g(X)$, 使得

$$\psi^k\leqslant\int_0^T(\pi_s^k,dX_s). \tag{13}$$

与 (12) 一起, 这就导出不等式

$$-\frac{g(X_T)}{k}\leqslant\int_0^T(\pi_s^k,dX_s), \tag{14}$$

它表明, 对于策略序列 $(\pi^k)_{k\geqslant 1}$ 来说, 用随机积分来描述的收益的负部 (“风险”) 随着 k 的增长趋向于零 (“消失中的风险”).

不等式 (14) 显然等价于

$$-\frac{(g,X_0)}{k}\leqslant\int_0^T\left(\pi_s^k+\frac{g}{k},dX_s\right). \tag{15}$$

由于 $|\psi-\psi^k|\leqslant g(X_T)/k$, 故考率到 (13), (15) 和 Fatou 引理, 我们求得

$$\begin{aligned}
0\leqslant\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\psi&=\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\lim\psi^k=\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\lim\left(\psi^k+\frac{(g,X_T-X_0)}{k}\right)\\
&=\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\underline{\lim}\left(\psi^k+\frac{(g,X_T-X_0)}{k}\right)\leqslant\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\underline{\lim}\left(\int_0^T\left(\pi_s^k+\frac{g}{k},dX_s\right)\right)\\
&\leqslant\underline{\lim}\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\int_0^T\left(\pi_s^k+\frac{g}{k},dX_s\right)\leqslant 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

其中后一等式由随机积分 $\displaystyle\int_0^t\left(\pi_s^k+\frac{g}{k},dX_s\right)$ $(t\leqslant T)$ 的 $\widetilde{\mathsf{P}}$-上鞅性质而得.

这样一来, $\mathsf{P}(\psi=0)=\widetilde{\mathsf{P}}(\psi=0)=1$, 它也证明了蕴涵关系 (10).

为了证明 (9), 我们假定, $\psi \in \overline{\Psi}_+(X)$ 和 $\psi \geqslant 0$. 于是可求得 $\Psi_+(X)$ 中的函数序列 $(\psi^k)_{k\geqslant 1}$ 满足

$$\|\psi - \psi^k\|_\infty \equiv \operatorname{ess}\sup_\omega |\psi(\omega) - \psi^k(\omega)| \leqslant \frac{1}{k} \to 0, \tag{17}$$

并且

$$\psi^k \leqslant \int_0^T (\pi_s^k, dX_s) \tag{18}$$

对某个 $a_k \geqslant 0$ 关于 $\pi^k \in \Pi_{a^k}(X)$ 成立.

由 (17) 和 (18) 我们得到

$$-\frac{1}{k} \leqslant \int_0^T (\pi_s^k, dX_s). \tag{19}$$

又, 同样如同在 (16) 中, 我们求得

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\psi &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \lim \psi^k = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \varliminf \psi^k \\ &\leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \varliminf \int_0^T (\pi_s^k, dX_s) \\ &\leqslant \varliminf \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \int_0^T (\pi_s^k, dX_s) \leqslant 0, \end{aligned}$$

其中后一不等式再次由随机积分 $\int_0^t (\pi_s^k, dX_s)$ $(t \leqslant T)$ 的 $\widetilde{\mathsf{P}}$-上鞅性质得到.

定理得证.

§2c. 无套利机会的鞅判别准则. II. 必要和充分条件 (某些结果通报)

1. 本节中将引入一系列关于 (这样那样的形式的) 无套利机会的充要条件的结果的陈述.

我们再次记起, 在离散时间情形下, 断言 “$EMM \iff NA$” 成立, 它也被用来作为在一般半鞅模型的各种文本的原型.

这时, 如果说蕴涵关系 $EMM \implies NA$ 可简单地证明, 那么或者要求具体构造、或者要求鞅测度的存在证明的相反断言 $EMM \impliedby NA$ 的确立, 基于 (甚至在简单的离散时间情形下看来也是如此!) 远非简单的构造 (参见第五章中的第 2 节).

因此, 毫不令人惊奇的是, 主要属于 F. Delbaen 和 V. Schachermayer ([100], [101]) 的在连续时间情形下相应结果的证明相当复杂, 而我们只能限于一系列有意思的结果的通报, 其证明细节可在所指出的专门文献中找到.

定理 1 ([100]). a) 设半鞅 $X = (1, X^1, \cdots, X^d)$ 有有界分量. 那么

$$\boxed{EMM \iff \overline{NA}_+} \tag{1}$$

b) 设半鞅 $X = (1, X^1, \cdots, X^d)$ 有局部有界分量. 那么

$$\boxed{ELMM \iff \overline{NA}_+} \tag{2}$$

2. 为了在一般半鞅模型中陈述有关性质 $\overline{NA}_+$ 满足的充要条件的结果, 按照 [101], 我们引入 σ-鞅和 σ-鞅测度的概念.

为此我们回忆起, 在离散时间情形下, 每个局部鞅 X 同时是鞅变换, 即 (参见第二章 §1c 中的定理) $X = X_0 + \gamma \cdot M$, 其中 γ 为某个可料序列, 而 M 为鞅.

如果深入分析第二章 §1c 中的定理证明, 那么可以察觉, 每个局部鞅 X 可表示为鞅变换 $X = X_0 + \gamma \cdot M$, 其中 γ 是正可料序列.

正是由于这一点以及按照 [101], 我们将把有正值 γ 的鞅变换称为 σ-鞅. 而在同一情形下, 当对于随机序列 X 可求得测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 使得关于它, X 变为 σ-鞅时, 我们将说, 性质 $E\sigma MM$ 成立.

有了这些新概念, 第一基本定理 (第五章 §§2b, c; 也参见 §2a 中的 (1)) 可表述为下列形式:

$$\boxed{EMM \iff ELMM \iff E\sigma MM \iff NA} \tag{3}$$

这一形式从它暗示通过怎样的途径可求得对于连续时间的第一基本定理的推广的视角来看很有用.

著作 [101] 的作者的最大成功在于, 为了在一般半鞅模型中求出无套利机会的 $\overline{NA}_+$-文本的充要条件, 应该转向的正是 "σ-鞅" 和 "σ-鞅测度".

我们给出相应的定义.

定义 1. 半鞅 $X = (X^1, \cdots, X^d)$ 称为 σ-鞅, 是指存在 $\mathbb{R}^d$-值鞅 $M = (M_t)_{t \leqslant T}$ 和 M-可积可料正一维过程 $\gamma = (\gamma_t)_{t \leqslant T}$, 使得 $X = X_0 + \gamma \cdot M$.

定义 2. 如果存在测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, 使得关于它半鞅 X 是 σ-鞅, 那么我们说, $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为 σ-鞅测度, 并满足性质 $E\sigma MM$.

注 1. 正如已经注意到, 术语 "σ-鞅" 是在著作 [101] 中引入的. 以前, 这种过程称为 (参见例如, [73], [137]) 类 (Σ_m) 的半鞅. 我们强调, σ-鞅是鞅变换的特殊情形 (参见 §1a 中的定义 3).

下列结果可称为在无套利机会的 $\overline{NA}_+$ 文本的充要条件寻求中的最高点.

定理 2 ([101]). 在一般半鞅模型中,

$$\boxed{E\sigma MM \iff \overline{NA}_+} \tag{4}$$

注 2. M. Emery 的例子 (§1a 第 5 点) 表明, σ-鞅不一定是局部鞅.

为了使定理 1 和定理 2 的断言与离散时间情形下的对应结果 (参见 (3)) 的联系直观清晰, 我们把它们改写为下列形式.

推论. 在一般的半鞅模型 $X=(1,X^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ $(X^i=(X_t^i)_{t\leqslant T},\ i=1,\cdots,d,\ T<\infty)$ 中:

$$\boxed{EMM \Longrightarrow ELMM \Longrightarrow E\sigma MM \Longleftrightarrow \overline{NA}_+}\ ^{①} \tag{5}$$

在局部有界半鞅模型 $X=(1,X^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ $(X^i=(X_t^i)_{t\leqslant T},\ i=1,\cdots,d,\ T<\infty)$ 中:

$$\boxed{EMM \Longrightarrow ELMM \Longleftrightarrow E\sigma MM \Longleftrightarrow \overline{NA}_+} \tag{6}$$

在有界半鞅模型 $X=(1,X^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ $(X^i=(X_t^i)_{t\leqslant T},\ i=1,\cdots,d,\ T<\infty)$ 中:

$$\boxed{EMM \Longleftrightarrow ELMM \Longleftrightarrow E\sigma MM \Longleftrightarrow \overline{NA}_+} \tag{7}$$

3. 现在我们转向 $\overline{NA}_g$-文本的无套利的充要条件.

定理 3 ([447]). 在一般半鞅模型 $X=(1,X^1,\cdots,X^d)$ $(X^i=(X_t^i)_{t\leqslant T},\ i=1,\cdots,d,\ T<\infty)$ 中, 对于有 $g^i>0$ $(i=0,1,\cdots,d)$ 的 $g=(g^0,g^1,\cdots,g^d)$ 的条件 $\overline{NA}_g$ 等价于条件 EMM:

$$\boxed{EMM \Longleftrightarrow \overline{NA}_g} \tag{8}$$

蕴涵关系 $\Longrightarrow$ 已经在上面确立. 反方向蕴涵关系的证明思想大致如下.

设 $X=(1,X^1,\cdots,X^d)$ 为半鞅. 于是, 正如在 [447] 中所指出, X 满足条件 $\overline{NA}_g$ 当且仅当折现价格 $\dfrac{X}{g(X)}$ 满足条件 $\overline{NA}_+$. 由于 $\dfrac{X}{g(X)}$ 是有界半鞅, 故由断言 (7) 导出等价测度的存在, 这就证明了断言 (8).

为完成结果清单, 我们还要举出下列两个反例.

例 1 ($EMM \nRightarrow NA$). 我们考察有 $B_t\equiv 1$ 和 $S_t=W_t$ 的 (B,S)-市场, 其中 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 为标准维纳过程 (线性 Bachelier 模型; 参见第八章 §1a). 对于自融资策略 $\pi=(\beta,\gamma)$, 资本

$$X_t^\pi=\beta_t+\gamma_tS_t=X_0^\pi+\int_0^t\gamma_u\,dS_u.$$

令 $\tau=\inf\{t\colon S_t=1\}$ 和 $\gamma_u=I(u<\tau)$. 于是 $X_\tau^\pi=X_0^\pi+S_\tau$, 而这意味着, 如果 $X_0^\pi=0$, 那么 $X_\tau^\pi=1$ (P-a.s.).

显然, 在所考察的情形下, 存在鞅测度 (即维纳测度), 然而, 有 $\gamma_u=I(u<\tau)$ 的自融资策略 $\pi=(\beta,\gamma)$ 表明, 这里有套利机会.

例 2 ($ELMM \nRightarrow NA$, $ELMM \Rightarrow \overline{NA}_+$, 但 $\nRightarrow \overline{NA}_g$). 设 $X_t^0\equiv 1$, $t\in[0,1]$, 以及

$$X_t^1=\begin{cases} Y_{\operatorname{tg}(\frac{\pi t}{2})}, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & t=1,\end{cases}$$

① 在原版和英文版中, 最后一个 $\Longleftrightarrow$ 被减弱为 $\Longrightarrow$. —— 译者注

其中[①]

$$Y_t = \exp\left(W_t - \frac{1}{2}t\right),$$

以及 $W = (W_t)_{t\leqslant 1}$ 为维纳过程.

过程 X^1 是局部鞅. 由于 $\int_0^1 \gamma_s dX_s^1 = 1$ 对于 $\gamma_s \equiv 1$ 成立, 故由此得到, 经典含义下的套利成立. 同时, 由断言 (2) 得到, 性质 $\overline{NA}_+$ 成立. 至于性质 $\overline{NA}_g$, 则它在这里不满足. 事实上, 正如在 [447] 中, 令 $\pi_t^0 = 1$, $\pi_t^1 = -1$.

于是 $X_0^\pi = 0$, $X_t^\pi = 1 - X_t^1 \geqslant -g(X_t)$, 其中 $g(X_t) = 1 + X_t^1$, $X_1^\pi = 1$.

4.[②] 所有我们前面的套利讨论都有关于描述资产演变的过程是半鞅 的情形. 现在再来考虑非半鞅情形下套利机会存在或不存在的问题是很自然的.

下面我们考虑两个 (B, S)-市场的例子, 其中过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 是由参数 $\mathbb{H}$ 满足 $\frac{1}{2} < \mathbb{H} < 1$ 的分形布朗运动 $B^{\mathbb{H}} = (B_t^{\mathbb{H}})_{t\geqslant 0}$ 所构成的, 它 (正如已经在第三章 §2c 中提到) 不是半鞅, 因而没有 (局部) 鞅测度. 这一特点直接表明 (参见第一章 §2f 第 4 点), 在相应的 "分形" 模型中可能有套利机会; 事实上, 在下一例子中就有套利.

例 3 ($NELMM \Longrightarrow A$). 考虑下列线性结构的 (B, S)-市场:

$$B_t \equiv 1, \quad S_t = 1 + B_t^{\mathbb{H}}, \qquad t \geqslant 0, \tag{9}$$

其中 $B^{\mathbb{H}} = (B_t^{\mathbb{H}})_{t\geqslant 0}$ 是有参数 $\mathbb{H}$ 满足 $\frac{1}{2} < \mathbb{H} \leqslant 1$ 的分形布朗运动. (参见第八章 §1a 的线性 *Bachelier* 模型.)

我们考虑 (Markov) 策略 $\pi = (\beta, \gamma)$ 如下:

$$\beta_t = -(B_t^{\mathbb{H}})^2 - 2B_t^{\mathbb{H}}, \tag{10}$$

$$\gamma_t = 2B_t^{\mathbb{H}}. \tag{11}$$

于是其价值

$$X_t^\pi \equiv \beta_t + \gamma_t S_t = -(B_t^{\mathbb{H}})^2 - 2B_t^{\mathbb{H}} + 2B_t^{\mathbb{H}}(1 + B_t^{\mathbb{H}}) = (B_t^{\mathbb{H}})^2.$$

运用第八章 §5c 中的 Itô 公式 (22), 我们得到

$$dX_t^\pi \equiv d(B_t^{\mathbb{H}})^2 = 2B_t^{\mathbb{H}} dB_t^{\mathbb{H}}.$$

由 (9) 和 (11), 我们看到

$$dX_t^\pi = \gamma_t dS_t.$$

这意味着, 所涉及的策略 π 是自融资的. 由于 $X_0^\pi = 0$ 以及 $X_t^\pi = (B_t^{\mathbb{H}})^2 > 0$ 对于 $t > 0$ 成立, 这就得到在这个 (B, S)-市场中在每个时刻 $t > 0$ (在 0-容许策略类中) 都产生套利.

[①] 原版和英文版中, 这里的 $Y_t = \exp\left(W_t - \frac{1}{2}\right)$. —— 译者注

[②] 这一小点在原版中没有, 而只有英文版中有. —— 译者注

由金融的视角来看, 这是一个完全人为的例子, 其中价格 S_t $(t > 0)$ 可能取负值. 我们的下一个例子没有这个缺陷.

例 4 ($NELMM \Longrightarrow A$). 考虑如下的 (B, S)-市场:

$$dB_t = rB_t dt, \qquad B_0 = 1, \tag{12}$$

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t^{\mathbb{H}}), \qquad S_0 = 1, \tag{13}$$

其中 $B^{\mathbb{H}} = (B_t^{\mathbb{H}})_{t \geqslant 0}$ 仍然是 $\mathbb{H}$ 满足 $\frac{1}{2} < \mathbb{H} \leqslant 1$ 的分形布朗运动. 由第三章 §5c 中的公式 (33) 可见, 我们得到

$$B_t = e^{rt}, \tag{14}$$

$$S_t = e^{rt + \sigma B_t^{\mathbb{H}}}. \tag{15}$$

我们现在考虑满足下列条件的策略 $\pi = (\beta, \gamma)$:

$$\beta_t = 1 - e^{2\sigma B_t^{\mathbb{H}}}, \tag{16}$$

$$\gamma_t = 2(e^{\sigma B_t^{\mathbb{H}}} - 1). \tag{17}$$

对于这个策略我们有

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t = e^{rt}(e^{\sigma B_t^{\mathbb{H}}} - 1)^2.$$

运用第三章 §5c 中的 Itô 公式 (32), 我们得到

$$dX_t^\pi = re^{rt}(e^{\sigma B_t^{\mathbb{H}}} - 1)^3 dt + 2\sigma e^{rt + \sigma B_t^{\mathbb{H}}}(e^{\sigma B_t^{\mathbb{H}}} - 1) dB_t^{\mathbb{H}},$$

并且容易看到, 右端的表示式恰好就是 $\beta_t dB_t + \gamma_t dS_t$ 的表示式; 为此只需考虑 (14)–(17).

这样,

$$dX_t^\pi = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t,$$

它意味着由 (16) 和 (17) 定义的策略 π 为自融资策略.

由于对于这个策略我们也有 $X_0^\pi = 0$ 以及对于 $t > 0$ 有 $X_t^\pi > 0$, 这个模型 (正如在例 3 中的模型那样), 就为对于 $t > 0$ (在 0-容许策略类中) 的套利留下了空间.

§2d. 半鞅模型中的完全性

1. 类似于离散时间情形下的术语 (参见第五章 §1b 中的定义 4), 我们说, 半鞅模型 $X = (X^0, X^1, \cdots, X^d)$ 是完全的 (或者 T-完全), 是指每个非负有界 $\mathscr{F}_T$-可测偿付索求 f_T 可复制 (可达), 即可求得容许自融资组合 π, 使得 $X_T^\pi = f_T$ (P-a.s.).

自然, 可复制性质本质上依赖于容许考察的自融资策略类.

我们记得, 第二基本定理 (第五章 §4a) 断言, 在有离散时间 ($n \leqslant N < \infty$) 和有限种资产 ($d < \infty$) 的无套利模型中, 完全性成立当且仅当鞅测度集合刚好由一个等价于测度P 的测度 ($\widetilde{\mathsf{P}}$) 所构成.

2. 下面将在等价鞅测度类 $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ 非空的假定下, 引进一个在一般半鞅模型下的完全性充分条件.

在这一假定下, 下列断言成立.

定理. 设鞅测度集合只包含一个测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$. 那么在类$SF(X)$ 中可找到策略 π, 使得 $X_T^\pi = f_T$ (P-a.s.) 对于任何有 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}|f_T| < \infty$ 的偿付索求 f_T 成立.

这一定理的证明可按下列模式来进行 (比较第五章 §4a 中的框图):

$$|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1 \overset{\{1\}}{\Longrightarrow} \text{“}X\text{-可表示性”} \overset{\{2\}}{\Longrightarrow} \text{完全性}.$$

这里关于鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ 的 “X-可表示性” 意味着 (比较第五章 §4b 中的 “S-可表示性”), 每个给定在同一个渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}, \widetilde{\mathsf{P}})$ 上的鞅 $M = (M_t, \mathscr{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})_{t\leqslant T}$ 与 $\widetilde{\mathsf{P}}$-鞅 X 一起有下列表示式:

$$M_t = M_0 + \int_0^t (\gamma_s, dX_s), \quad t \leqslant T,$$

其中 $\gamma \in L(X)$.

蕴涵关系 {1} 由 J. Jacod (参见 [248; 第 II 章]) 得到, 并在 J. Harrison 和 S. Pliska 的著作 [215] 中首次应用于套利理论.

蕴涵关系 {2} 可恰好如同离散时间情形下那样证明 (参见第五章 §4b 中的引理证明).

关于完全市场的具体例子参见以后的第 4 节和第 5 节.

3. 注 1. 在不完全无套利市场上的 (局部) 鞅的 “X-可表示性” 问题例如在 [9] 中考察.

注 2. 余下的问题是在我们的叙述中经常提到的套利, (局部) 鞅测度和完全性等概念的相互关系问题.

强调以下这点是重要的: 这些概念中的每一个最初都可相互独立地陈述. 这时, 无论是套利, 还是完全性, 都是对原来的 (“物理”) 概率测度来定义的, 与所涉及的鞅测度毫不相干.

在离散时间和有限种资产的情形 ($N < \infty$, $d < \infty$) 下, 无套利原来有简单的等价特征 (“第一基本定理”): 鞅测度存在 ($\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$), 而在这样的无套利模型中, 完全性原来等价于鞅测度的唯一性 ($|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1$) (“第二基本定理”).

然而, 如果考虑更一般的模型, 那么完全可能无套利而不存在鞅测度, 正如第六章 §2b 中所引入的例 1 所指出.

同样正确的是, 不应该有这样的感觉 (与 "第二基本定理" 相联系): 关于完全性不能不说无套利机会, 或者不能不说具有鞅测度, 而在逻辑上完全可能的是例如:

a) 完全性既可在无套利模型上成立, 也可在套利模型上成立;

b) 完全性可在不唯一的 "经典" (即非负) 鞅测度的情形下成立;

c) 完全性可在无 "经典" 鞅测度、但有唯一的 "非经典" (即带符号的) 鞅测度的情形下成立.

3. 半鞅和鞅测度

§3a. 半鞅的典则表示. 随机测度. 可料特征的三元组

1. 在第二章 §1b 和第五章 §3e 中提到过离散时间情形下的典则表示.

我们重提这种表示的要点.

设 $H = (H_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 为随机序列, $h_n = \Delta H_n$ $(= H_n - H_{n-1})$ 对于 $n \geqslant 1$ 成立, 而 $g = g(x)$ 是有界 "截断" 函数, 即在零邻域中等于 x 和有紧支集的函数 (经常运用的函数 $g(x) = xI(|x| \leqslant 1)$). 于是, 由于

$$H_n = H_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k = H_0 + \sum_{k=1}^{n}(h_k - g(h_k)) + \sum_{k=1}^{n} g(h_k), \tag{1}$$

故由 Doob 分解和函数 $g(h_k)$ 的有界性, 由 (1) 我们求得

$$\begin{aligned} H_n =& H_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}[g(h_k) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}] \\ &+ \sum_{k=1}^{n}[g(h_k) - \mathsf{E}(g(h_k) \,|\, \mathscr{F}_{k-1})] + \sum_{k=1}^{n}[h_k - g(h_k)]. \end{aligned} \tag{2}$$

引入跳跃测度 $\mu_k(A) = I_A(h_k)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $k \geqslant 1$, 以及它们的补偿量 $\nu_k(A) = \mathsf{E}(I_A(h_k) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) = \mathsf{P}(h_k \in A \,|\, \mathscr{F}_{k-1})$, 由关系式 (2), 我们得到

$$\begin{aligned} H_n =& H_0 + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu_k(dx) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} g(x)(\mu_k(dx) - \nu_k(dx)) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} (x - g(x))\mu_k(dx). \end{aligned} \tag{3}$$

类似于在第五章 §3e 所作的那样, 关系式 (3) 可改写为下列紧凑形式:

$$H = g * \nu + g * (\mu - \nu) + (x - g) * \mu. \tag{4}$$

表示式 (4) 称为序列 $H = (H_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的典则表示.

注意到以下这点是有益的: 在 $\mathsf{E}|h_k| < \infty$ $(k \geqslant 1)$ 的情形下, 把函数 $g(x)$ 取为函数 $g(x) = x$, 表示式 (4) 仍然成立. 另一方面, 这也可表达为: 序列 $H = (H_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 的 Doob 分解在这一情形下有下列形式:

$$H = x * \nu + x * (\mu - \nu). \tag{5}$$

2. 现在我们转向在连续时间情形下, 半鞅 $H = (H_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 的典则表示.

设 $g = g(x)$ 为某个截断函数. 令

$$\check{H}(g)_t = \sum_{s \leqslant t} [\Delta H_s - g(\Delta H_s)]. \tag{6}$$

我们察觉, 只要对于某个 $b > 0$, $|\Delta H_s| > b$, 就有 $\Delta H_s - g(\Delta H_s) \neq 0$. 又由于对于半鞅 $\sum_{s \leqslant t} (\Delta H_s)^2 < \infty$ (P-a.s.) 对于每个 $t > 0$ 成立 (参见第三章 §5b 中的 (24) 和 (25)), 从而其实在 (6) 中的求和只包含有限个非零项, 以至过程 $\check{H}(g)$ 是正确定义的有界变差过程.

过程

$$H(g) = H - \check{H}(g) \tag{7}$$

有有界跳跃 $(|\Delta H(g)| \leqslant b)$, 而这就是说, 它是特殊半鞅 (参见第三章 §5b), 即它有典则分解

$$H(g) = H_0 + M(g) + B(g), \tag{8}$$

其中 $B(g) = (B_t(g), \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 为有 $B_0(g) = 0$ 的可料有界变差过程, 而 $M(g) = (M_t(g), \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 为有 $M_0(g) = 0$ 的局部鞅.

由 (7) 和 (8) 我们求得,

$$H = H_0 + M(g) + B(g) + \sum_{s \leqslant \cdot} [\Delta H_s - g(\Delta H_s)]. \tag{9}$$

这个表示式是表示式 (2) 的连续类似. 现在为了由 (9) 得到表示式 (4) 的类似, 我们需要随机测度及其补偿量的概念.

3. 设 $(E, \mathscr{E})$ 为某个可测空间.

定义 1. $\mathbb{R}_+ \times E$ 上的随机测度是指 $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$ 上对于任何 $\omega \in \Omega$ 满足条件 $\mu(\{0\} \times E; \omega) = 0$ 的非负测度族

$$\mu = \{\mu(dt, dx; \omega); \omega \in \Omega\}.$$

例 1. 经典的随机 (同时是整数值的) 测度 μ 的例子为如下定义的泊松测度.

设对于 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$, 有

$$m(A) = \mathsf{E}\mu(A; \omega),$$

并且 $m(A)$ 为 σ-有限 (正) 测度.

我们将假定, 对于任何 $t \in \mathbb{R}_+$ 和满足 $A \subset (t,\infty) \times E$ 的集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$, 测度 $m(A) < \infty$, 并且随机量 $\mu(A,\cdot)$ 不依赖于 σ-代数 $\mathscr{F}_t$.

如果对于任何 $t \in \mathbb{R}_+$, 测度 (强度) m 满足 $m(\{t\} \times E) = 0$, 那么 μ 称为泊松测度. 如果同时, $m(dt,dx) = dt\,F(dx)$, 其中 F 为正 σ-有限测度, 那么 μ 称为齐次泊松测度.

术语 "泊松" 测度由它的性质解释如下.

设 $(A_i)_{i\geqslant 1}$ 为 $\mathbb{R}_+ \times E$ 中有 $m(A_i) < \infty$ 的两两不交的可测集合序列. 于是随机变量 $\mu(A_i)$, $i \geqslant 1$, 相互独立, 而 $\mu(A_i)$ 为有均值 $m(A_i)$ 的泊松分布, 即

$$\mathsf{P}(\mu(A_i) = k) = \frac{e^{-m(A_i)}(m(A_i))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

(参见 [250; 第 II 章, §1c].)

在第三章 §5a 中, 我们引入了 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的子集的两个 σ-代数 $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{P}$, 它们就是所谓可选子集 σ-代数和可料子集 σ-代数①.

在运用 $\mathbb{R}_+ \times E$ 上的整值随机测度时, σ-代数 $\widetilde{\mathscr{O}} = \mathscr{O} \otimes \mathscr{E}$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$ 起着重要的作用, 它们也称为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E$ 的可选子集 σ-代数和可料子集 σ-代数.

如果 $W = W(t,\omega,x)$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E$ 上的可选函数, 而 μ 为随机测度, 那么我们将以 $W * \mu = ((W * \mu)_t(\omega), \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 表示如下定义的随机过程:

$$(W * \mu)_t(\omega) = \int_{(0,t]\times E} W(s,\omega,x)\mu(ds,dx;\omega), \tag{10}$$

而积分对于每个 $\omega \in \Omega$ 理解为 Lebesgue-Stieltjes 积分, 并且假定

$$\int_{(0,t]\times E} |W(s,\omega,x)|\mu(ds,dx;\omega) < \infty, \quad t > 0. \tag{11}$$

定义 2. 随机测度 μ 称为可选 (可料), 是指过程 $W * \mu$ 对于每个可选 (可料) 函数 $W = W(t,\omega,x)$ 可选 (可料).

定义 3. 可料测度 μ 称为 $\widetilde{\mathscr{P}}$-σ-有限, 是指存在集合 $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E$ 的 $\widetilde{\mathscr{P}}$-可测分划 $(A_n)_{n\geqslant 1}$, 使得量 $(I_{A_n} * \mu)_\infty$ 中的每一个可积.

下列定理是在关于 Doob-Mayer 分解的推论 2 (第三章 §5b) 中陈述的断言的直接推广.

① 在第三章 §5a 中, 作者其实只引进了可料子集 σ-代数 $\mathscr{P}$, 而并没有引进可选子集 σ-代数 $\mathscr{O}$. 这两个 σ-代数的区别在于轨线的左、右连续性. 由于 "常设" 条件保证了轨线的右连续性, 从而在常设条件下, 已经没有必要再引进可选子集 σ-代数. —— 译者注

定理 1. 设 μ 为 $\widetilde{\mathscr{P}}$-σ-有限随机测度.

存在精确到 P-无区别为唯一的所谓测度 μ 的补偿量的可料随机测度 ν，满足下列两个等价条件中的任何一个:

a) $\mathsf{E}(W*\nu)_\infty = \mathsf{E}(W*\mu)_\infty$ 对于任何 $\mathbb{R}_+\times\Omega\times E$ 上的非负 $\widetilde{\mathscr{P}}$-可测函数 W 成立;

b) 对于任何 $\mathbb{R}_+\times\Omega\times E$ 上的非负 $\widetilde{\mathscr{P}}$-可测函数 W, 过程 $|W|*\mu$ 为局部可积, 过程 $|W|*\nu$ 也局部可积以及 $W*\mu - W*\nu$ 为局部鞅.

证明以及随机测度及其补偿量的各种性质参见 [250; 第 II 章] 或者 [304; 第 3 章].

注. 补偿量测度 ν 的直观性质之一如下. 设集合 $A\in\mathscr{E}$. 于是有 $X_0=0$ 的过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 以及

$$X_t = \mu((0,t]\times A;\omega) - \nu((0,t]\times A;\omega),\quad t>0$$

为局部鞅, 与此相联系的是 $\mu-\nu$ 称为 (随机) 鞅测度.

例 2. 对于在例 1 中引入的泊松随机测度 μ 来说, 其补偿量 ν 重合于强度测度 m.

4. 我们转向 "$\widetilde{\mathscr{P}}$-可测函数 $W=W(t,\omega,x)$ 关于鞅测度 $\mu-\nu$ 的随机积分 $W*(\mu-\nu)$" 的概念.

如果 $|W|*\mu\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$, 那么对应于定理 1, 过程 $|W|*\nu\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$, 并且于是可自然地按定义令

$$W*(\mu-\nu) = W*\mu - W*\nu. \tag{12}$$

不难确立, 这样定义的过程 $W*(\mu-\nu)=(W*(\mu-\nu)_t)_{t\geqslant 0}$ 具有下列两个性质:

a) 它是纯间断局部鞅 (参见第三章 §5b);

b) 其 "跳跃"

$$\Delta(W*(\mu-\nu))_t = \widetilde{W}_t, \tag{13}$$

其中

$$\widetilde{W}_t = \int W(t,\omega,x)\mu(\{t\}\times dx;\omega) - \int W(t,\omega,x)\nu(\{t\}\times dx;\omega).$$

这一性质表明下列定义的自然性 (比较 [250; 第 II 章, §1d], [304; 第 3 章, §5]).

定义 4. $\widetilde{\mathscr{P}}$-可测函数 $W=W(t,\omega,x)$ 关于鞅测度 $\mu-\nu$ 的随机积分 $W*(\mu-\nu)$ 理解为间断局部鞅 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, 它使得过程 $\Delta X=(\Delta X_t)_{t\geqslant 0}$ 和 $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ 无区别.

我们在上面看到, 如果测度 μ 的补偿量 ν 满足 $|W|*\nu\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$ (或者, 等价的 $|W|*\mu\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$), 那么可取过程 $W*\mu - W*\nu$ 作为纯间断局部鞅 X.

然而, 确保存在这样的满足 $\Delta X = \widetilde{W}$ 的过程 X 的条件 $|W| * \nu \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ 可以减弱.

为此我们引入某些记号, 并且只限于引进结果, 细节可在上面提到的专著 [250] 和 [304] 中找到.

设

$$
\begin{aligned}
a_t(\omega) &= \nu(\{t\} \times E; \omega), \\
q(\omega, B) &= \sum_{s \in B} I(a_s(\omega) > 0)(1 - a_s(\omega)), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \\
\widehat{W}_t(\omega) &= \int_E W(t, \omega, x)\nu(\{t\} \times dx; \omega).
\end{aligned}
$$

我们将假定, 对于任何有限 Markov 时刻 $\tau(\omega)$,

$$
\int_E |W(\tau(\omega), \omega, x)|\nu(\{\tau(\omega)\} \times dx; \omega) < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}),
$$

并且令

$$
G(W) = \frac{(W - \widehat{W})^2}{1 + |W - \widehat{W}|} * \nu + \frac{\widehat{W}^2}{1 + |\widehat{W}|} * q. \tag{14}
$$

定理 2. 设 $\widetilde{\mathscr{P}}$-可测函数 $W = W(t, \omega, x)$ 满足

$$
G(W) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}. \tag{15}
$$

那么存在唯一 (精确到随机无区别) 纯间断局部鞅, 记为 $W * (\mu - \nu)$, 满足

$$
\Delta(W * (\mu - \nu)) = \widetilde{W}.
$$

推论. 设 $\widehat{W} = 0$. 于是, 如果

$$
\frac{W^2}{1 + |W|} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}},
$$

那么关于鞅测度 $\mu - \nu$ 的随机积分 $W * (\mu - \nu)$ (作为满足 $\Delta(W * (\mu - \nu)) = \int W(t, \omega, x)\mu(\{t\} \times dx; \omega)$ 的纯间断局部鞅) 有定义.

注. 设 $\widehat{W} = 0$. 那么

$$
[W * (\mu - \nu), W * (\mu - \nu)] = W^2 * \mu, \tag{16}
$$

它由注意到下式而得:

$$
[W * (\mu - \nu), W * (\mu - \nu)]_t = \sum_{0 < s \leqslant t} (\Delta(W * (\mu - \nu))_s)^2 = (W^2 * \mu)_t.
$$

由所引入的等式 (16), 我们显然得到, 可料二次变差

$$\langle W*(\mu-\nu), W*(\mu-\nu)\rangle = W^2*\nu.$$

5. 随机 (同时是整值) 测度的特殊情形是有右连续和带左极限的轨线的过程 (特别是半鞅) $H=(H_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的跳跃测度:

$$\mu^H((0,t]\times A;\omega)=\sum_{0<s\leqslant t} I_A(\Delta H_s(\omega)),$$

其中 $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

这样在 $\mathbb{R}_+\times E$ $(E=\mathbb{R}\setminus\{0\})$ 上定义的随机测度 μ^H 为 $\widetilde{\mathscr{P}}$-σ-有限, 因而, 根据上面所陈述的定理, 对于测度 μ^H 可定义它的补偿量 ν^H.

我们再转向典则分解 (9).

借助随机跳跃测度 μ^H, 在 (9) 的右端中的后一项, 可记作下列形式:

$$\sum_{s\leqslant\cdot}[\Delta H_s - g(\Delta H_s)] = (x-g(x))*\mu^H.$$

在第三章 §5b (第 6 点) 中, 我们已经注意到, 每个局部鞅可表示为 (唯一的) 连续的和纯间断的局部鞅之和. 因此, (9) 中的局部鞅 $M(g)$ 可表示为下列形式:

$$M(g)_t = M(g)_0 + M(g)_t^c + M(g)_t^d, \tag{17}$$

其中 $M(g)^c$ 为连续成分, 而 $M(g)^d$ 为纯间断成分.

连续局部鞅 $M(g)^c$ 其实并不依赖于 g, 并且正如在第三章 §5b (第 6 点) 中所注意到, 对它通常运用记号 H^c.

至于是纯间断局部鞅的纯间断成分 $M(g)^d$, 则它可表示为下列形式:

$$M(g)_t^d = \int_{(0,t]\times\mathbb{R}} g(x)d(\mu^H-\nu^H). \tag{18}$$

为了确立这一表示式成立, 需要断定, 首先是, 函数 $G(g)\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$, 其次是, 位于 (18) 左右端局部鞅的跳跃相重合. 在完全一般的条件下, 这在 [250; 第 II 章 §2c] 和 [304; 第 3 章, §5] 中证明. 这里只讨论一个特殊情形.

如果假定, $\nu^H(\{t\}\times E;\omega)=0$, 那么

$$G(g)=\frac{g^2}{1+|g|}*\nu^H$$

和这个过程的局部可积性由下列事实得到: $g=g(x)$ 为截断函数和对于任何半鞅 H 有 $(x^2\wedge 1)*\nu^H\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$. 从而, 在所考察的情形下, (18) 中的 "积分" 有定义.

又, $\Delta M(g)^d = \Delta M(g) = g(\Delta H) - \Delta B(g)$, 其中

$$\Delta B(g)_t = \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu^H(\{t\}\times dx;\omega) \tag{19}$$

([250]; 第 II 章, 2.14]). 因此, 在 $\nu^H(\{t\}\times E;\omega) = 0$ 的假定下, 我们看到, $\Delta B(g)_t = 0$, 而这就是说, $\Delta M(g)^d = g(\Delta H)$. 但 $\Delta g * (\mu^H - \nu^H)$ 也等于 $g(\Delta H)$, 因而, (18) 的左右端中的纯间断局部鞅相重合.

这样, 由 (9), 并考虑 (17)–(18), 我们得到下列表示式:

$$H = H_0 + B(g) + H^c + g*(\mu^H - \nu^H) + (x - g(x)) * \mu^H, \tag{20}$$

它称为半鞅 H 的典则表示.

把表示式 (20) 与离散情形下的表示式 (4) 相比较, 我们看到, 在外表上, 它们首先不同于在 (20) 中有连续成分 H^c.

6. 在典则表示式 (20) 中, 有两个 "可料" 成分: $B(g)$ 和 ν^H. 半鞅 H 的第三个重要特征是 "角括号" $\langle H^c\rangle$, 它是连续局部平方可积鞅 H^c 的 (可料) 成分.

定义 5. 设 $H = (H_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为半鞅, 而 $g = g(x)$ 为某个截断函数. 我们记 $B = B(g)$, $C = \langle H^c\rangle$, $\nu = \nu^H$.

编组

$$\mathbb{T} = (B, C, \nu) \tag{21}$$

称为半鞅 H 的可料特征的三元组.

强调以下这点是重要的: 在三元组 $\mathbb{T}$ 中的成分 C 和 ν 不依赖于 "截断" 函数 $g = g(x)$ 的选择. 但特征 B 依赖于 g. 这时, 如果 g 和 g' 为两个不同的 "截断" 函数, 那么

$$B(g) - B(g') = (g - g') * \nu.$$

7. 我们引入半鞅的某些可表达为可料特征 B, C 和 ν 的性质.

a) 如果 H 为半鞅, 那么

$$(x^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\text{loc}},$$

即过程 $\left(\int_{(0,t]\times\mathbb{R}} (x^2\wedge 1)d\nu\right)_{t\geqslant 0}$ 局部可积. 换句话说, 存在 Markov 时刻序列 τ_n, $\tau_n \uparrow \infty$ (P-a.s.), 使得

$$\mathsf{E}\int_{(0,t]\times\mathbb{R}} (x^2\wedge 1)d\nu < \infty.$$

b) 半鞅 H 为特殊鞅 (特别是, 局部鞅) 当且仅当

$$(x^2 \wedge |x|) * \nu \in \mathscr{A}_{\text{loc}}.$$

c) 半鞅 H 为局部平方可积半鞅当且仅当

$$x^2 * \nu \in \mathscr{A}_{\text{loc}}.$$

性质 a) 的证明基础在于下列事实: 对于半鞅有 $\sum_{s\leqslant t}(\Delta H_s)^2 < \infty$ (P-a.s.), $t > 0$; 参见第三章 §5b 中的注 3. 关于性质 b) 和 c) 的证明参见 [250; 第 II 章, §2b].

d) 如果 $H = H_0 + N + A$ 为特殊半鞅 H 的典则分解, 那么

$$H = H_0 + H^c + X * (\mu - \nu) + A. \tag{22}$$

换句话说, 对于特殊半鞅 H 来说, 在其典则表示式 (20) 中, 可取 $g(x) = x$.

e) 我们把半鞅 H 的可料特征的三元组 (对于每个 $\theta \in \mathbb{R}$) 与下列有界变差可料过程联系起来:

$$\Psi(\theta)_t = i\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}C_t + \int \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta g(x)\right)\nu((0,t] \times dx;\omega), \tag{23}$$

它称为 (过程 H 的) 累积量; 比较第三章 §1b.

设

$$G(\theta) = \mathscr{E}(\Psi(\theta)), \tag{24}$$

其中 $\mathscr{E}(\Psi(\theta)) = (\mathscr{E}(\Psi(\theta)))_{t\geqslant 0}$ 为由 $\Psi(\theta)$ 所构造的随机指数 (参见第三章 §5c 中的例 1):

$$\mathscr{E}(\Psi(\theta))_t = e^{\Psi(\theta)_t} \prod_{0<s\leqslant t} (1 + \Delta\Psi(\theta)_s)e^{-\Delta\Psi(\theta)_s}. \tag{25}$$

定理 3. 设 $\Delta\Psi(\theta)_t \neq -1$, $t > 0$. 那么下列断言等价:

1) H 为有特征 (B, C, ν) 的半鞅;

2) 对于任何 $\theta \in \mathbb{R}$, 过程

$$\frac{e^{i\theta H_t}}{G(\theta)_t}, \quad t \geqslant 0 \tag{26}$$

为局部鞅.

(其证明基于半鞅的 Itô 公式, 参见 [250; 第 II 章, §2d].)

f) 在半鞅类中, 下列过程 $H = (H_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 构造最简单, 它同时还是独立增量过程. 其独特的性质在于, 对于它来说三元组 $\mathbb{T} = (B, C, \nu)$ 是非随机的. 换句话说, $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$, $C = (C_t)_{t\geqslant 0}$ 和补偿测度 $\nu = \nu(dt, dx)$ 不依赖于 ω (参见 [250; 第 II 章, §4c]).

因此, 对于这样的过程, 累积量 $\Psi(\theta)$ 不依赖于 ω, 并且如果 $\Delta\Psi(\theta) \neq -1$ (它对应过程 $H = (H_t)$ 按概率的连续性), 那么由 (22) 我们得到 *Lévy-Khintchine* 公式

$(H_0 = 0)$:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}e^{i\theta H_t} &= e^{\Psi(\theta)_t} \\ &= \exp\left\{i\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}C_t + \int \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta g(x)\right)\nu((0,t]\times dx)\right\}.\end{aligned} \tag{27}$$

在 Lévy 过程情形下,

$$B_t = b\cdot t, \quad C_t = c\cdot t, \quad \nu(dt,dx) = dt\cdot\nu(dx),$$

以及

$$\mathsf{E}e^{i\theta H_t} = e^{t\psi(\theta)},$$

其中

$$\psi(\theta) = i\theta b - \frac{\theta^2}{2}c + \int \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta g(x)\right)\nu(dx). \tag{28}$$

(除了 $\Psi(\theta)_t$ 以外, 函数 $\psi(\theta)$ 也称为累积量.)

测度 $\nu = \nu(dx)$ 满足条件

$$\nu(\{0\}) = 0, \quad (x^2\wedge 1)*\nu < \infty, \tag{29}$$

并称为*Lévy* 测度. (比较第三章 §1b.)

g) 我们考察 Lévy 过程的下列特殊情形: "带漂移和泊松跳跃的布朗运动".

更确切地说, 设

$$H_t = mt + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t}\xi_k, \tag{30}$$

其中 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ 是维纳过程 (布朗运动), $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 为有分布函数 $F(x) = \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant x)$ 的独立同分布随机变量, $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ 为有参数 $\lambda > 0$ 的标准泊松过程 ($\mathsf{E}N_t = \lambda t$). 假定 W, N 和 $(\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 相互独立.

下列关系式链容易导出典则表示式, 并由此也可求得可料特征的三元组:

$$\begin{aligned}H_t &= mt + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t}\xi_k = mt + \sigma W_t + \int_0^t\int x\,d\mu \\ &= \left(mt + \int_0^t\int g(x)d\nu\right) + \left(\sigma W_t + \int_0^t\int g(x)d(\mu-\nu)\right) \\ &\quad + \int_0^t\int (x - g(x))\,d\mu \\ &= t\left(m + \lambda\int g(x)F(dx)\right) + \left(\sigma W_t + \int_0^t\int g(x)d(\mu-\nu)\right) \\ &\quad + \int_0^t\int (x-g(x))d\mu.\end{aligned}$$

由此可见,

$$B(g)_t = t\left(m + \lambda \int g(x)F(dx)\right),$$

$$C_t = \sigma^2 t,$$

$$d\nu = \lambda dt F(dx).$$

h) 离散时间随机序列 $H = (H_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 可自然地置入连续时间模型 (参见第二章 §1f). 如果 $H_n = H_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} h_k$, 其中 $h_k = \Delta H_k$, 那么三元组 $\mathbb{T} = (B(g), C, \nu)$ 有下列结构:

$$B(g)_t = \sum_{1\leqslant k\leqslant [t]} \mathsf{E}[g(h_k) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}],$$

$$C_t = 0,$$

$$d\nu((0,t]\times A;\omega) = \sum_{1\leqslant k\leqslant [t]} \mathsf{P}(h_k \in A \,|\, \mathscr{F}_{k-1}),$$

其中 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

§3b. 扩散模型中的鞅测度的构造. Girsanov 定理

1. §§2b, c 中有关无套利机会的充要条件的结果表明, 对于套利理论相当重要的是能求出等价于原来概率测度的鞅测度或局部鞅测度.

广泛流传的构造鞅测度的方法之一是基于 *Girsanov* 定理及其各种推广的方法. 另一种构造这种测度的方法是基于长期来在精算科学中众所周知的 *Esscher* 变换的方法 (参见后面的 §3c).

Girsanov 在其著名的著作 [183] 中所给出的 Girsanov 定理的陈述已经在第三章 §3e 中引入. 本节中将引入其证明, 考察某些推广, 并给出适用于扩散过程和 Itô 过程的概率测度的绝对连续性和等价性的判别准则.

2. 我们考察给定在渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, 它是有下列微分的 *Itô* 过程 (参见第三章 §3d):

$$dX_t = a_t(\omega)dt + dB_t, \qquad x_0 = 0, \tag{1}$$

其中 $a = (a_t(\omega), \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为某个满足下列条件的过程:

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t |a_s(\omega)| ds < \infty\right) = 1, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

而 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为标准布朗运动.

现在假设 $\widetilde{a} = (\widetilde{a}_t(\omega), \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为另一个过程, 并且

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t (a_s(\omega) - \widetilde{a}_s(\omega))^2\, ds < \infty\right) = 1, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

在这一假定下, 定义过程 $Z = (Z_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (比较第三章 §3d 中的 (21)), 其中

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t (\widetilde{a}_s - a_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\widetilde{a}_s - a_s)^2 ds\right\} \tag{4}$$

为非负局部鞅 (其局部化时刻例如为 $\tau_k = \inf\left\{t\colon \int_0^t (\widetilde{a}_s - a_s)^2 ds \geqslant k\right\}, k \geqslant 1$).

由 Fatou 引理得到, 这个过程为 (非负) 上鞅, 而这是说, 根据 Doob 收敛性定理 (参见第三章 §3b), $\lim\limits_{t\to\infty} Z_t\ (= Z_\infty)$ 以概率 1 存在且有限.

设

$$\mathsf{E} Z_\infty = 1. \tag{5}$$

(这等价于假定族 $\{Z_t, t \geqslant 0\}$ 的一致可积性.) 于是在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上可定义新的概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 满足

$$d\widetilde{\mathsf{P}} = Z_\infty d\mathsf{P}. \tag{6}$$

定理 1 (I. V. Girsanov, [183]). 下式定义的过程 $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为标准布朗运动:

$$\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t (\widetilde{a}_s - a_s)ds, \tag{7}$$

并且

$$dX_t = \widetilde{a}_t(\omega)dt + d\widetilde{B}_t. \tag{8}$$

证明在第 3 点中导出. 现在提出某些推论和注记.

推论 1. 设

$$X_t = B_t - \lambda\int_0^t a_s ds, \tag{9}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, 并且

$$Z_t^\lambda = \exp\left(\lambda\int_0^t a_s dB_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t a_s^2 ds\right). \tag{10}$$

假定 $\mathsf{E} Z_\infty^\lambda = 1$, 并令 $d\widetilde{\mathsf{P}}^\lambda = Z_\infty^\lambda d\mathsf{P}$. 那么关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^\lambda$, 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 为标准布朗运动.

如果 $\mathsf{E} Z_T^\lambda = 1$ 对于某个有限 T 成立, 那么关于满足 $d\widetilde{\mathsf{P}}_T^\lambda = Z_T^\lambda d\mathsf{P}_T$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^\lambda$, 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 将是时间区间 $[0, T]$ 上的标准布朗运动, 这里 $\mathsf{P}_T = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_T$.

推论 2. 设 $\tau = \tau(\omega)$ 为有限 Markov 时刻, 并且

$$\mathsf{E}\exp\left(\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau\right) = 1. \tag{11}$$

令 $d\widetilde{\mathsf{P}}^{\lambda} = Z_{\tau}^{\lambda} d\mathsf{P}$, 其中 $Z_{\tau}^{\lambda} = \exp\left(\lambda B_{\tau} - \dfrac{\lambda^2}{2}\tau\right)$. 那么关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}^{\lambda}$, 下式定义的过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 为标准布朗运动:

$$X_t = B_t - \lambda \cdot (t \wedge \tau).$$

注 1. 在第三章 §3e 中引入的 Girsanov 定理的陈述是在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 和 $\mathsf{E} Z_T = 1$ 的假定下给出的. 在现在所考察的 $0 \leqslant t < \infty$ 的情形下, 这一结果被附加这样的要求: 如果 $a_t = 0$ 和 $\widetilde{a}_t = 0$ 对于 $t > T$ 成立.

注 2. 性质 (11) 满足的已知充分条件为 (参见例如 [288], [303], [402]):

$$\mathsf{E} e^{\frac{1}{2}\tau} < \infty \quad (\text{“Novikov 条件”}) \tag{12}$$

和

$$\sup_{t \geqslant 0} \mathsf{E} e^{B_{\tau \wedge t}} < \infty \quad (\text{“Kazamaki 条件”}). \tag{13}$$

由于 $\sup\limits_{t \geqslant 0} \mathsf{E} e^{B_{\tau \wedge t}} \leqslant (\mathsf{E} e^{\frac{1}{2}\tau})^2$, 故条件 (13) 弱于条件 (12).

如果定义 $\tau = \inf\{t\colon B_t = 1\}$, 那么将有 $\mathsf{E}\sqrt{\tau} = \infty$, 以及更有 $\mathsf{E} e^{\frac{1}{2}\tau} = \infty$. 这样一来, 这里的条件 (12) 不满足. 然而, 条件 (13) 满足, 并且对于这个时刻:

$$\mathsf{E} \exp\left(B_{\tau} - \frac{1}{2}\tau\right) = 1.$$

在所考察的停时 τ 关于由布朗运动生成的流 $(\mathscr{F}_t^B)_{t \geqslant 0}$ 为 Markov 时刻的情形下, 条件 (12) 和 (13) 可减弱.

定理 2 ([282]). 设 $\varphi = \varphi(t)$ 为满足下列条件的非负可测函数:

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, (B_t - \varphi(t)) = +\infty \ \ (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \tag{14}$$

而 τ 为关于流 $(\mathscr{F}_t^B)_{t \geqslant 0}$ 的 Markov 时刻.

条件

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E} \exp\left\{\frac{1}{2}(\tau \wedge \sigma) - \varphi(\tau \wedge \sigma)\right\} < \infty \tag{15}$$

或者条件

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E} \exp\left\{\frac{1}{2} B_{\tau \wedge \sigma} - \varphi(\tau \wedge \sigma)\right\} < \infty \tag{16}$$

中的任何一个是满足等式

$$\mathsf{E} \exp\left\{B_{\tau} - \frac{1}{2}\tau\right\} = 1 \tag{17}$$

的充分条件, 这里 $\mathfrak{M}_0^N$ 为使得 $\mathsf{P}(0 \leqslant \sigma \leqslant N) = 1$ 的 (关于 $(\mathscr{F}_t^B)_{t \geqslant 0}$ 的) Markov 时刻 σ 的类.

注 3. 在 (10) 中所定义的过程 $Z^\lambda = (Z_t^\lambda)_{t\geqslant 0}$ 的情形下, 对应的 "Novikov 条件" 和 "Kazamaki 条件" 陈述为下列形式:

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty a_s^2 ds\right\} < \infty, \tag{18}$$

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty a_s dB_s\right\} < \infty. \tag{19}$$

关于证明以及对形为

$$Z_t = \exp\left\{L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right\} \tag{20}$$

的过程 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 的推广参见 [288], [303] 和 [402], 这里 $L = (L_t)_{t\geqslant 0}$ 为连续局部鞅 (诸如过程 $L_t = \int_0^t a_s(\omega)dB_s$, $t \geqslant 0$).

3. Girsanov 定理的证明. 正如在离散时间情形下那样 (参见第五章 §3b), 只需验证, 对于满足 $0 \leqslant s \leqslant t$ 的 t 和 $\theta \in \mathbb{R}$ (P-a.s.) 有

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left[e^{i\theta(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s)} \mid \mathscr{F}_s\right] = e^{-\frac{\theta^2}{2}(t-s)}. \tag{21}$$

为此, 记 $\alpha_s = \widetilde{a}_s - a_s$, $\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t \alpha_s ds$,

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \alpha_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2 ds\right)$$

(参见 (7) 和 (10)).

根据 "Bayes 公式" (参见第五章 §3a),

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left[e^{i\theta(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s)} \mid \mathscr{F}_s\right] = \frac{1}{2}\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\left[Z_t e^{i\theta(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s)} \mid \mathscr{F}_s\right], \tag{22}$$

因而需要指出, (22) 的右端等于 $e^{-\frac{\theta^2}{2}(t-s)}$.

为简单起见, 我们考察 $s = 0$ 的情形.

设 $U_t = e^{i\theta\widetilde{B}_t}$. 于是根据 Itô 公式 (第三章 §5c), 我们求得

$$d(Z_tU_t) = Z_tU_t(\alpha_t + i\theta)dB_t - Z_tU_t\frac{\theta^2}{2}dt,$$

即

$$Z_tU_t = 1 + \int_0^t Z_sU_s(\alpha_s + i\theta)dB_s - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t Z_sU_s dt.$$

由此利用类似与在 Lévy 定理证明中所运用的讨论, 对于 $\mathsf{E}_{\mathsf{P}}Z_tU_t$, 我们得到方程

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}}Z_tU_t = -\frac{\theta^2}{2}\int_0^t \mathsf{E}_{\mathsf{P}}Z_sU_s ds,$$

并由此我们断定

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} e^{i\theta \widetilde{B}_t} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}} Z_t U_t = e^{-\frac{\theta^2}{2} t}.$$

公式 (21) 用类似的方式来验证, 它也证明了 (7) 中定义的过程 $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ 是标准布朗运动. 关系式 (8) 由 (1) 和 (7) 来得到.

定理得证.

4. 这样, 如果按测度 P 过程 X 有微分 $dX_t = a_t(\omega)dt + dB_t$, 那么按 (6) 中定义的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 这个过程有微分 $dX_t = \widetilde{a}_t(\omega)dt + d\widetilde{B}_t$, 其中 $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ 是按测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的布朗运动.

注意到以下这点是重要的: 如果所有讨论仅对时间区间 $[0,T]$ 来进行, 其中 T 可能是 Markov 时刻, 那么取代条件 $\mathsf{E}Z_\infty = 1$ 的应该是只要求满足条件 $\mathsf{E}Z_T = 1$.

注 4. 在 Girsanov 定理中设 $\widetilde{a}_t \equiv 0$, 即

$$\widetilde{B}_t = B_t + \int_0^t a_s ds$$

和

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t a_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_s^2 ds\right\}.$$

于是, 如果 $\mathsf{E}Z_T = 1$, 那么按满足 $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, 过程

$$X_t = B_t + \int_0^t a_s ds$$

重合于 $\widetilde{B}_t$, 并且是布朗运动 (比较第五章 §3b), 即它也是鞅. 这就说明了为什么测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 在所考察的情形下, 通常称为 "鞅" 测度.

5. 设 X 为有微分 (1) 的 *Itô* 过程, 而 $\mu^X = \mathrm{Law}(X \mid \mathsf{P})$ 为这一过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 在连续函数的 (渗透) 空间 $(C, \mathscr{C}, (\mathscr{C}_t)_{t\geqslant 0})$ 中的概率分布.

Girsanov 定理看来是研究下列问题的适当的工具: 什么条件下测度 μ^X 的局限 $\mu_t^X = \mu^X \mid \mathscr{C}_t$ 对于测度 $\mu_t^B = \mu^B \mid \mathscr{C}_t$ 来说是绝对连续的、等价的或者是奇异的?

测度 μ^B 无非就是维纳测度 (第三章 §3a), 因而, 它涉及过程 X 的测度 μ^X 关于维纳测度 μ^B 的性质问题. 在 $\mu_t^X \ll \mu_t^B$ 或者 $\mu_t^B \ll \mu_t^X$ 的情形下, 有意义的是还要给出 Radon-Nikodym 导数 $\dfrac{d\mu_t^X}{d\mu_t^B}$ 和 $\dfrac{d\mu_t^B}{d\mu_t^X}$ 的 "显式".

这些问题在 Itô 过程的情形下在专著 [303; 第 7 章] 中以及在半鞅情形下在 [250; 第 III–V 章] (通过引入 *Hellinger* 距离和 *Hellinger* 过程) 中有足够详细的研究. 因此, 这里只限于某些结果.

我们将考察时间区间 $[0,T]$.

假定

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T a_s^2(\omega)ds < \infty\right) = 1. \tag{23}$$

于是定义过程 $Z = (Z_t)_{t\leqslant T}$ 为

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t a_s(\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_s^2(\omega)ds\right). \tag{24}$$

定理 3. 如果 $\mathsf{E}Z_T = 1$, 那么

$$\mu_T^X \sim \mu_T^B, \tag{25}$$

以及

$$\frac{d\mu_t^B}{d\mu_t^X}(X(\omega)) = \mathsf{E}\left(\exp\left[-\int_0^T a_s(\omega)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^T a_s^2(\omega)ds\right] \Big| \mathscr{F}_T^X\right)(\omega), \tag{26}$$

其中 $\mathscr{F}_T^X = \sigma(\omega\colon X_s(\omega), s \leqslant T)$.

证明. 令 (比较 (6)) $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}_T$ 来定义测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, 其中 $\mathsf{P}_T = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_T$. 根据 Girsanov 定理, 过程 $X = (X_t)_{t\leqslant T}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 为布朗运动, 因而,

$$\begin{aligned}
\mu_T^B(A) = \widetilde{\mathsf{P}}_T(X \in A) &= \int_{\{\omega\colon X(\omega)\in A\}} Z_T(\omega)\mathsf{P}(d\omega) \\
&= \int_{\{\omega\colon X(\omega)\in A\}} \mathsf{E}[Z_T \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega)\mathsf{P}(d\omega) \\
&= \mathsf{E}\left(I_A(X(\omega)) \cdot \mathsf{E}[Z_T \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega)\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

设 $\Phi_T(x)$ 为 $\mathscr{C}_T$-可测函数, 满足 $\mathsf{E}[Z_T \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega) = \Phi_T(X(\omega))$. 于是由 (27) 根据 Lebesgue 积分号下变量替换公式 (参见例如, [439; 第 II 章 §6]), 有

$$\mu_T^B(A) = \int_{\{\omega\colon X(\omega)\in A\}} \Phi_T(X(\omega))\mathsf{P}(d\omega) = \int_A \Phi_T(x)\mu_T^X(dx),$$

而这就是说, $\mu_T^B \ll \mu_T^X$. 这时,

$$\frac{d\mu_t^B}{d\mu_t^X}(x) = \Phi_T(x), \tag{28}$$

以及

$$\frac{d\mu_T^B}{d\mu_T^X}(X(\omega)) = \mathsf{E}[Z_T \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega). \tag{29}$$

现在确立 $\mu_T^X \ll \mu_T^B$. 为此我们察觉, 由于 $\mathsf{P}_T(Z_T(\omega) > 0) = 1$, 故 $\mathsf{P}_T \ll \widetilde{\mathsf{P}}_T$ (比较第五章 §3a) 以及

$$\frac{d\mathsf{P}_T}{d\widetilde{\mathsf{P}}_T}(\omega) = Z_T^{-1}(\omega). \tag{30}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mu_T^X(A) &= \mathsf{P}_T(X(\omega)\in A) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(I_A(X(\omega))Z_T^{-1})\\ &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(I_A(X(\omega))\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(Z_T^{-1}\,|\,\mathscr{F}_T^X\right)(\omega)\right)\\ &= \widetilde{\Phi}_T(x)\mu_T^X(dx),\end{aligned}\tag{31}$$

其中 $\widetilde{\Phi}_T(x)$ 为 $\mathscr{C}_T$-可测泛函, 满足 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(Z_T^{-1}\,|\,\mathscr{F}_T^X)(\omega) = \widetilde{\Phi}_T(X(\omega))$.

由 (31) 断定, $\mu_T^X \ll \mu_T^B$ 以及

$$\frac{d\mu_t^X}{d\mu_t^B}(X(\omega)) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left[Z_T^{-1}\,|\,\mathscr{F}_T^X\right](\omega).\tag{32}$$

6. 我们转向 Itô 过程 X 为扩散型过程的特殊情形, 即在 (1) 中设 $a_t(\omega) = A(t,X(\omega))$, 其中 $A(t,x)$ 为不可预见泛函 ($A(t,x)$ 关于 (t,x) 可测, 且对于每个 t, 泛函 $A(t,x)$ 关于 x 为 $\mathscr{C}_t$-可测).

当

$$dX_t = A(t,X)dt + dB_t\tag{33}$$

的情形下, 由定理 3 导出下列结果.

定理 4. 设

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t,X)dt<\infty\right) = 1,\tag{34}$$

以及

$$\mathsf{E}\exp\left(-\int_0^T A(t,X)dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T A^2(t,X)dt\right) = 1,\tag{35}$$

或者等价的

$$\mathsf{E}\exp\left(-\int_0^T A(t,X)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T A^2(t,X)dt\right) = 1.\tag{36}$$

那么 $\mu_T^X \sim \mu_T^B$,

$$\frac{d\mu_T^B}{d\mu_T^X}(X) = \exp\left(-\int_0^T A(t,X)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T A^2(t,X)dt\right),\tag{37}$$

以及

$$\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^B}(X) = \exp\left(\int_0^T A(t,X)dX_t - \frac{1}{2}\int_0^T A^2(t,X)dt\right).\tag{38}$$

注 5. 如果在定理 3 中放弃满足性质 $\mathsf{E}Z_T = 1$, 那么可以证明 (参见 [303; 定理 7.4]),

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t,X)dt<\infty\right) = 1 \Longrightarrow \mu_T^X \ll \mu_T^B,\tag{39}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t,X)dt<\infty\right)=1\\ \mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t,B)dt<\infty\right)=1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \mu_T^X\sim\mu_T^B. \tag{40}$$

7. 定理 3 和定理 4 的比较表明, 如果在扩散型过程的情形下, 对于 Radon-Nikodym 导数有 "显式" 公式 (37) 和 (38), 那么对于 Itô 过程, 对应的公式 (参见 (26)) 提出了条件数学期望 $\mathsf{E}(\cdot\,|\,\mathscr{F}_T^X)$ 的计算. 下列有独立意义的结果在求得 Itô 过程情形下对于 Radon-Nikodym 导数的 "显式" 公式是有用的, 因为它可把 (26) 中的取条件数学期望的运算带到积分号下.

定理 5. 设 X 为有微分 (1) 的 *Itô* 过程, 其中

$$\int_0^T \mathsf{E}|a_s(\omega)|ds<\infty. \tag{41}$$

设 $A(t,x)$ 为不可预见泛函, 满足

$$A(t,X(\omega))=\mathsf{E}(a_t\,|\,\mathscr{F}_t^X)(\omega). \tag{42}$$

那么有

$$\overline{B}_t=X_t-\int_0^t A(s,X(\omega))ds \tag{43}$$

的过程 $\overline{B}=(\overline{B}_t)_{t\leqslant T}$ 是 (关于流 $(\mathscr{F}_t^X)_{t\leqslant T}$) 的布朗运动.

如果除了 (41) 以外, 有

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T a_s^2(\omega)ds<\infty\right)=1, \tag{44}$$

$$\mathsf{E}\exp\left(-\int_0^T a_s dB_s-\frac{1}{2}\int_0^T a_s^2 ds\right)=1, \tag{45}$$

那么 $\mu_T^X\sim\mu_T^B$,

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t,X)dt<\infty\right)=1, \tag{46}$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t,B)dt<\infty\right)=1, \tag{47}$$

以及

$$\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^B}(B)=\exp\left(\int_0^T A(s,B)dB_s-\frac{1}{2}\int_0^T A^2(s,B)ds\right), \tag{48}$$

$$\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^B}(X) = \exp\left(\int_0^T A(s,X)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T A^2(s,X)ds\right). \tag{49}$$

过程 $\overline{B} = (\overline{B}_t)_{t\leqslant T}$ 为布朗运动 (如果 $\mathscr{F}_t^{\overline{B}} = \mathscr{F}_t^X$, $t \geqslant 0$, 那么 $\overline{B}$ 就称为 X 的更新过程) 的证明容易由半鞅的 Itô 公式 (第三章 §3d) 应用于 $e^{i\lambda(\overline{B}_t - \overline{B}_s)}$ ($t \geqslant s$, $\lambda \in \mathbb{R}$) 来得到. 事实上,

$$\begin{aligned} e^{i\lambda(\overline{B}_t - \overline{B}_s)} = 1 &+ i\lambda \int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)} dB_u \\ &+ i\lambda \int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)}[a_u(\omega) - A(u, X(\omega))]du \\ &- \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)}du. \end{aligned} \tag{50}$$

由于

$$\mathsf{E}\left(\int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)}dB_u \,\Big|\, \mathscr{F}_s^X\right) = 0,$$

以及

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left[\int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)}(a_u(\omega) - A(u, X(\omega)))du \,\Big|\, \mathscr{F}_s^X\right] \\ &\quad = \mathsf{E}\left[\int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)}\mathsf{E}\left(a_u(\omega) - A(u, X(\omega)) \,|\, \mathscr{F}_u^X\right)du \,\Big|\, \mathscr{F}_s^X\right] = 0, \end{aligned}$$

故由 (50) 我们求得 (P-a.s.)

$$\mathsf{E}(e^{i\lambda(\overline{B}_t - \overline{B}_s)} \,|\, \mathscr{F}_s^X) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t \mathsf{E}\left(e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)} \,|\, \mathscr{F}_s^X\right)du,$$

因而 (P-a.s.)

$$\mathsf{E}\left(e^{i\lambda(\overline{B}_t - \overline{B}_s)} \,|\, \mathscr{F}_s^X\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \tag{51}$$

而这就是说, $\overline{B}$ 是布朗运动过程. (轨线 $(\overline{B}_t)_{t\leqslant T}$ 的连续性由 (43) 得到.)

为了证明余下的断言, 只需察觉到

$$\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^B} = \frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^{\overline{B}}} \cdot \frac{d\mu_T^{\overline{B}}}{d\mu_T^B}, \qquad \frac{d\mu_T^{\overline{B}}}{d\mu_T^B} = 1,$$

并运用定理 3 和定理 4 的断言.

8. 定理 1–5 都可推广到 (1), (33) 中的单个扩散系数取代为依赖于 t 和 "过去值" X_s ($s \leqslant t$) 的多维过程 X 的情形 (详情参见 [303; 第 7 章]).

我们引入这一方向上的下列结果.

设 $X = (X_t)_{t\leqslant T}$ 是下列类型的扩散过程:

$$dX_t = \alpha(t, X)dt + \beta(t, X)dB_t, \tag{52}$$

其中 $\alpha(t,x)$ 和 $\beta(t,x)$ 为不可预见泛函, 并且 $\beta(t,x)>0$; 它们定义了下列随机积分:

$$\int_0^t \beta(s,X)dB_s,$$

$t\leqslant T$, 以及 $\int_0^T |\alpha(s,X)|ds<\infty$ (P-a.s.).

设 $\widetilde{\alpha}(t,x)$ 也是不可预见泛函, 满足 $\int_0^T |\widetilde{\alpha}(s,X)|ds<\infty$ (P-a.s.) 以及

$$\int_0^T \left(\frac{\alpha(s,X)-\widetilde{\alpha}(s,X)}{\beta(s,X)}\right)^2 ds<\infty. \tag{53}$$

令

$$Z_t=\exp\left\{\int_0^t \frac{\widetilde{\alpha}(s,X)-\alpha(s,X)}{\beta(s,X)}dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\widetilde{\alpha}(s,X)-\alpha(s,X)}{\beta(s,X)}\right)^2 ds\right\}. \tag{54}$$

于是, 如果 $\mathsf{E}Z_T=1$, 那么关于有 $d\widetilde{\mathsf{P}}_T=Z_Td\mathsf{P}_T$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, 过程 X 将是有下列微分的扩散型过程:

$$dX_t=\widetilde{\alpha}(t,X)dt+\beta(t,X)d\widetilde{B}_t, \tag{55}$$

其中 $\widetilde{B}$ 为 (关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$) 的布朗运动.

例. 设 $X_t=e^{mt+\sigma B_t}$. 于是

$$dX_t=X_t\left[\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dB_t\right], \tag{56}$$

即 $\alpha(t,X)=\left(m+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)X_t$, $\beta(t,X)=\sigma X_t$. 令 $\widetilde{\alpha}(t,X)\equiv 0$. 由 (54),

$$Z_t=\exp\left\{\left(\frac{m}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)B_t-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)^2 t\right\}, \tag{57}$$

并且关于有 $d\widetilde{\mathsf{P}}_T=Z_Td\widetilde{\mathsf{P}}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, 过程 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ 有随机微分

$$dX_t=\sigma X_t d\widetilde{B}_t.$$

换句话说, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, 过程 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ 变为标准几何布朗运动 (参见第三章 §3a):

$$X_t=\exp\left\{\sigma\widetilde{B}_t-\frac{\sigma^2}{2}t\right\}. \tag{58}$$

§3c. Lévy 过程情形中的鞅测度的构造. Esscher 变换

1. 如果 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ 是有局部特征 $\alpha(t,X)$ 和 $\beta(t,X)$ 的关于原来的测度 P_T 的扩散型过程 (参见 §2c 中的 (52)), 那么 Girsanov 定理指出新测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 的明显构造,

并且关于该测度, 过程 X 有 (新) 局部特征 $\widetilde{\alpha}(t,X)$ 和 $\widetilde{\beta}(t,X)$. 如果这时 $\widetilde{\alpha}(t,X)\equiv 0$, 那么过程 X 变为关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 的局部鞅; 与此相联系的是该测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 称为*局部鞅测度*.

该测度的构造本身按照下列公式来实施:

$$d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}_T, \tag{1}$$

其中 Z_T 由上节的表达式 (54) 所给出.

基于 Esscher 变换的构造新测度的方法本质上出于同样的思想. 但是只考察有*独立增量*的过程来作为原来的过程 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ (特别是, 由独立随机变量之和所形成的过程).

2. 我们记得, 我们已经在第五章 §2d (特别是参见第 2 点中的注) 中遇到过 Esscher 变换及其推广 ("条件 Esscher 变换"). 再注意到下列这点是有益的: 正如构造 "风险中性" 概率测度的方法那样, 原测度 P_T 通过 Esscher 变换变为测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, 同样是 "无利可图事件赋以大权重", 而 "有利可图事件赋以小权重"; 这种方法在精算业中早在 1933 年 F. Esscher 发表论文 [144] 的时代就已知.

例如, 在保险公司的 "寿险" 保费的计算中, 不是由 (以很大的精度已知的) 寿命分布 P_T ("第二种死亡率表") 来计算的, 并且它也有在有利事件和不利事件之间重新配置 "权重" 的引人注目的性质.

3. 在进入一般情形下的 Esscher 变换的讨论以前, 我们先考察下列简单例子 (比较第五章 §2d), 它很好地说明了这种变换的实质.

设 X 为有 Laplace 变换 $\Phi(\lambda)=\mathsf{E}e^{\lambda X}<\infty$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ 的实随机变量, 而 $\mathsf{P}=\mathsf{P}(dx)$ 为它在 $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上的概率分布.

我们引入由 *Esscher* 变换定义的概率测度族 $\mathsf{P}^{(a)}$, $a\in\mathbb{R}$:

$$\mathsf{P}^{(a)}(dx)=\frac{e^{ax}}{\Phi(a)}\mathsf{P}(dx). \tag{2}$$

如果令

$$Z^{(a)}(x)=\frac{e^{ax}}{\Phi(a)}, \tag{3}$$

那么我们看到, $Z^{(a)}(x)>0$, $\mathsf{E}Z^{(a)}(X)=1$, 测度 $\mathsf{P}^{(a)}\sim\mathsf{P}$ 以及

$$\mathsf{P}^{(a)}(dx)=Z^{(a)}(x)\mathsf{P}(dx). \tag{4}$$

同样明显的是,

$$\Phi^{(a)}(\lambda)=\mathsf{E}_{\mathsf{P}^{(a)}}e^{\lambda X}=\frac{\mathsf{E}e^{(\lambda+a)X}}{\Phi(a)}=\frac{\Phi(a+\lambda)}{\Phi(a)}, \tag{5}$$

由此得到

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^{(a)}} X = \frac{\partial \Phi^{(a)}(\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\Phi'(a)}{\Phi(a)}. \tag{6}$$

在第五章 §2d 中已经指出, 如果随机变量 X 满足 $\mathsf{P}(X>0)>0$ 和 $\mathsf{P}(X<0)>0$, 那么函数 $\Phi(a)$ 在某个点 $\widetilde{a}$ 上达到其最小值, 对于该点显然有 $\Phi'(\widetilde{a})=0$.

因此, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P}^{(\widetilde{a})}$ 的数学期望 $\widetilde{\mathsf{E}}X \equiv \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^{(\widetilde{a})}} X = 0$, 也就是说, $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是 "风险中性" 概率测度.

性质 $\widetilde{\mathsf{E}}X = 0$ 也可看作 "一步" 概率 "鞅性质", 它也说明了 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的另一个名称: **鞅测度**.

4. 现在设 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ 是有下列特征函数的 Lévy 过程 (参见第三章 §3a 和 §1b 中的 (27))

$$\mathsf{E}e^{i\theta X_t} = e^{t\psi(\theta)}, \tag{7}$$

其中累积量

$$\psi(\theta) = i\theta b - \frac{\theta^2}{2}c + \int \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta g(x)\right)\nu(dx), \tag{8}$$

以及 $g(x)$ 为截断函数 (例如, $g(x) = xI(|x|\leqslant 1)$).

由公式 (7) 和 (8), 形式上令 $\theta = -i\lambda$, 我们求得

$$\mathsf{E}e^{\lambda X_t} = e^{t\varphi(\lambda)}, \tag{9}$$

其中

$$\varphi(\lambda) = \lambda b + \frac{\lambda^2}{2}c + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda g(x)\right)\nu(dx). \tag{10}$$

严格证明 Laplace 变换的表示式 (9)–(10) 的最简单的方式基于下列注记: 有

$$Z_t^{(\lambda)} = \exp\{\lambda X_t - t\varphi(\lambda)\} \tag{11}$$

的过程

$$Z^{(\lambda)} = (Z_t^{(\lambda)})_{t\geqslant 0}$$

是鞅. (证明由半鞅的 Itô 公式直接得到. 这时, 自然设 (10) 中的积分有限.)

类似于 (2), 我们对于每个 $a\in\mathbb{R}$ 引入概率测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$, 它借助于 Esscher 变换定义如下:

$$d\mathsf{P}_T^{(a)} = Z_T^{(a)} d\mathsf{P}_T, \tag{12}$$

其中 P_T 为 $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ 上的概率测度, 关于它, 过程 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ 为有局部特征 (b,c,ν) 的 Lévy 过程.

定理 1. 关于测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$, $a\in\mathbb{R}$, 过程 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ 也是有 Laplace 变换

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}} e^{\lambda X_t} = e^{t\varphi^{(a)}(\lambda)} \tag{13}$$

的 Lévy 过程, 其中

$$\varphi^{(a)}(\lambda) = \varphi(a+\lambda) - \varphi(a). \tag{14}$$

证明由 "Bayes 公式" (第五章 §3d) 导出; 根据后者, ($\mathsf{P}_T^{(a)}$-a.s.) 有

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}}\left(e^{\lambda(X_t-X_s)}\mid \mathscr{F}_s\right) &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}}\left(e^{\lambda(X_t-X_s)}\frac{Z_t^{(a)}}{Z_s^{(a)}}\,\middle|\, \mathscr{F}_s\right)\\
&= \mathsf{E}\left(e^{(a+\lambda)(X_t-X_s)-\varphi(a)(t-s)}\mid \mathscr{F}_s\right)\\
&= \mathsf{E}e^{(a+\lambda)(X_t-X_s)-\varphi(a)(t-s)}\\
&= e^{(\varphi(a+\lambda)-\varphi(a))(t-s)}.
\end{aligned}$$

由此可见, 关于由 Esscher 变换 (12) 定义的测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$, 过程 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ 也是有公式 (13) 和 (14) 给定的 Laplace 变换的 Lévy 过程. (比较 §3b 中的 Girsanov 定理.)

定理 2. 关于测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$, $a\in\mathbb{R}$, 过程 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ 的局部特征 $(b^{(a)}, c^{(a)}, \nu^{(a)})$ 根据下列公式按局部特征 (b,c,ν) 来确定 ($g(x)$ 为截断函数):

$$b^{(a)} = b + ac + \int_{\mathbb{R}} g(x)(e^{ax}-1)\nu(dx), \tag{15}$$

$$c^{(a)} = c, \tag{16}$$

$$\nu^{(a)}(dx) = e^{ax}\nu(dx). \tag{17}$$

证明. 由定理 1, 按测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$, 过程 X 为 Lévy 过程, 且

$$\varphi^{(a)}(\lambda) = \lambda b^{(a)} + \frac{\lambda^2}{2}c^{(a)} + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{\lambda x}-1-\lambda g(x)\right)\nu^{(a)}(dx). \tag{18}$$

考虑到 $\varphi^{(a)}(\lambda) = \varphi(a+\lambda) - \varphi(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 由 (18) 和 (10) 直接得到 "联系公式" (15)–(17).

5. 设 $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ (关于测度 P_T) 为 Lévy 过程. 作为半鞅, 这个过程有 (一般来说不唯一的) 典则分解 $X=M+A$, 其中 M 为局部鞅, 而 A 为有界变差过程. 我们现在将把问题理解为如下: 在局部特征 (b,c,ν) 怎样的条件下过程 X 为局部鞅 (关于测度 P_T).

换句话说, 我们对使过程 X 为鞅的测度 P_T 的条件感兴趣.

首先我们注意到, 如果 X 为局部鞅, 那么它因而是特殊半鞅, 这就是说, 必定有下列条件满足:

$$(x^2\wedge|x|)*\nu \in \mathscr{A}_{\text{loc}} \tag{19}$$

(参见 §3a 中的 (20)).

设 X 为特殊半鞅以及

$$X = N + A \tag{20}$$

为其典则分解 (N 为局部鞅, A 为有界变差可料过程), 而

$$X = B + X^c + g * (\mu - \nu) + (x - g) * \mu \tag{21}$$

为其典则分解, (由 (19)) 它可改写为下列形式:

$$X = B + X^c + g * (\mu - \nu) + (x - g) * (\mu - \nu) + (x - g) * \nu. \tag{22}$$

比较 (20) 和 (22), 我们求得

$$A = B + (x - g) * \nu, \tag{23}$$

因而可以断定有可料特征三元组 (B, C, ν) 的特殊半鞅 X 为局部鞅当且仅当

$$B + (x - g) * \nu = 0. \tag{24}$$

由此得到, 有局部特征三元组 (b, c, ν) 的 Lévy 过程 X 为特殊半鞅当且仅当

$$\int (x^2 \wedge |x|) \nu(dx) < \infty \tag{25}$$

(参见 §3a 中的 (20)), 以及同样, 为局部鞅当且仅当

$$b + \int_{\mathbb{R}} (x - g(x)) \nu(dx) = 0. \tag{26}$$

如果 $g(x) = xI(|x| \leqslant 1)$, 那么条件 (26) 取下列形式:

$$b + \int_{|x|>1} x \nu(dx) = 0. \tag{27}$$

当然, 也有可能, 关于原来的测度 P 条件 (26) 不满足. 在这一情形下, 借助于上面的 Esscher 变换的构造, 把它转换为测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$ 是有用的. 由于 "新的" 局部特征 $(b^{(a)}, c^{(a)}, \nu^{(a)})$ 由公式 (15)–(17) 来定义, 故由 (25) 和 (27), 我们断定, 关于测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$ Lévy 过程为局部鞅当且仅当

$$\int (x^2 \wedge |x|) e^{ax} \nu(dx) < \infty, \tag{28}$$

以及

$$b + ac + \int_{|x|>1} x \nu(dx) + \int_{\mathbb{R}} x(e^{ax} - 1) \nu(dx) = 0. \tag{29}$$

例 1. 设 $X_t = mt + \sigma B_t + kN_t$, 其中 B 为标准布朗运动以及有参数 $\nu > 0$ 的标准泊松过程 ($\mathsf{E}N_t = \nu t$). 我们阐述, 在参数 a 值的什么条件下, 过程 $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ 关于测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$ 变为局部鞅.

把 X_t 表示为

$$X_t = (m + k\nu)t + \sigma B_t + k(N_t - \nu t), \tag{30}$$

我们看到, 如果

$$m + k\nu = 0, \tag{31}$$

这个过程将显然关于原来的测度为鞅.

现在设 $m + k\nu \neq 0$. 在所考察的情形下, 过程 $(kN_t)_{t\geqslant 0}$ 有跳跃幅度 k, Lévy 测度 $\nu(dx) = \nu \cdot I_{\{k\}}(dx)$,

$$\mathsf{E}e^{\lambda(kN_t)} = e^{\nu t(e^{k\lambda}-1)}, \tag{32}$$

以及过程 X 的局部特征 b 和 c (对于截断函数 $g(x) = xI(|x| \leqslant k)$) 有这样的形式:

$$\begin{aligned} b &= m + k\nu, \\ c &= \sigma^2. \end{aligned}$$

由 (29) 我们对于 a 求得下列方程 (由于选择函数 $g(x) = xI(|x| \leqslant k)$ 为截断函数, 关于集合 $\{x\colon |x| > 1\}$ 的积分应该替换为关于 $\{x\colon x > k\}$ 的积分):

$$(m + k\nu) + a\sigma^2 + \nu k(e^{ak} - 1) = 0. \tag{33}$$

如果 $\sigma^2 \neq 0$, 那么存在该方程的根, 设为 $\widetilde{a}$, 因而关于测度 $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$, 过程 X 变为鞅. 如果 $\sigma^2 = 0$, 那么根 $\widetilde{a}$ 必须由下列方程来求得:

$$e^{ak} = -\frac{m}{k\nu}, \tag{34}$$

由此可见, 为使根存在, 值 m 必须不等于零, 并且 m 和 k 必须异号.

6. 我们现在将假定, 价格过程 $S = (S_t)_{t\leqslant T}$ 由某个 Lévy 过程 $X = (X_t)_{t\leqslant T}$ 生成:

$$S_t = e^{X_t}. \tag{35}$$

下面考察的问题对于无套利机会问题的讨论很重要; 这一问题在于: 过程 S 对于原来的测度 P_T 或者关于某个借助于 Esscher 变换来构造的测度 $\mathsf{P}_T^{(a)}$ 是否为鞅?

正如在第 3 点中那样, 我们从某个简单例子的讨论开始.

设 X 为实值随机变量, $\Phi(a) = \mathsf{E}e^{aX}$. (假定, $\Phi(a) < \infty$, $a \in \mathbb{R}$.) 于是很明显, 如果 $\Phi(1) = 1$, 那么随机变量 $S = e^X$ 具有 (关于原来测度的) "鞅性质" $\mathsf{E}S = 1$.

如果 $\Phi(1) \neq 1$, 那么可尝试求出 $\widetilde{a}$, 使得关于借助变换 (2) 来构建的测度 $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$, 将满足 "鞅性质" $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}} S = 1$.

由于

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}} S = \mathsf{E}\frac{e^{(a+1)X}}{\Phi(a)} = \frac{\Phi(a+1)}{\Phi(a)}, \tag{36}$$

故值 $\widetilde{a}$ 必定是下列方程的根:

$$\Phi(a+1) - \Phi(a) = 0. \tag{37}$$

如果 X 是有参数 m 和 σ^2 的正态分布随机变量, 那么由于

$$\Phi(a) = \mathsf{E}e^{aX} = e^{am+\frac{(a\sigma)^2}{2}}, \tag{38}$$

由 (27) 我们求得

$$\widetilde{a} = -\frac{1}{2} - \frac{m}{\sigma^2}. \tag{39}$$

现在我们转向 (35) 中定义的过程 $S = (S_t)_{t\leqslant T}$. 自然, 在此以前, 我们阐述, 在怎样的条件下, 这个过程关于原来的测度 P_T 为鞅.

定理 3. 为使过程 $S = e^X$ 关于测度 P_T 为鞅, 充分 (又必要的) 条件为

$$\int_{|x|>1} e^x \nu(dx) < \infty \tag{40}$$

和

$$b + \frac{1}{2}c + (e^x - 1 - g(x)) * \nu = 0. \tag{41}$$

证明. 条件 (40) 与条件 $(x^2 \wedge 1) * \nu < \infty$ 一起确保积分 $(e^x - 1 - g(x)) * \nu$ 的有限性.

显然,

$$\mathsf{E}(e^{X_t - X_s} \mid \mathscr{F}_s) = \mathsf{E}e^{X_t - X_s} = e^{(t-s)\varphi(1)},$$

其中 $\varphi(1)$ 在 (10) 中定义, 它恰好就是 (41) 的左端中的表达式. 因此,

$$\mathsf{E}(e^{X_t} \mid \mathscr{F}_s) = e^{X_s},$$

它也证明了过程 $S = e^X$ 的鞅性质. (条件 (40) 和 (41) 的必要性在 [250; 第 X 章 §2a] 中指出.)

7. 设条件 (41) 不满足. 根据定理 1,

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}}(e^{X_t - X_s} \mid \mathscr{F}_s) = e^{(t-s)(\varphi(a+1)-\varphi(a))}. \tag{42}$$

因此, 很明显, 如果 $\widetilde{a}$ 为下列方程的根:

$$\varphi(a+1) - \varphi(a) = 0, \tag{43}$$

那么关于测度 $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$, 过程 $S = (S_t)_{t\leqslant T}$ 将是鞅.

由 (43) 并考虑 (18), 将导致下列结果.

定理 4. 设 $\widetilde{a}$ 满足

$$\left|e^{\widetilde{a}x}(e^x-1)-g(x)\right| * \nu < \infty$$

和

$$b+\left(\widetilde{a}+\frac{1}{2}\right)c+\left(e^{\widetilde{a}x}(e^x-1)-g(x)\right) * \nu = 0. \tag{44}$$

那么关于测度 $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$ 过程 $S=(S_t)_{t\leqslant T}$ 为鞅.

例 2. 设 $S_t=e^{X_t}$, 其中过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 在例 1 中定义. 在这一情形下, 方程 (44) 取这样的形式:

$$\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)+a\sigma^2+\nu\left[e^{ak}(e^k-1)\right]=0. \tag{45}$$

如果 $\sigma=0$, $k\neq 0$, 那么 (45) 转换为方程

$$e^{ak}=-\frac{m}{n(e^k-1)}, \tag{46}$$

当 $m\neq 0$, 而 k 和 m 异号时, 它显然有解.

如果 $k=0$, 那么

$$S_t=e^{mt+\sigma B_t} \tag{47}$$

是标准几何布朗运动模型 (第三章 §4b). 根据 Itô 公式,

$$dS_t=S_t\left(\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dB_t\right). \tag{48}$$

由 (45) 或由 (39), 我们求得, $\widetilde{a}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{m}{\sigma^2}$ 和

$$Z_T^{(\widetilde{a})}=\exp\left\{-\left(\frac{m}{\sigma^2}+\frac{\sigma}{2}\right)^2 T\right\}.$$

由于

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}}e^{\lambda X_t}=\exp\left\{\frac{\sigma^2 t}{2}\left[-\lambda+\lambda^2\right]\right\},$$

故我们看到,

$$\operatorname{Law}(X_t\,|\,\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})})=\mathscr{N}\left(-\frac{\sigma^2 t}{2},\frac{\sigma^2 t}{2}\right). \tag{49}$$

换句话说, 关于测度 $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$, 过程 $(X_t)_{t\leqslant T}$ 有与过程 $\left(\sigma W_t-\dfrac{\sigma^2}{2}t\right)_{t\leqslant T}$ 同样的分布, 其中 $W=(W_t)_{t\leqslant T}$ 为标准维纳过程 (比较 §3b 末的例子), 而过程 $S=(S_t)_{t\leqslant T}$ 变为标准几何布朗运动.

这样, 在所考察的情形下, 借助于 *Girsanov* 变换 和借助于 *Esscher* 变换的鞅测度的构造导致同样的结果. (然而, 这并不令人惊讶, 因为在这一情形下, 鞅测度是唯一的, 而过程 $X_t = mt + \sigma B_t$ 既是扩散过程, 又是独立增量过程.)

注. 关于 Esscher 变换及其对期权定价的应用, 参见 H. U. Gerber, E. S. W. Shiu, [177], [178].

§3d. 价格的鞅性质可料判别准则. I

1. 这节与下节献给求出使得半鞅价格 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 为 (关于原测度 P 或者某个测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$ 的) 鞅或局部鞅的可料判别准则 (即表达为所考察的过程的可料特征三元组性质的判别准则). 比较对于离散时间情形下的第五章中的 §3f.

我们从下列注记开始: 对于不同的问题所考察的价格用不同的表示式看来是有用的.

如果 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为半鞅, 那么根据定义,

$$S_t = S_0 + a_t + m_t, \tag{1}$$

其中 $a = (a_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为有界变差过程, 而 $m = (m_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为局部鞅. 这一分解不是唯一的. 例如, 如果 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 为标准泊松过程 ($S_0 = 0$, $\mathsf{E}S_t = \lambda t$), 那么在关系式 (1) 中既可取 $a_t = S_t$, $m_t = 0$, 又可取 $a_t = \lambda t$, $m_t = S_t - \lambda t$.

分解式 (1) 有 "加法" 特征. 但如果假定 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 为特殊正半鞅, (1) 是它的有可料过程 $a = (a_t)_{t\geqslant 0}$ 的分解, 那么在 $S_{t-} + \Delta a_t \neq 0$ 的补充假定下, 对于 S 有乘法分解

$$S_t = S_0 \mathscr{E}(\widehat{a})_t \mathscr{E}(\widehat{m})_t, \tag{2}$$

其中

$$\mathscr{E}(g)_t = e^{g t - \frac{1}{2}\langle g^c \rangle_t} \prod_{0<s\leqslant t} (1 + \Delta g_s) e^{-\Delta g_s} \tag{3}$$

为随机指数, 以及过程 $\widehat{a} = (\widehat{a}_t)$ 和 $\widehat{m} = (\widehat{m}_t)$ 由下列公式来确定:

$$\widehat{a}_t = \int_0^t \frac{da_u}{S_{u-}}, \quad \widehat{m}_t = \int_0^t \frac{dm_u}{S_{u-} + \Delta a_u}. \tag{4}$$

应用 Itô 公式, 容易断定公式 (2) 成立; 详情参见 [304; 第 2 章 §5].

在 (2) 中的两个随机指数的乘积可用 *Yor* 公式 (参见第三章 §3f 中的 (18)) "转换" 为一个随机指数:

$$\mathscr{E}(\widehat{a})_t \mathscr{E}(\widehat{m})_t = \mathscr{E}(\widehat{H})_t, \tag{5}$$

其中

$$\widehat{H}_t = \widehat{a}_t + \widehat{m}_t + [\widehat{a}, \widehat{m}]_t, \tag{6}$$

以及

$$[\widehat{a}, \widehat{m}]_t = \sum_{0<s\leqslant t} \Delta\widehat{a}_s \Delta\widehat{m}_s. \tag{7}$$

因此, 对于 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 我们得到下列表示式:

$$S_t = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})_t, \tag{8}$$

它看来在分析该过程的 “鞅性质” 时十分有用, 因为随机指数 $\mathscr{E}(\widehat{H})$ 是局部鞅当且仅当 $\widehat{H}$ 为局部鞅.

前面 (第二章 §1a) 已经注意到, 从随机分析的视角来看, 更有用的不是表示式 (8), 而是按照 “复利公式” 的表示式:

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \tag{9}$$

其中 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 为某个半鞅. 正是这个表示式 (9) 通常在金融数学中当作起点. 由 (9) 转换为 (8) 是按下列公式来实现的:

$$\widehat{H}_t = H_t + \frac{1}{2}\langle H^c\rangle_t + \sum_{0<s\leqslant t} (e^{\Delta H_s} - 1 - \Delta H_s), \tag{10}$$

它的 “微分–差分” 形式可记为下列形式:

$$d\widehat{H}_t = dH_t + \frac{1}{2} d\langle H^c\rangle_t + (e^{\Delta H_t} - 1 - \Delta H_t). \tag{11}$$

为证明公式 (10), 我们察觉, 把 Itô 公式应用于 $f(H) = e^H$,

$$dS_t = S_{t-}\left[dH_t + \frac{1}{2} d\langle H^c\rangle_t + \left(e^{\Delta H_t} - 1 - \Delta H_t\right)\right]. \tag{12}$$

另一方面, 由 (8) 和随机指数的性质,

$$dS_t = S_{t-} d\widehat{H}_t. \tag{13}$$

比较 (12) 和 (13), 就导得公式 (10).

注 1. 在公式 (10) 中的无限和绝对收敛 (P-a.s.), 因为对于每个半鞅 H 只存在有限个时刻 $s \leqslant t$, 满足

$$|\Delta H_s| > \frac{1}{2} \text{ 和 } \sum_{0<s\leqslant t} (\Delta H_s)^2 < \infty$$

参见第三章 §5b). 同理, 在随机指数的定义 (3) 中的无限乘积也绝对收敛.

2. 设 H 为半鞅以及

$$H = H_0 + B + H^c + g * (\mu - \nu) + (x - g(x)) * \mu \tag{14}$$

为其典则表示式 (关于某个截断函数 $g = g(x)$; $\mu = \mu^H$ 为 H 的跳跃测度以及 $\nu = \nu^H$ 为其补偿量; 参见 §3a).

由 (10) 和 (14), 我们得到对于 $\widehat{H}$ 的下列表示式:

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= H + \frac{1}{2}\langle H^c\rangle + (e^x - 1 - x) * \mu \\ &= H_0 + B + H^c + \frac{1}{2}\langle H^c\rangle + g * (\mu - \nu) \\ &\quad + (x - g(x)) * \mu + (e^x - 1 - x) * \mu.\end{aligned} \tag{15}$$

为变换 (15) 的右端, 我们利用下面这点: 如果 $|W| * \nu \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$, 那么 $|W| * \mu \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$, 并且这时 (参见 §3a)

$$W * (\mu - \nu) = W * \mu - W * \nu. \tag{16}$$

由此和由 (15), 我们求得, 如果

$$(|x| I(|x| \leqslant 1) + e^x I(|x| > 1) * \nu \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}, \tag{17}$$

那么

$$\widehat{H} = K + H_0 + H^c + (e^x - 1) * (\mu - \nu), \tag{18}$$

其中 $H^c + (e^x - 1) * (\mu - \nu) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ 以及

$$K = B + \frac{1}{2}\langle H^c\rangle + (e^x - 1 - g(x)) * \nu.$$

这样, 由 (18) 导出如下定理.

定理. 设条件 (17) 满足. 那么 $\widehat{H} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ 和 $S \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ 当且仅当

$$K_t = 0 \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \qquad t > 0. \tag{19}$$

在这一情形下, 局部鞅

$$\widehat{H} = H_0 + H^c + (e^x - 1) * (\mu - \nu). \tag{20}$$

例. 设 H 为 Lévy 过程, 其三元组 (B, C, ν) 有下列形式:

$$B_t = bt, \quad C_t = \sigma^2 t, \quad \nu(dt, dx) = dt\, F(dx), \tag{21}$$

其中测度 $F = F(dx)$ 满足 $F(\{0\}) = 0$ 以及

$$\int (x^2 \wedge 1) F(dx) < \infty. \tag{22}$$

我们在

$$\int (|x| I(|x| \leqslant 1) + e^x I(|x| > 1))\, F(dx) < \infty \tag{23}$$

的假定下, 来加强 (22).

在这一假定下, 价格过程 $S_t = S_0 e^{H_t}$ 将 (关于原测度 P) 为鞅, 只要 (b, σ^2, F) 满足下列关系式:

$$b + \frac{\sigma^2}{2} + \int (e^x - 1 - g(x))\, F(dx) = 0. \tag{24}$$

如果 $B_t = B_0 e^{rt}$ 为银行账户, 那么价格折现过程 $\dfrac{S}{B} = \left(\dfrac{S_t}{B_t}\right)_{t\geqslant 0}$ 按测度 P 形成鞅, 只要

$$b + \frac{\sigma^2}{2} + \int (e^x - 1 - g(x))\, F(dx) = r. \tag{25}$$

注 2. 对应上节中的记号 (10), 方程 (24) 和 (25) 中的左端是 "累积量" 函数 $\varphi(\lambda)$ 当 $\lambda = 1$ 时的值. 因此, 公式 (25) 可赋以下列形式:

$$\varphi(1) = r. \tag{26}$$

注 3. 正如 §3c 中的定理 3 所指出, 在 Lévy 过程情形下, 条件 $\int |x| I(|x| \leqslant 1) F(dx) < \infty$ 变得多余. (这个条件在 (15) 中利用公式 (16) 通过 "合并同类项" 而得到.)

§3e. 价格的鞅性质可料判别准则. II

1. 如果 §3d 中的定理条件 (19) 不满足, 那么关于原来的测度 P, 价格过程 $S = S_0 e^H$ 不是局部鞅.

但是对于许多目标来说 (特别是, 对于无套利机会问题; 参见 §2b) 只需存在某个有性质 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 或 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 关于它, 过程 S 是局部鞅.

有这种性质的测度的存在问题已经在离散时间模型中付以许多关注 (第五章 §§3a–3f).

下面对于连续时间情形在半鞅模型中考察这个问题.

2. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 为随机基底, $\mathsf{P}_t = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_t$ 为测度 P 在 $\mathscr{F}_t$ 上的局限. 又设 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为 $\mathscr{F}$ 上的某个概率测度, 满足 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 即 $\widetilde{\mathsf{P}}_t \ll \mathsf{P}_t$ 对于所有 $t \geqslant 0$ 成立. 我们将假定 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathsf{P}_0$.

我们关于使得这样那样的过程变为局部鞅的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的存在问题的研究, 以对于局部鞅的 *Girsanov* 定理开始, 后者指出通过测度的绝对连续替换可生成局部鞅.

定理 1. *设* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$, $M_0 = 0$ *和* $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$, *其中* $Z_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$. *设二次协变差* $[M, Z]$ *有* P-*局部可积变差, 以及* $\langle M, Z\rangle$ *为可料二次协变差 (过程* $[M, Z]$ *的补偿量).*

那么过程

$$\widetilde{M} = M - \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M, Z\rangle \tag{1}$$

是 $\widetilde{\mathsf{P}}$-局部鞅, 并且 $\widetilde{\mathsf{P}}$-特征 $\langle \widetilde{M}^c, \widetilde{M}^c \rangle$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-a.s.) 重合于 P-特征 $\langle M^c, M^c \rangle$.

证明. 对应于第五章 §3d 中的引理,①

$$XZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P}) \iff X \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}). \tag{2}$$

(所指出的引理的陈述和证明已经对于离散时间给出; 在连续时间的情形下, 它们自动成立.)

由断言 (2) 容易导出 (详情参见 [250; 第 III 章, §3b]) 下列 "局部" 文本:

$$XZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}) \implies X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}), \tag{3}$$

$$(XZ)^{T_n} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}) \implies X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}), \tag{4}$$

其中 $(XZ)^{T_n} = (X_{t\wedge T_n} Z_{t\wedge T_n})_{t\geqslant 0}$ 以及 $T_n = \inf(t\colon Z_t < 1/n)$.

这样一来, 为证明 $\widetilde{M} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$, 只需断定 $(\widetilde{M}Z)^{T_n} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$, $n \geqslant 1$.

设

$$A = \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M, Z \rangle. \tag{5}$$

于是, 按照 Itô 公式,

$$\begin{aligned}(M - A)Z &= MZ - AZ \\ &= (M_- \cdot Z + Z_- \cdot M + [M, Z]) - (A \cdot Z + Z_- \cdot A) \\ &= (M_- \cdot Z + Z_- \cdot M + ([M, Z] - \langle M, Z \rangle)) \\ &\quad + \langle M, Z \rangle - A \cdot Z - \langle M, Z \rangle \\ &= M_- \cdot Z + Z_- \cdot M + ([M, Z] - \langle M, Z \rangle) - A \cdot Z. \end{aligned} \tag{6}$$

(6) 的右端的前三项为 P-局部鞅. 于是过程 $(A \cdot Z)^{T_n}$ 对于每个 $n \geqslant 1$ 也是局部鞅. 从而, 根据断言 (4), 过程 $\widetilde{M} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

这样一来, 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 过程 M 变为有下列典则分解的半鞅:

$$M = \widetilde{M} + A. \tag{7}$$

由此以及由二次变差 $[M, M]$ 和 $[\widetilde{M}, \widetilde{M}]$ 的定义, 借助于 Riemann 序列 $S^{(n)}(M, M)$ 和 $S^{(n)}(\widetilde{M}, \widetilde{M})$ 的极限 (参见第三章 §5b 中的 (10)), 导出 $[M, M] = [\widetilde{M}, \widetilde{M}]$ 精确到 $\widetilde{\mathsf{P}}$-无区别条件下成立. 最后, 考虑到同样来自第三章 §5b 中的 (22), 我们断定可料二次变差 $\langle M^c, M^c \rangle$ 和 $\langle \widetilde{M}^c, \widetilde{M}^c \rangle$ (关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$) 重合.

3. 设 $S_t = S_0 e^{H_t}$, 其中 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 为半鞅, 并设 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $Z_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$.

①原版与英文版中的下式都遗漏了 (P). —— 译者注

我们假定, 过程 $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 由某个 P-局部鞅 $N=(N_t)_{t\geqslant 0}$ 如下生成:

$$dZ_t = Z_{t-}dN_t. \tag{8}$$

换句话说, 设 $Z=\mathscr{E}(N)$.

我们把过程 S 表示为下列形式: $S=S_0\mathscr{E}(\widehat{H})$, 其中 $\widehat{H}$ 根据上节中的公式 (10) 由 H 所生成.

设 $\widehat{H}$ 为有下列典则分解的特殊半鞅:

$$\widehat{H} = H_0 + \widehat{A} + \widehat{M}, \tag{9}$$

其中 $\widehat{M}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ 和 $\widehat{A}$ 为可料局部有界变差过程.

记 $\widehat{H}$ 为下列形式:

$$\widehat{H} = H_0 + \widehat{A} + \widehat{M} = H_0 + \widehat{A} + \langle\widehat{M},N\rangle + (M - \langle\widehat{M},N\rangle), \tag{10}$$

并且我们察觉

$$\frac{1}{Z_-}\cdot\langle\widehat{M},Z\rangle = \langle\widehat{M},N\rangle. \tag{11}$$

于是由定理 1, 过程 $\widehat{M}-\langle\widehat{M},N\rangle$ 关于有 $d\widetilde{\mathsf{P}}_t = Z_t d\mathsf{P}_t$ $(t\geqslant 0)$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为局部鞅.

因此, 下列定理成立.

定理 2. 如果 $\widehat{H}$ 为有典则分解 (9) 的特殊半鞅, 测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 以及过程 $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 有表示式 (8), 那么

$$\widehat{A} + \langle\widehat{M},N\rangle = 0 \implies \widehat{H}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}). \tag{12}$$

4. 设上节中的条件 (17) 满足, 并且过程 N 有下列表示式:

$$N = \beta\cdot H^c + (Y-1)*(\mu-\nu), \tag{13}$$

其中可料过程 $\beta=(\beta_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ 以及 $\widetilde{\mathscr{P}}$-可测函数 $Y=Y(t,\omega,x)$, $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$, $x\in\mathbb{R}$. (在 (14) 中, $\mu=\mu^H$, $\nu=\nu^H$, 并假定, 对应的关于 H^c 和 $\mu-\nu$ 的积分有定义.)

运用 §3d 中的对于 $\widehat{H}$ 的表示式:

$$\widehat{H} = H_0 + K + H^c + (e^x-1)*(\mu-\nu). \tag{14}$$

于是, 如果认为 $\nu(\{t\}\times dx;\omega)=0$, 那么我们求得 (参见 §3a 中的第 4 点末的注)

$$\langle\widehat{M},N\rangle = \beta\cdot\langle H^c\rangle + (Y-1)(e^x-1)*\nu. \tag{15}$$

由断言 (12), 公式 (14) 和 (15), 以及 §3d 中的 (19), 导致下列结果.

定理 3. 设 §3d 中的条件 (17) 满足, $\nu(\{t\}\times dx;\omega)=0$ 以及

$$|Y-1|\,|e^x-1|*\nu_t<\infty. \tag{16}$$

于是, 如果

$$B+\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\langle H^c\rangle+(e^x-1-g(x))*\nu+(e^x-1)(Y-1)*\nu=0, \tag{17}$$

那么关于有 $d\widetilde{\mathsf P}_t=Z_t d\mathsf P$ $(t\geqslant 0)$ 的测度 $\widetilde{\mathsf P}$, 过程 $\widehat H$ 和 $S=S_0\mathscr E(\widehat H)$ 是局部鞅.

例. 设过程 H 为在 §3d 的例中所考察的 Lévy 过程, 并且设 $\beta_s(\omega)\equiv\beta$ 以及 $Y=Y(x)$. 于是, 当条件

$$b+\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\sigma^2+\int(e^x-1-g(x))F(dx)+\int(e^x-1)(Y-1)F(dx)=0 \tag{18}$$

满足时, 过程 $\widehat H$ 和 $S=S_0\mathscr E(\widehat H)$ 是 $\widetilde{\mathsf P}$-局部鞅.

我们察觉, 条件 (18) 也可赋以下列形式:

$$b+\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\sigma^2+\int((e^x-1)Y-g(x))\,F(dx)=0. \tag{19}$$

在 $\beta=0$ 和 $Y=1$ 的情形下, 这一条件重合于 §3d 中的条件 (24).

我们记得 §3c 中的累积量函数 $\varphi(\lambda)$ 的表示式为

$$\varphi(\lambda)=\lambda b+\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2+\int\left(e^{\lambda x}-1-\lambda g(x)\right)F(dx). \tag{20}$$

于是取 $\beta=\widetilde\lambda$ 和 $Y(x)=e^{\widetilde\lambda x}$, 由 (20) 我们求得, 条件 (19) 将满足, 只要 $\widetilde\lambda$ 选为下列方程的根:

$$\varphi(\lambda+1)-\varphi(\lambda)=0. \tag{21}$$

如果 $B_t=B_0e^{rt}$, 那么折现价格 $\dfrac{S}{B}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf P}$ 形成局部鞅, 只要 $d\widetilde{\mathsf P}_t=Z_t d\mathsf P_t$ 和 $dZ_t=Z_{t-}dN_t$, 其中

$$N=\widetilde\lambda\cdot H^c+\left(e^{\widetilde\lambda x}-1\right)*(\mu-\nu), \tag{22}$$

以及 $\widetilde\lambda$ 是下列方程的根:

$$\varphi(\lambda+1)-\varphi(\lambda)=r. \tag{23}$$

§3f. 局部鞅的可表示性 ("$(H^c,\mu-\nu)$-可表示性")

1. 在上节中假定, 有 $Z_t=\dfrac{d\widetilde{\mathsf P}_t}{d\mathsf P_t}$ 的密度过程 $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathsf P$-局部鞅, 且有 (参见 (13)) 表示式 $Z=\mathscr E(N)$, 其中 $\mathsf P$-局部鞅 N 是两个关于 H^c 和 $\mu-\nu$ 的积分之和.

把这个表示式与离散时间情形下的 “$(\mu-\nu)$-可表示性” (第五章 §4c) 相比较, 自然把它称为 “$(H^c,\mu-\nu)$-可表示性”, 它也说明了在本节标题中这些词的出现.

在非常一般的情形下, 局部鞅的可表示性的问题在 [250; 第 III 章 §4c] 中讨论. 因此, 这里还留下的只是与套利问题有直接关系的关于完全性和对原来的测度局部绝对连续的概率测度的构造的某些一般结果.

2. 首先我们注意到, 为使局部鞅按局部鞅 H^c 和鞅测度 $\mu-\nu$ 的可表示性有一个令人满意的解, 对基本结局 ω 的空间结构要附加某些补充假定. 也就是说, 今后我们将认为, Ω 是由所有右连续和有左极限的函数 $\omega=(\omega_t)_{t\geqslant 0}$ 所组成的典则空间. (关于这方面也参见 [250; 第 III 章, 2.13].)

以后考察的随机过程 $X=(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$, 特别是半鞅, 将被假定为典则给定的, 即 $X_t(\omega)\equiv\omega_t$.

渗透 σ-代数族 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 将被理解为这样的 σ-代数族:

$$\mathscr{F}_t=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s^0,$$

其中 $\mathscr{F}_s^0=\sigma(\omega\colon \omega_u, u\leqslant s)$. 我们也将假定 $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_t$.

设 P 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度, $\mathsf{P}_t=\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, 以及 $H=(H_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为某个有可料特征三元组 (B,C,ν) 的半鞅. 为简化讨论, 我们将假定 $H_0=\mathrm{Const}$ (P-a.s.).

三元组 (B,C,ν) 什么时候唯一确定测度P 是一个多方面有意义的重要问题. 一般来说, 这是没有答案的, 正如下列最简单的 “确定性的” 例子所表明.

例如, 设 $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ 是下列 (常) 微分方程的解:

$$\dot{H}_t=2|H_t|^{1/2},\quad H_0=0$$

(它有 “非 Lipschitz” 右端). 这个方程显然有两个解: $H_t^{(1)}\equiv 0$, $H_t^{(2)}=t^2$. 两者关于测度 $\mathsf{P}^{(1)}$ 和 $\mathsf{P}^{(2)}$ 都是半鞅, 其中 $\mathsf{P}^{(1)}$ “坐落” 在轨线 $\omega_t\equiv 0$ 上, 而 $\mathsf{P}^{(2)}$ “坐落” 在轨线 $\omega_t=t^2$ 上. 同时, 在两种情形下, 它们的三元组 (B,C,ν) 重合, 并且 $C=0$, $\nu=0$ 以及 $B_t(\omega)=\int_0^t 2|\omega_s|^{1/2}ds$.

3. 对于 “$(H^c,\mu-\nu)$-可表示性” 问题, 三元组和概率测度的唯一性的作用在下列命题中体现.

定理 1. 设在典则概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 上给定有三元组 (B,C,ν) 的半鞅 $H=(H_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, $H_0=\mathrm{Const}$, 并且测度 P 在下列意义下是唯一的: 若 P' 为另一个使得 H 有同样的三元组的测度, 并且 $\mathsf{P}'\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathsf{P}$, $\mathsf{P}'_0=\mathsf{P}_0$, 则 $\mathsf{P}'=\mathsf{P}$.

那么每个局部鞅 $N=(N_t,\mathscr{F}_t)$ 有下列表示式:

$$N=N_0+f\cdot H^c+W*(\mu-\nu),\tag{1}$$

其中 f 为有 $f^2 \cdot \langle H^c \rangle \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ 的可料过程, 而 W 为有 $G(W) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ (§3a) 的 $\widetilde{\mathsf{P}}$-可料过程.

这个结果及其推广 ("表示基本定理") 参见 [250; 第 III 章 §4d].

由所引入的定理导出下列关于 "$(H^c, \mu - \nu)$-可表示性" 的有用结果 (特别是与无套利完全模型相联系).

定理 2. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 为典则渗透概率空间.

a) 如果 $H = (H_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动过程, 那么每个局部鞅 $N = (N_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 有下列形式:

$$N = H_0 + f \cdot H, \tag{2}$$

其中 $f^2 \cdot \langle H \rangle \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

b) 如果半鞅 $H = (H_t, \mathscr{F}_t)$ 是独立增量过程, 那么每个局部鞅 $N = (N_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 有表示式 (1).

证明直接由定理 1 得到, 其中运用维纳测度的唯一性以及下列事实: 对于独立增量过程, 其三元组是确定性的, 并且按它的概率分布 (由 Lévy-Khinchine 公式) 唯一确定.

注意, 断言 a) 已经在前面 (第三章 §3c) 引入.

4. 除了定理 2 中所叙述的属于 "经典的" 情形 a) 和 b) 以外, 再简要地叙述一种也使局部鞅的 "$(H^c, \mu - \nu)$-可表示性" 结果成立的情形.

我们考察随机微分方程 (比较第三章 §3e):

$$\begin{aligned} dH_t =& b(t, H_t)dt + \sigma(t, H_t)dB_t + g(\delta(t, H_t, x))(\mu(dt, dx; \omega) - \nu(dt, dx; \omega)) \\ &+ g'(\delta(t, h_t, x))\mu(dt, dx; \omega), \end{aligned} \tag{3}$$

其中 b, σ, δ 为 Borel 函数, $g = g(x)$ 为截断函数, $g'(x) = x - g(x)$. B 为布朗运动, μ 为有补偿量 $\nu(dt, dx) = dt\, F(dx)$ 的齐次泊松测度 (§3a). 如所周知 (参见例如, [250; 第 III 章, §2c]), 在满足线性增长条件的 (局部) Lipschitz 系数的情形下, (有初始条件 $H_0 = \mathrm{Const}$ 的) 随机微分方程 (3) 有唯一强解 (第 III 章 §3e). 这时竟然有: 不管其上定义布朗运动和泊松测度的原来的测度是什么, 解过程 H 在典则空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率分布唯一确定.

过程 H 是有三元组 (B, C, ν) 的半鞅, 其中

$$B_t(\omega) = \int_0^t b(s, \omega_s)ds,$$

$$C_t(\omega) = \int_0^t \sigma^2(s, \omega_s)ds,$$

$$\nu(dt, dx; \omega) = dtK_t(\omega_t, dx),$$

以及 $K_t(\omega_t, A) = \int I_{A\setminus\{0\}}(\delta(t,\omega_t,x))F(dx)$.

这样一来, 在对系数具有所陈述的条件 (局部 Lipschitz 条件和线性增长) 下, 可以断定, 每个局部鞅 $N = (N_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 有 "$(H^c, \mu-\nu)$-表示". (详情参见 [250; 第 III 章, §2a].)

§3g. 半鞅的 Girsanov 定理. 概率测度的密度结构

1. 如果 $M = (M_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的局部鞅, 并且测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 那么关于这个测度, 过程 M 也是半鞅 (参见 §3e 中的 (7)).

尤其引人注目的是: 关于这样的测度替换, 半鞅还是变为半鞅. 换句话说, 半鞅类关于局部连续测度替换是稳定的. (这个结果是半鞅的 Itô 公式 (第三章 §5c) 的简单推论.)

从金融数学的无套利机会的视角来看, 特别有意义的问题在于, 对于怎样的有性质为 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ 或 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 所考察的比如描述价格动态变化的半鞅 X 是局部鞅或鞅.

2. 求解这一问题的重要途径之一在于阐明, 当测度 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 进行局部绝对连续替换时, 有三元组 (B, C, ν) 的半鞅的 (关于测度 P 的) 典则表示式

$$X = X_0 + B + X^c + g*(\mu-\nu) + (x-g(x))*\mu \tag{1}$$

怎样变换为有新的三元组 $(\widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{\nu})$ 的该半鞅的 (关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的) 典则表示式

$$X = X_0 + \widetilde{B} + X^c + g*(\mu-\widetilde{\nu}) + (x-g(x))*\mu. \tag{2}$$

设 $Z_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$, $t \geqslant 0$. 令

$$\beta = \frac{d\langle Z_c, X^c\rangle}{d\langle X^c, X^c\rangle} \cdot \frac{I(Z_- > 0)}{Z_-}, \tag{3}$$

$$Y = \mathsf{E}^{\mathsf{P}}_{\mu}\left(\frac{Z}{Z_-} I(Z_- > 0) \,\Big|\, \widetilde{\mathcal{P}}\right), \tag{4}$$

其中 $\mathsf{E}^{\mathsf{P}}_{\mu}$ 为关于 $(\Omega\times\mathbb{R}_+\times E, \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{E})$ 上的测度 M^{P}_{μ} 的均值, 它由公式 $W * M^{\mathsf{P}}_{\mu} = \mathsf{E}(W*\mu)$ 对于所有可测非负函数 $W = W(\omega, t, x)$ 有定义. (比较第五章 §3e 中的 $Y_n(x,\omega)$, $M_n(dx, d\omega)$ 的定义.)

过程 β 和 Y 在测度替换时的三元组变换问题上起着关键作用, 而下列结果经常称为半鞅的 "Girsanov 定理".

定理 1. *设 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $Z_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$, $t \geqslant 0$, 而过程 β 和 Y 由 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 按照公式 (2) 和 (4) 来定义.*

那么由下列公式定义的 $\widetilde{B}, \widetilde{C}$ 和 $\widetilde{\nu}$:

$$\widetilde{B} = B + \beta \cdot C + g(x)(Y-1) * \nu, \tag{5}$$

$$\widetilde{C} = C, \tag{6}$$

$$\widetilde{\nu} = Y \cdot \nu, \tag{7}$$

给定了半鞅 X 按测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的三元组文本.

这一定理的证明 (不仅是在所陈述的一维半鞅情形下, 并且也在多维情形下) 在 [250; 第 III 章, §3d] 中给出, 在技巧方面是相当困难的. 证明的细节可在所指出的专著中找到, 这里我们介绍这一定理的断言内容.

首先我们注意到, 对于离散时间情形, 对应的结果在第五章 §3e 中证明, 其中说明了测度 M_μ^{P} 和量 Y 的 (按时间) 离散类比的含义.

断言 (5) 指出, 三元组 (B, C, ν) 的 B 成分怎样变换 "更新".

断言 (6) 是说, 连续鞅成分 X^c 的平方特征其实在绝对连续测度变换下是不变的 (精确到 $\widetilde{\mathsf{P}}$-随机等价性).

断言 (7) 指出, Y 无非就是测度 $\widetilde{\nu}$ 关于测度 ν 的 Radon-Nikodym 导数.

3. 如果半鞅 X 是特殊半鞅, 那么在典则表示式 (2) 中可令 $g(x) = x$, 于是

$$X = X_0 + B + X^c + x * (\mu - \nu). \tag{8}$$

由此可见, 特殊半鞅 X 是局部鞅只需 $B \equiv 0$. 与定理 1 一起, 这一注记导致下列命题.

定理 2. 设 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, 并且这时 $(x^2 \wedge |x|) * \widetilde{\nu} \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$. 那么关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的特殊半鞅 X 为局部鞅只需

$$B + \beta \cdot C + x(Y-1) * \nu \equiv 0. \tag{9}$$

4. 公式 (3) 和 (4) 表明, 已知 $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$, 怎样求得 β 和 Y. 现在自然会提出反问题, 怎样由 β 和 Y 来求得对应的过程 Z.

这一问题的求解开发了构造使得半鞅变为局部鞅的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的途径. 事实上, 如果 β 和 Y 满足条件 (9), 并根据它们建立过程 Z, 那么按照有 $d\widetilde{\mathsf{P}} = Z_T d\mathsf{P}_T$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 过程 $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ 将在 $[0, T]$ 上为局部鞅.

设 X 为给定在典则空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的半鞅. 假定, 每个 P-鞅 M 有 "$(X^c, \mu - \nu)$-表示式":

$$M = M_0 + f \cdot X^c + W * (\mu - \nu). \tag{10}$$

(参见 §3f 中的公式 (1).)

定理 3. 设 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 是密度过程, $\nu(\{t\}\times E;\omega)=0$, $t>0$, β 和 Y 按公式 (3) 和 (4) 定义. 那么 (当 “$(X^c,\mu-\nu)$-可表示性” 性质满足时) 过程 Z 满足关系式

$$Z = Z_0 + (Z_-\beta)\cdot X^c + Z_-(Y-1)*(\mu-\nu). \tag{11}$$

如果对所有 $t>0$ 有

$$\beta^2\cdot\langle X^c\rangle_t + (1-\sqrt{Y})^2 * \nu_t < \infty, \tag{12}$$

那么有

$$N_t = \beta\cdot X_t^c + (Y-1)*(\mu-\nu)_t \tag{13}$$

的过程 $N=(N_t)_{t\geqslant 0}$ 是局部鞅. 过程 $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 是下列 *Doléan* 方程的解:

$$dZ = Z_- dN, \tag{14}$$

并且可表示为下列形式:

$$Z_t = Z_0\mathscr{E}(N)_t, \tag{15}$$

其中

$$\mathscr{E}(N)_t = e^{N_t - \frac{1}{2}(\beta^2 C)_t}\prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta N_s)e^{-\Delta N_s}. \tag{16}$$

所引入的定理陈述假定 $\nu(\{t\}\times E;\omega)=0$. 这个条件意味着, 过程 X 是拟左连续的, 即, 对于任何可料停时 τ, 量 $\Delta X_\tau = 0$ 在集合 $\{\tau<\infty\}$ 上成立. 在一般情形下, 对应的陈述及其证明在 [250; 第 III 章, §5a] 中给出.

注. 关于定理 2 和 3 的结果在扩散模型中的直接应用参见下面的 §4a.

4. 在股票扩散模型中的套利、完全性和对冲定价

§4a. 套利和无套利条件. 完全性

1. 无论是在离散情形下, 还是在连续时间情形下, 前面都已经对使价格为鞅或者局部鞅的概率测度的构造赋予足够多的关注. 与此相联系的主要是, 存在等价鞅测度在足够广的假定下, 可用来断定无套利机会 (参见 §§2b, c). 同时, 所有这样的测度的集合的价值在于, 运用鞅技巧, 可导出例如公平 (合理) 价格的计算, 求出对冲策略等等.

在本节中, 无套利机会的问题将对于价格是 *Itô* 过程 (第三章 §3d) 的情形来讨论.

2. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 为概率空间, 其上给定布朗运动 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$. 我们将以 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 表示布朗 (维纳) 渗透 σ-代数流, 即 σ-代数 $\mathscr{F}_t=\sigma(\mathscr{F}_t^0\cup\mathscr{N})$ 的流, 其中 $\mathscr{F}_t^0=$

$\sigma(B_s, s \leqslant t)$ 以及 $\mathscr{N} = \{A \in \mathscr{F} : \mathsf{P}(A) = 0\}$. (详情参见第三章 §3a.) 这时将假定 $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_t \ (\equiv \sigma(\bigcup \mathscr{F}_t))$.

渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 满足常设条件 (第三章 §3b[①]), 并将作为描述概率统计不确定性和可接受信息结构的随机基底来考察.

设 $S_t = S_0 e^{H_t}$ 为某种资产的价格过程 $(S_0 > 0)$, 比如, 有

$$H_t = \int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) dx + \int_0^t \sigma_s dB_s \tag{1}$$

的股票的价格过程, 其中 $\mu = (\mu_t, \mathscr{F}_t)$ 和 $\sigma = (\sigma_t, \mathscr{F}_t)$ 为两个随机过程, 满足 (P-a.s.) 条件

$$\int_0^t |\mu_s| ds < \infty, \ \int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty, \quad t > 0. \tag{2}$$

由 Itô 公式得到,

$$dS_t = S_t d\widehat{H}_t, \tag{3}$$

其中

$$\widehat{H}_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \tag{4}$$

即 S 有随机微分

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t). \tag{5}$$

如果 $\mu_t \equiv \mu$, $\sigma_t \equiv \sigma \neq 0$, 那么我们得到标准 *Samuelson* 扩散模型 ([420]), 它用几何布朗运动来描述股票价格的动态变化 (第三章 §4b):

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t). \tag{6}$$

令

$$Z_t = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma} B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 t\right). \tag{7}$$

那么 $\mathsf{E} Z_t = 1$, 并由 *Girsanov* 定理 (参见第三章 §3b 或 §3e) 得到, 对于每个 $T > 0$, 关于有

$$d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}_T \tag{8}$$

的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ (其中 $\mathsf{P}_T = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}_T$), 过程 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 变为鞅, 且其微分为

$$dS_t = \sigma S_t d\widetilde{B}_t, \tag{9}$$

其中 $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ 是 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-标准布朗运动.

这样一来, 在 $\mathsf{E} Z_T = 1$ 的情形下, 在 $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ 上构建的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 等价于测度 P_T $(\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T)$, 且关于它过程 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ 为鞅.

① 原版和英文版此处记为 §3a. —— 译者注

注意到以下这点是有益的: 这一测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 在下列含义下唯一: 如果 Q_T 为另一个有性质 $\mathsf{Q}_T \sim \mathsf{P}_T$ 以及关于 Q_T 过程 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ 为局部鞅的测度, 那么 $\mathsf{Q}_T = \widetilde{\mathsf{P}}_T$. 这个结果以最直接的方式与关于布朗渗透 σ-代数流的局部鞅表示定理相联系, 其证明在下面的第 5 点中给出.

3. 现在我们转向价格过程 S 有微分 (5) 的情形.

设下列条件满足: P-a.s. 对于 $t > 0$,

$$\sigma_t > 0 \tag{10}$$

和

$$\int_0^t \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds < \infty. \tag{11}$$

在这些条件下定义过程 $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$,

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mu_s}{\sigma_s} dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds\right), \tag{12}$$

它是正局部鞅, 其局部化序列 $(\tau_n)_{n \geqslant 1}$ 可取为下列序列:

$$\tau_n = \inf\left\{t\colon \int_0^t \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds \geqslant n\right\}. \tag{13}$$

如果 $\mathsf{E}Z_T = 1$, 那么 $Z = (Z_t)_{t \leqslant T}$ 为鞅, 有 $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}_T$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 将是概率测度, 并且关于该测度过程 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ 为局部鞅.

为证明后一断言, 我们运用 §3g 中的定理 2 的结果.

由于

$$dZ_t = -Z_t \frac{\mu_t}{\sigma_t} dB_t, \tag{14}$$

故 (参见 §3g 中的 (3))

$$\beta_t = \frac{d\langle Z^c, S^c\rangle}{d\langle S^c, S^c\rangle} \cdot Z_t^{-1} = -\frac{\frac{\mu_t}{\sigma_t} \cdot S_t \sigma_t}{(S_t \sigma_t)^2} = -\frac{\mu_t}{\sigma_t} \cdot \frac{1}{S_t \sigma_t}. \tag{15}$$

关于测度P 半鞅 S 有下列三元组 (B, C, ν): $\nu \equiv 0$,

$$B_t = \int_0^t S_u \mu_u du, \quad C_t = \int_0^t S_u^2 \sigma_u^2 du. \tag{16}$$

但

$$B_t + \int_0^t \beta_u dC_u = \int_0^t \left[S_u \mu_u - \frac{\mu_u S_u^2 \sigma_u^2}{\sigma_u \cdot S_u \sigma_u}\right] du = 0.$$

因此, 根据 §3g 中的定理 2 的断言, 过程 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 变为局部鞅. 这时 (在 $\mathsf{E}Z_T = 1$ 的假定下), 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 将如同在 $\mu_t \equiv \mu$ 和 $\sigma_t \equiv \sigma$ 的情形下是一样的 (参见下面的第 5 点).

4. 现在我们对于有 $B_t(0) \equiv 1$ 的银行账户 $B(0) = (B_t(0))_{t\geqslant 0}$ 和动态变化在 (5) 中描述的股票 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 的市场模型, 陈述确保无套利 (以其 $\overline{NA}_+$ 文本; 参见 §2a) 的条件.

设 $\pi = (\beta, \gamma)$ 为某个策略以及 $X^\pi = (X_t^\pi)_{t\geqslant 0}$ 为其资本,

$$X_t^\pi = \beta_t + \gamma_t S_t.$$

对于自融资策略 π,

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_u dS_u, \tag{17}$$

它自然意味着 (17) 中的随机积分必须有定义.

正如由 §1a 中的叙述所得到, (17) 中的随机积分有定义只需 $\gamma \in L(S)$. 在现在所考察的模型 (5) 中, γ 关于 S 的可积性条件自然直接由过程 $(\mu_t)_{t\leqslant T}$ 和 $(\sigma_t)_{t\leqslant T}$ 的性质的术语来表达.

我们将假定, 条件 (2), (10), (11) 满足, 并且

$$\int_0^t \gamma_u^2 \sigma_u^2 du < \infty \ (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \quad t > 0. \tag{18}$$

由后一条件和过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 的连续性导出 $\int_0^t S_u^2 \gamma_u^2 \sigma_u^2 du < \infty$ (P-a.s.), 而这就是说, 关于布朗运动的随机积分 $\int_0^t S_u \gamma_u \sigma_u dB_u$ 有定义 (参见第三章 §3c 和本章中的 §1a).

同时,

$$\left(\int_0^t |\gamma_u \mu_u| du\right)^2 \leqslant \int_0^t (\gamma_u \sigma_u)^2 du \cdot \int_0^t \left(\frac{\mu_u}{\sigma_u}\right)^2 du.$$

因此, 由 (11) 和 (18) 导出积分 $\int_0^t \gamma_u \mu_u du$ 和 $\int_0^t S_u \gamma_u \mu_u du$ $(t > 0)$ 的存在和有限性 (P-a.s.).

这样, 条件 (2), (10), (11) 和 (18) 保证 (17) 中的随机积分的存在.

下列由 §2b 中的第 3 点和定理 2 的蕴涵关系 (9) 直接导出的结果是关于扩散模型中的无套利的最著名的断言.

定理. 设股票价格 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 有微分 (5), 并对于 $t \leqslant T$ 条件 (2), (10), (11) 和 (18) 满足.

设 $\mathsf{E} Z_t = 1$. 那么性质 $\overline{NA}_+$ 满足, 特别是, 在 a-容许自融资策略类中, 对任何 $a \geqslant 0$ 无套利机会.

5. 我们转向第 2 点中提到的断言: 有 $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}_T$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ (其中 Z_T 在 (7) 中定义) 在下列含义下唯一: 这是关于它过程 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ 变为局部鞅的等价于 P_T 的唯一的测度.

我们将考察更一般的情形, 认为, 过程 S 在 (5) 中定义, 而过程 Z 在 (12) 中定义.

我们假定, Q_T 为等价于测度 P_T 的某个测度, 关于它 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ 为局部鞅.

我们构成鞅

$$N_t = \mathsf{E}\left(\frac{d\mathsf{Q}_T}{d\mathsf{P}_T} \,\Big|\, \mathscr{F}_t\right), \quad t \leqslant T. \tag{19}$$

由于其正性 (参见第三章 §3c 中的 (20)), 可求得过程 $\varphi = (\varphi_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ 满足

$$N_t = \exp\left(\int_0^t \varphi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds\right), \quad t \leqslant T, \tag{20}$$

其中 $\int_0^T \varphi_s^2 ds < \infty$ (P-a.s.), $\mathsf{E}N_T = 1$.

我们运用 §3g 中的定理 1, 它指出在测度的绝对连续替换下, 半鞅的可料特征的三元组怎样变换.

设 $(B^{\mathsf{P}}, C^{\mathsf{P}}, \nu^{\mathsf{P}})$ 为过程 S 关于测度 P 的三元组. 由表示式 (5) 得到,

$$B_t^{\mathsf{P}} = \int_0^t S_u \mu_u du, \quad C_t^{\mathsf{P}} = \int_0^t S_u^2 \sigma_u^2 du, \quad \nu^{\mathsf{P}} \equiv 0. \tag{21}$$

根据 §3g 中的定理 1, 关于测度 Q 的三元组 $(B^{\mathsf{Q}}, C^{\mathsf{Q}}, \nu^{\mathsf{Q}})$ 由下列公式来确定:

$$\begin{aligned} B_t^{\mathsf{Q}} &= B_t^{\mathsf{P}} + \int_0^t \beta_u dC^{\mathsf{P}}, \\ C_t^{\mathsf{Q}} &= C_t^{\mathsf{P}}, \\ \nu^{\mathsf{Q}} &\equiv 0, \end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\beta_t = \frac{d\langle N^c, S^c\rangle_t}{d\langle S^c, S^c\rangle_t} \cdot \frac{1}{N_t} = \frac{\varphi_t}{S_t \sigma_t}. \tag{23}$$

这样, 由 (21) 和 (22),

$$B_t^{\mathsf{Q}} = \int_0^t S_u[\mu_u + \varphi_u \sigma_u] du. \tag{24}$$

由于关于测度 Q_T, 过程 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ 是局部鞅, 故 $B_t^{\mathsf{Q}} = 0$ (P-a.s.), $t \leqslant T$. 因此, 由 (24) 我们断定,

$$\varphi_u(\omega) = -\frac{\mu_u(\omega)}{\sigma_u(\omega)}$$

在 $[0, T] \times \Omega$ 上 $(\lambda \times \mathsf{P}_T)$-a.s. 成立, 其中 λ 为 Lebesgue 测度.

由此导出, 过程 $Z = (Z_t)_{t \leqslant T}$ 和 $N = (N_t)_{t \leqslant T}$ 随机无区别, 这就证明了满足 $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$ 和 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)$ 为 $\widetilde{\mathsf{P}}$-局部鞅的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 的唯一性.

6. 我们考察 T-完全性问题 (参见 §2d 中的定义). 我们将假定上面引入的定理条件满足. 我们也假定, $(B(0), S)$-市场满足 $B_t(0) \equiv 1$ 和过程 $S = (S_t)_{t \leqslant T}$ 关于测度 $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}_T$ 为鞅. 于是由前面所建立的 (局部鞅) 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 的唯一性以及 §2d 中的定理, 所考察的扩散模型是 T-完全的.

T-完全 (以及按 $\overline{NA}_+$ 和 $\overline{NA}_g$ 的无套利文本的) 模型的经典例子当然是几何布朗运动 (6), 它也在金融数学和金融工程中多方面广泛流传.

§4b. 完全市场中的对冲价格

1. 对于离散情形下的完全和不完全市场的对冲表示和求 "对冲价格" 的方法已经在第六章中给出.

在一般的半鞅模型中, 对应的叙述可平行地进行, 仅有的例外似乎是需要清晰地说出怎样的策略类是容许策略.

我们将着手于在 §4a 的第 4 点中描述的 $(B(0), S)$-市场的扩散模型, 并沿用在那一节中所采用的记号.

对前面 (§2d) 引入的 T-完全性概念作某些外观上的变化, 我们将说, 有 $\mathsf{E} Z_T f_T < \infty$ 的非负 $\mathscr{F}_T$-可测偿付索求 f_T 是可复制的 (可达的), 是指可求得策略 $\pi \in \Pi_+(S)$, 使得 $X_T^\pi = f_T$ (P-a.s.). 显然, 如果 f_T 有界, 那么条件 $\mathsf{E} Z_T f_T < \infty$ 满足.

定义. 如果偿付索求 f_T 可复制, 那么下列量称为欧式 (完善) 对冲价格 (比较第六章 §1b 中的术语), 或者简称价格:

$$\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P}) = \inf\{x \geqslant 0 \colon \exists \pi \in \Pi_+(S), \text{ 使得 } X_0^\pi = x,\ X_T^\pi = f_T\}. \tag{1}$$

2. 定理. 设 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 为唯一的鞅测度. 于是价格

$$\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P}) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} f_T \ (= \mathsf{E} Z_T f_T). \tag{2}$$

证明. 如果 $\pi = (\beta, \gamma)$ 是 a-容许自融资策略, 那么

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_u dS_u, \quad t \leqslant T, \tag{3}$$

并且 (根据 Ansel-Stricker 定理; 参见 §1a, 第 6 点) $X^\pi = (X_t^\pi)_{t \leqslant T}$ 为 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-上鞅, 而这就是说,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} X_T^\pi \leqslant X_0^\pi. \tag{4}$$

因此, 如果 $X_T^\pi = f_T$, 那么 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} f_T \leqslant X_0^\pi$ 以及

$$\mathsf{E} Z_T f_T = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} f_T \leqslant \mathbb{C}(f_T; \mathsf{P}). \tag{5}$$

现在我们指出, 存在有初始资本 $X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathsf{E} Z_T f_T$ 的 0-容许自融资策略 $\widetilde{\pi}$ 复制 f_T, 即 $X_T^{\widetilde{\pi}} = f_T$ (P-a.s.).

定义过程

$$X_t = \mathsf{E}(Z_T f_T \mid \mathscr{F}_t), \quad t \leqslant T. \tag{6}$$

很明显, $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ 关于 "布朗渗透 σ-代数流" 为鞅, 并且根据表示定理 (参见第三章 §3c), 可求得这样的有 $\int_0^T \psi_s^2 ds < \infty$ 的过程 $\psi = (\psi_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$, 使得

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s dB_s. \tag{7}$$

我们察觉, 过程 $(Z_t^{-1} X_t)_{t \leqslant T}$ 复制了 f_T:

$$Z_T^{-1} X_T = f_T. \tag{8}$$

现在我们指出, 可求得 0-容许自融资组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$, 使得

$$X_t^{\widetilde{\pi}} = Z_t^{-1} X_t. \tag{9}$$

由于

$$dZ_t = -Z_t \frac{\mu_t}{\sigma_t} dB_t, \tag{10}$$

故由 Itô 公式 (第三章 §3d)

$$d(Z_t^{-1}) = Z_t^{-1} \left(\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t} \right)^2 dt + \frac{\mu_t}{\sigma_t} dB_t \right), \tag{11}$$

以及

$$\begin{aligned} d(Z_t^{-1} X_t) &= Z_t^{-1} dX_t + X_t d(Z_t^{-1}) + d(Z_t^{-1}) dX_t \\ &= Z_t^{-1} (\psi_t dB_t) + X_t Z_t^{-1} \left(\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t} \right)^2 dt + \frac{\mu_t}{\sigma_t} dB_t \right) + Z_t^{-1} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_t} \psi_t \right) dt \qquad (12) \\ &= Z_t^{-1} \psi_t \left(dB_t + \frac{\mu_t}{\sigma_t} dt \right) + X_t Z_t^{-1} \frac{\mu_t}{\sigma_t} \left(dB_t + \frac{\mu_t}{\sigma_t} dt \right) \\ &= S_t (\sigma_t dB_t + \mu_t dt) \left[S_t^{-1} Z_t^{-1} \left(\frac{\psi_t}{\sigma_t} + X_t \frac{\mu_t}{\sigma_t^2} \right) \right]. \qquad (13) \end{aligned}$$

令

$$\widetilde{\gamma}_t = S_t^{-1} Z_t^{-1} \left(\frac{\psi_t}{\sigma_t} + X_t \frac{\mu_t}{\sigma_t^2} \right). \tag{14}$$

于是我们看到,

$$d(Z_t^{-1} X_t) = \widetilde{\gamma}_t dS_t, \tag{15}$$

并且

$$\int_0^t \widetilde{\gamma}_u^2 \sigma_u^2 du < \infty \ (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \quad t \leqslant T. \tag{16}$$

(比较 (16) 与 §4a 中的 (18).)

因此, 对于 $t \leqslant T$,

$$Z_t^{-1} X_t = \mathsf{E}(Z_T f_T) + \int_0^t \widetilde{\gamma}_u dS_u. \tag{17}$$

令

$$\widetilde{\beta}_t = Z_t^{-1} X_t - \widetilde{\gamma}_t S_t, \tag{18}$$

我们求得, (由 (15)) 策略 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 是自融资的, 且有资本 $X^{\widetilde{\pi}} = (X_t^{\widetilde{\pi}})_{t \leqslant T}$, 满足

$$X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathsf{E}(Z_T f_T), \tag{19}$$

以及

$$X_t^{\widetilde{\pi}} = Z_t^{-1} X_t, \quad X_T^{\widetilde{\pi}} = f_T. \tag{20}$$

由 (5), 比较 (19) 和 (20), 我们得到所要求的等式 (2). 我们察觉, 所构造的策略 $\widetilde{\pi}$ 为 0-容许策略, 因为 $X_t^{\widetilde{\pi}} \geqslant 0$, $t \leqslant T$.

§4c. 对冲价格的基本偏微分方程

1. 我们将考察由无风险资产: 有零利率的银行账户 $(B_t(0) \equiv 1)$ 以及风险资产 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 所组成的市场模型, 其中后者的动态变化由 §4a 中的关系式 (5) 来描述.

正如由 §4b 中的定理得到, 对冲价格 $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ 和对应的对冲组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 可通过考察过程 $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ 的性质来求得, 其中

$$Y_t = Z_t^{-1} \mathsf{E}(Z_T f_T \mid \mathscr{F}_t). \tag{1}$$

这时, 值

$$Y_0 = \mathsf{E}(Z_T f_T) \tag{2}$$

恰好是价格 $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$,

$$Y_T = f_T, \tag{3}$$

以及 $Y_t = X_t^{\widetilde{\pi}}$, 即 Y_t 为时刻 $t \leqslant T$ 的对冲组合的资本值. (这说明了 Y 为什么称为 "对冲价格过程". 所叙述的求出 $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ 的方法本身, 正如我们已经不止一次地注意到, 通常称为 "鞅方法".)

在许多情形下, 可成功地显式求得 $\mathsf{E}(Z_T f_T)$, 从而给出价格 $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ 的值. 特别是, 这点可在 *Black-Merton-Scholes* 模型中做到, 其中 μ_t 和 σ_t 为常数. (参见后面的第八章.)

2. 在发表于 1973 年的 F. Black 和 M. Scholes 的著作 [44] 以及 R. Merton 的著作 [346] 中, 提出了另一种求出价格 $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ 和对冲策略的方法, 它们基于他们得到的所谓基本方程的讨论.

这种在金融数学文献中广为流传的方法 (特别是参见后面的 §5c) 的本质如后所述.

我们考察 (1) 中定义的过程 Y_t. 由于

$$Z_t^{-1}Z_T = \exp\left(-\int_t^T \frac{\mu(u,S_u)}{\sigma(u,S_u)}dB_u - \frac{1}{2}\int_t^T \left(\frac{\mu(u,S_u)}{\sigma(u,S_u)}\right)^2 du\right), \tag{4}$$

以及 $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ 为 Markov 过程, 故在 $f_T = f(T, S_T)$ 的假定下, 我们求得, 过程 $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ 也是 Markov 过程, 并且 Y_t 可表示为 $Y(t, S_t)$ 的形式, 其中 $Y(t,x)$ 为某个可测函数.

在著作 [44] 和 [346] 中, 作者干脆从下列假定出发: 对冲组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 存在, 并且其在时刻 t 的资本 Y_t $(= X_t^{\widetilde{\pi}})$ 不依赖于所有过去的历史 $(S_u, u \leqslant t)$, 而只依赖于最后时刻的值, 即只依赖于 S_t.

对于可描述的方法的别的先验假定在于函数 $Y(t,x)$ 被认为是 $C^{1,2}$ 类的函数. 这一假定使得有可能把 Itô 公式用于 $Y(t, S_t)$, 而导出下列随机偏微分方程 (为简化记法, 忽略函数的变量):

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \mu S\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial Y}{\partial S}dB. \tag{5}$$

我们现在考察 Y 的另一种表示:

$$Y(t, S_t) = X_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_t + \widetilde{\gamma}_t S_t. \tag{6}$$

由自融资性,

$$dY = \widetilde{\gamma}_t dS_t = \widetilde{\gamma}_t S_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t). \tag{7}$$

有了特殊半鞅 $Y = Y(t, S_t)$ 的两种表示 (5) 和 (7), 并运用特殊半鞅分解的唯一性 (参见第三章 §5b), 我们求得, 在 (5) 和 (7) 中的 dB (以及对应的 dt) 的表达式重合.

因此, 由于 $S_t > 0$, $t > 0$, 故 (P-a.s.) 有

$$\widetilde{\gamma}_t = \frac{\partial Y}{\partial S}(t, S_t), \tag{8}$$

并且更有过程 $(\widetilde{\gamma}_t)_{t\leqslant T}$ 和 $\left(\dfrac{\partial Y}{\partial S}(t, S_t)\right)_{t\leqslant T}$ 随机无区别.

比较 (5) 和 (7) 中的 dt 项, 并考虑所得到的关系式 (8), 我们得到, 必定 ($(\lambda\times$ P)-a.s., λ 为 $[0,T]$ 上的 Lebesgue 测度) 有下列方程成立:

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t)S_t^2\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}(t, S_t) = 0, \quad 0 \leqslant t < T.$$

如果函数 $Y = Y(t,S)$ 满足下列偏微分基本方程: 对于 $0 \leqslant t < T, 0 < S < \infty$,

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,S_t)S^2\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}(t,s) = 0, \tag{9}$$

且有边界条件

$$Y(T,S) = f(T,S), \quad S > 0, \tag{10}$$

那么上述方程显然照样满足. (把 (9) 与第三章 §3f 中的 *Kolmogorov* 反向方程 (6) 相比较.)

对这一方程的求解问题, 至少对于 $\sigma(t,s) \equiv \sigma = \text{Const}$ 的情形下, 归结为标准 Feyman-Kac 方程的求解 (参见第三章 §3f 中的 (19)); 我们将在第八章中对于 $f(T,S) = (S-K)^+$ 的情形考察它与 *Black-Scholes* 公式直接的联系.

现在再注意下列状况.

假定, 问题 (9)–(10) 的解存在唯一. 于是我们按公式 (8) 求得 $\widetilde{\gamma}_t$, 并定义 $\widetilde{\beta}_t$ 为

$$\widetilde{\beta}_t = Y(t,S_t) - \widetilde{\gamma}_t S_t. \tag{11}$$

很明显, 由这样的 $\widetilde{\gamma}_t$ 和 $\widetilde{\beta}_t$ 的定义, 组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ 有资本 $X_t^{\widetilde{\pi}}$ 刚好等于 $Y(t,S_t)$.

当然, 先验上并不明显, 为什么按照问题 (9)–(10) 的解 $Y(t,S)$ 所构建的这一组合 $\widetilde{\pi}$ 是自融资的, 即满足关系式

$$dY(t,S_t) = \widetilde{\gamma}_t dS_t. \tag{12}$$

然而, 这直接由 (5) 和 (9) 得到

$$\begin{aligned} dY(t,S_t) &= S_t\left(\mu_t\frac{\partial Y}{\partial S}dt + \sigma_t\frac{\partial T}{\partial S}dB_t\right) \\ &= S_t\frac{\partial Y}{\partial S}(\mu_t dt + \sigma_t dB_t) = \widetilde{\gamma}_t dS_t. \end{aligned} \tag{13}$$

这样, 设问题 (9)–(10) 有且仅有唯一解 $Y(t,S)$.

于是对于所构建的组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$, 其资本 $X_t^{\widetilde{\pi}}$ 将等于 $Y(t,S_t)$. 这样 $X_T^{\widetilde{\pi}} = f(T,S_T)$, 而 $X_0^{\widetilde{\pi}} = Y(0,S_0)$ 将是组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ 的初始价格.

下列启发式思考表明, (作为问题 (9)–(10) 的解的结果,) 所求得的价格 $X_0^{\widetilde{\pi}} = Y(0,S_0)$ 具有 “合理性”、“公平性” 和 “无套利性”, 而组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ 将是 “最优” 对冲.

其实, 我们将把所考察的问题解释为欧式买入期权出售者构造对冲组合的问题, 后者的目标在于构建使其资本恰好复制偿付函数 $f(T,S_T)$ 的组合. 由问题 (9)–(10) 的求解得到, 以价格 $C = Y(0,S_0)$ 出售这一期权的出售者能做到构建策略 $\widetilde{\pi}$, 使得其资本 $X_T^{\widetilde{\pi}}$ 将等于 $f(T,S_T)$.

我们现在设想, 该期权合约所指派的价格 C 高于 $Y(0,S_0)$, 而购买者同意这一价格. 那么很明显, 这将处于套利局面, 因为出售者获得纯利润 $C-Y(0,S_0)$; 这时, 由于存在从初始价格 $Y(0,S_0)$ 出发的对冲策略能恰好复制偿付索求, 使得期权合约的所有条件都能满足.

另一方面, 如果期权价格 $C<Y(0,S_0)$, 那么问题 (9)–(10) 的唯一解不能保证满足期权合约条件 (至少在 Markov 策略类中). 而如果在证券市场上交易这样的期权, 那么就会引起对它的收购, 然后再以 (较高的) 价格 $Y(0,S_0)$ 出售.

所描述的基于 "基本方程" 解的方法有某些由一系列先验假设的概念所造成的弱点: 对冲组合的价格的 "Markov 结构", 即 $X_t^{\widetilde{\pi}}=Y(t,S_t)$; 函数 $Y(t,S)$ 属于 $C^{1,2}$ 类 (为了有可能应用 Itô 公式).

幸而, 为了求解所考察的问题, 还有另一种构建对冲策略和求出 "合理" 价格 $\mathbb{C}(f_T;\mathsf{P})$ 的方法 (例如, 在 §4b 中所叙述的 "鞅方法"), 它表明, 不但对冲组合存在, 并且其价格有形式为 $Y(t,S_t)$, 而它还是足够光滑的; 因而, 方程 (9) 实际上是成立的. 对于有 $f(T,S_T)=(S_T-K)^+$ 的标准欧式买入期权, 更详尽的分析将在第八章 §1b 中引入, 在那里, 既对 "鞅方法", 也对依靠上面所考察的 "基本方程" 的方法来进行讨论和运用.

3. 上面引入的讨论假定, 无风险资产 (银行账户) $B(0)=(B_t(0))_{t\geqslant 0}$ 满足 $B_t(0)\equiv 1$. 实质上, 这一假定意味着, 我们运作的是折现价格. 然而, 在许多情形下, 所进行的运作并非关于由折现而得到的 "相对" 价格, 而是 "绝对" 价格. 与此相对应的变化为, 假定 (在 "绝对" 单位下) 银行账户 $B(r)=(B_t(r))_{t\geqslant 0}$ 有下列形式:

$$B_t(r)=B_0(r)\exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \tag{14}$$

其中 $(r_t)_{t\geqslant 0}$ 为确定的非负函数 (利率), 而风险资产 (股票) $S=(S_t(\mu,\sigma))_{t\geqslant 0}$, 其中

$$dS_t(\mu,\sigma)=S_t(\mu,\sigma)(\mu_t dt+\sigma_t dB_t), \tag{15}$$

$S_0(\mu,\sigma)=S_0>0$. (对 μ_t, σ_t 和布朗运动 $B=(B_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的假定与 §4a 中一样.)

设 $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ 为自融资组合,

$$X_t^{\widetilde{\pi}}=\widetilde{\beta}_t B_t(r)+\widetilde{\gamma}_t S_t(\mu,\sigma). \tag{16}$$

我们将假定, $X_t^{\widetilde{\pi}}$ 有下列形式:

$$X_t^{\widetilde{\pi}}=Y(t,S_t),$$

其中 $S_t=S_t(\mu,\sigma)$ 和 $Y(t,s)\in C^{1,2}$. 于是对于 $Y=Y(t,S)$ 我们得到同样的方程 (5).

另一方面, 由于

$$dB_t(r)=r_t B_t(r)dt, \tag{17}$$

故考虑到自融资性, 我们求得

$$dY(t,S_t)=dX_t^{\widetilde{\pi}}=(\widetilde{\gamma}_t\mu_tS_t+\widetilde{\beta}_tr_tB_t(r))dt+\widetilde{\gamma}_t\sigma_tS_tdB_t. \tag{18}$$

比较 (5) 和 (18) 中的 dB 项, 我们再次得到 $\widetilde{\gamma}_t=\dfrac{\partial Y}{\partial S}(t,S_t)$.

由 (16),

$$\widetilde{\beta}_t=\frac{1}{B_t(r)}\left(Y(t,S_t)-S_t\frac{\partial Y}{\partial S}(t,S_t)\right),$$

并且正如推导 (9) 时那样, 我们看到, (5) 和 (18) 中的 dt 项将重合, 只要 $Y(t,S)$ 满足下列基本方程: 对于 $S\in\mathbb{R}_+$ 和 $0\leqslant t<T$,

$$\frac{\partial Y}{\partial t}+rS\frac{\partial Y}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2Y}{\partial S^2}=rY, \tag{19}$$

其边界条件为 $Y(T,S)=f(T,S)$, $S\in\mathbb{R}_+$.

现在注意到以下这点是有益的: 无论是在方程中, 还是在边界条件中, $\mu=\mu(t,S)$ 都不出现, 从而 $Y(0,S_0)$ 不依赖于 μ. 初看起来, 这多少有点令人惊讶. (当然, 尽管这一性质可以讨论, 它在下列含义下是可期待的: 不同的投资者可能对 μ 和 σ 的值有不同的偏好, 而这就是说, 价格过程 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 原来的动态变化有不同的表示.) 看来, 最好的解释是从 “鞅方法” 的观点来给出的, 根据这一方法, 价格

$$Y(0,S_0)=\mathbb{C}(f_T;\mathsf{P})=\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}f(T,S_T)$$

(参见 §4b 中的公式 (2)), 而对于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, 根据半鞅的 Girsanov 定理, 过程 $S=(S_t)_{t\leqslant T}$ 是局部鞅, 并且 $dS_t=S_t\sigma_td\widetilde{B}_t$, 其中 $\widetilde{B}$ 为某个布朗运动.

由此可见, 价格 $\mathbb{C}(f_T;\mathsf{P})$ 不依赖于 μ 的值. 然而, 对波动率 σ 的依赖性未被 “丢失”, 因为在测度的绝对连续替换中, 连续鞅成分的平方特征不变 (参见 §3g 中的公式 (6)).

4.[①] 把上面描述的方法与基于转向基本方程的合理价格相联系, 我们回到 §2d 中 (注 2) 关于套利、(局部) 鞅测度和完全性的相互关系的讨论.

正如由所叙述的首先由 F. Black 和 M. Scholes [44] 以及 R. Merton [346] 所提出的基于基本方程的考察的方法, 全都不要求鞅测度, 而是由这一方程的解的唯一性出发, 直接确立 “最优” 对冲的完全性和结构. (这里鞅测度的实现可由所得到的解的概率表示来导出; 比较第三章 §3f 中的 Feyman-Kac 公式.)

在这方面, F. Black, M. Scholes 和 R. Merton 所用的方法也在其他的有 “Markov 结构” 的模型中有用 (参见例如后面的 §5c).

①英文版中没有这一第 4 点. —— 译者注

5. 在债券扩散模型中的套利、完全性和对冲定价

§5a. 无套利机会的模型

1. 在第三章 §4c 中, 已经考察了某些债券族的价格的期限结构模型. 特别是, 那里已经注意到, 在描述债券价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 的动态变化时有两种基本途径: 间接方法 (取某个 "利率" 过程 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 作为 "基底" 过程, 并认为, $\mathsf{P}(t,T)=F(t,r(t),T)$) 和直接方法 ($\mathsf{P}(t,T)$ 直接作为随机微分方程的解来给出).

这两种方法导得不同的模型, 并且在精神上与书中经常运用的下列观念一样: "公平" 构建的市场; 对于这样的无套利机会的市场, 首先自然要阐明这类模型中在怎样的条件下无套利, 以及在这样的无套利模型中怎样 "明显" 表示价格 $\mathsf{P}(t,T)$.

2. 在间接方法的情形下, 我们将认为, (非负) 利率过程 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 为下列随机微分方程的解 (比较第三章 §4c 中的 (5)):

$$dr(t)=a(t,r(t))dt+b(t,r(t))dW_t, \tag{1}$$

它由某个维纳过程 $W=(W_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 所生成. (关于布朗 (维纳) 渗透 σ-代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 参见 §4a.) 我们也将假定, 系数 $a=a(t,r)$, $b=b(t,r)$ 使得方程 (1) 有且仅有唯一的强解 (第三章 §3e).

利率 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 自然与银行账户

$$B(r)=(B_t(r))_{t\geqslant 0}$$

相联系, 使得

$$B_t(r)=\exp\left(\int_0^r r(s)ds\right); \tag{2}$$

正如在有股票和其他资产的情形下一样, 它起着比较各种债券的价值时的某种 "标准" 的作用. (以后处处假定 $\int_0^t r(s)ds<\infty$ (P-a.s.), $t>0$.)

设 $\mathsf{P}(t,T)$ 为某种 T-债券的价格 (参见第三章 §4c), 它被假定为对每个满足 $0\leqslant t<T$ 的 t, 为 $\mathscr{F}_t$-可测, 且 $\mathsf{P}(T,T)=1$. 以后, 处处认为, 对于每个 $T>0$, 过程 $(\mathsf{P}(t,T))_{t\geqslant 0}$ 为可选过程. 特别是, $\mathsf{P}(t,T)$ 对于每个 $T>0$ 为 $\mathscr{F}_t$-可测. $\mathsf{P}(t,T)$ 按其作为有 $\mathsf{P}(T,T)=1$ 的债券价格的自身含义, 我们也将认为 $0\leqslant \mathsf{P}(t,T)\leqslant 1$.

我们形成折现价格

$$\overline{\mathsf{P}}(t,T)=\frac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t(r)},\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3}$$

由关于无套利机会的 "第一基本定理" 的断言 (第五章 §2b), 同时也相信 "具有鞅测度确保 (或者几乎确保) 无套利机会", 我们假定, 在 $\mathscr{F}_T$ 上存在鞅测度, 或者风

险中性测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, 使得 $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$ $(= \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_T)$ 以及 $(\overline{\mathsf{P}}(t,T), \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ 为 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-鞅. 于是由 (3) 立即可断定,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(\overline{\mathsf{P}}(T,T)\,|\,\mathscr{F}_t) = \overline{\mathsf{P}}(t,T), \quad t \leqslant T, \tag{4}$$

而这就是说, 下列定理成立.

定理 1. 如果存在鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$, 使得关于它折现过程 $(\widetilde{\mathsf{P}}(t,T), \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ 为 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-鞅, 那么

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right). \tag{5}$$

证明由 (4) 和条件 $\mathsf{P}(T,T) = 1$ 立即得到:

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\frac{1}{B_T(r)}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) = \frac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t(r)},$$

它就导致表示式 (5).

由 (5) 可见, 如果关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 过程 $r = (r(t))_{t\geqslant 0}$ 为 Markov 过程, 那么价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 可记为下列形式:

$$\mathsf{P}(t,T) = F(t, r(t), T).$$

这时, "无套利性" 对函数 $F(t,r,T)$ 自动加上某些约束 (参见以后的 §5c).

注 1. 我们要注意, 债券价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 不能由银行账户 $B(r)$ 和无套利 (更确切地说, 要求具有鞅测度) 唯一确定. 这里所涉及的是, 并不能由此得到测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 的唯一性, 而这意味着, $\mathsf{P}(t,T)$ 通过依赖于可选择的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 能以不同的方法来实现 (表达式 (5)).

我们还要注意到, 如果取代条件 $\mathsf{P}(T,T) = 1$, 而要求 $\mathsf{P}(T,T)$ 等于 f_T, 并且 f_T 为 $\mathscr{F}_T$-可测, 而 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left|\dfrac{f_T}{B_T(r)}\right| < \infty$, 那么由 (4) 我们求得

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\frac{f_T}{B_T(r)}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) = \frac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t(r)},$$

而这就是说,

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left\{f_T \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right\}. \tag{6}$$

3. 我们现在转向考察不只是一个固定的 T-债券, 而是一族 T-债券

$$\mathcal{P} = \{\mathsf{P}(t,T);\, 0 \leqslant t \leqslant T,\, T > 0\}.$$

定义 1. 设 P 为有 $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_t$ 的 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$ 上的概率测度. 我们将说, 有性质 $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ (即 $\widetilde{\mathsf{P}}_t \sim \mathsf{P}_t$, $t \geqslant 0$) 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是对于族 $\mathcal{P}$ 的局部鞅测度, 是指对每个 $T > 0$, 折现价格 $\overline{\mathsf{P}}(t,T) = \dfrac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t(r)}$, $t \leqslant T$, 为 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-局部鞅.

为了定义由银行账户 B 和债券族 $\mathcal{P}$ 所组成的 $(B,\mathcal{P})$-市场的概念, 首先需要讨论这里应该怎样理解组合 (策略).

定义 2 ([38]). $(B,\mathcal{P})$-市场上的策略 $\pi=(\beta,\gamma)$ 理解为由可料过程 $\beta=(\beta_t)_{t\geqslant 0}$ 和 (带符号的) 有限 Borel 测度族 $\gamma=(\gamma_t(\cdot))_{t\geqslant 0}$ 所组成的二元组, 其中后者具有下列性质: 对于任何 t 和 ω, 集合函数 $\gamma_t=\gamma_t(dT)$ 为 $(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ 上的测度, 其支集聚结在 $[t,\infty)$ 上, 且对于每个 $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, 过程 $(\gamma_t(A))_{t\geqslant 0}$ 可料.

β 和 γ 有下列解释: β_t 是银行账户的单位 "数", 而 $\gamma_t(dT)$ 是在区间 $[T,T+dT]$ 上到期的债券 "数".

定义 3. 下列 (随机) 过程 $X^\pi=(X_t^\pi)_{t\geqslant 0}$ 称为策略 π 的资本:

$$X_t^\pi=\beta_t B_t(r)+\int_0^\infty \mathsf{P}(t,Y)\gamma_t(dT). \tag{7}$$

(假定, 对于所有 t 和 ω, (7) 中的 Lebesgue-Stieltjes 积分有定义.)

4. 我们再给出对于 $(B,\mathcal{P})$-市场的自融资组合 $\pi=(\beta,\gamma)$ 的定义.

为此, 我们将在直接方法的指引下, 假定价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 的动态变化由 *HJM*-模型来描述: 对于满足 $0\leqslant t<T$ 和 $T>0$ 的 t 和 T,

$$d\mathsf{P}(t,T)=\mathsf{P}(t,T)(A(t,T)dt+B(t,T)dW_t), \tag{8}$$

其中 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 为扮演 "随机源" 角色的标准维纳过程. 对于方程 (8) 应该附加边界条件 $\mathsf{P}(T,T)=1$, $T>0$. (关于系数 $A(t,T)$, $B(t,T)$ 的可测性条件以及方程 (8) 的解存在条件的详情参见第三章 §4c).

考虑到方程

$$dB_t(r)=r(t)B_t(r)dt, \tag{9}$$

根据 Itô 公式, 我们求得

$$\overline{\mathsf{P}}(t,T)=\frac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t(r)} \tag{10}$$

有 (对每个 T 关于 t 的) 微分

$$d\overline{\mathsf{P}}(t,T)=\overline{\mathsf{P}}(t,T)([A(t,T)-r(t)]dt+B(t,T)dW_t). \tag{11}$$

在扩散 (B,S)-市场情形下, 有资本 $X_t^\pi=\beta_tB_t+\gamma_tS_t$ 的策略 $\pi=(\beta,\gamma)$ 称为*自融资策略*, 是指

$$dX_t^\pi=B_tdB_t+\gamma_tdS_t, \tag{12}$$

即

$$X_t^\pi=X_0^\pi+\int_0^t \beta_u dB_u+\int_0^t \gamma_u dS_u. \tag{13}$$

在所考虑的扩散 $(B,\mathcal{P})$-市场情形下, 有资本 $X_t^\pi = \beta_t B_t(r) + \int_t^\infty \mathsf{P}(t,T)\gamma_t(dt)$ 的策略 $\pi=(\beta,\gamma)$ 称为自融资策略 ([38]), 自然是指 (以记号形式)

$$dX_t^\pi = \beta_t dB_t(r) + \int_t^\infty d\mathsf{P}(t,T)\gamma_t(dT), \tag{14}$$

它应该理解为下列含义: (考虑到 (8))

$$\begin{aligned} X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_s dB_s(r) &+ \int_0^t \left[\int_s^\infty A(s,T)\mathsf{P}(s,T)\gamma_s(dT)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_s^\infty B(s,T)\mathsf{P}(s,T)\gamma_s(dT)\right] dW_s. \end{aligned} \tag{15}$$

如果策略 $\pi=(\beta,\gamma)$ 是自融资策略, 那么对于折现资本

$$\overline{X}_t^\pi = \frac{X_t^\pi}{B_t(r)}, \tag{16}$$

我们求得

$$d\overline{X}_t^\pi = \int_t^\infty d\overline{\mathsf{P}}(t,T)\gamma_t(dT). \tag{17}$$

正如在 (14) 中那样, 记号记法 (17) 意味着 (考虑到 (11))

$$\begin{aligned} \overline{X}_t^\pi = \overline{X}_0^\pi &+ \int_0^t \left[\int_s^\infty (A(s,T)-r(s))\overline{\mathsf{P}}(s,T)\gamma_s(dT)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_s^\infty B(s,T)\overline{\mathsf{P}}(s,T)\gamma_s(dT)\right] dW_s. \end{aligned} \tag{18}$$

5. 为了在 $(B,\mathcal{P})$-模型中陈述无套利机会的条件, 我们先转向鞅测度的存在性问题.

为此, 我们再来对于 $t>T$ 定义函数 $A(t,T)$ 和 $B(t,T)$, 令 $A(t,T)=r(t)$ 和 $B(t,T)=B(T,T)$.

于是由 (11) 直接可见, 为使价格序列 $(\overline{\mathsf{P}}(t,T))_{t\leqslant T}$ 对每个 $T>0$ 关于原测度 P 形成局部鞅, 必须满足下列条件:

$$A(t,T) = r(t). \tag{19}$$

由 (8) 得到, 在这一情形下,

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t,T)(r(t)dt + B(t,T)dW_t),$$

以及

$$d\overline{\mathsf{P}}(t,T) = \overline{\mathsf{P}}(t,T)B(t,T)dW_t. \tag{20}$$

考虑到第三章 §4c 中的公式 (14) 和 (15), 以及在假定 (19) 中, $\dfrac{\partial A(t,T)}{\partial T}=0$, 我们对于 $f(t,T)$ 求得下列关系式:

$$df(t,T)=a(t,T)dt+b(t,T)dW_t,$$

其中

$$a(t,T)=b(t,T)\int_0^T b(t,s)ds.$$

如果条件 (19) 不满足, 那么自然 (类似于股票情形) 可运用 "Girsanov 定理" 的思想.

为了我们的目标, 下列陈述是适当的.

设在有 $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_t$ 的 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$ 上除了原测度 P 以外, 还存在这样的概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$: $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\sim}\mathsf{P}$, 即 $\widetilde{\mathsf{P}}_t\sim\mathsf{P}_t$, $t\geqslant 0$.

记 $Z_t=\dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$. 由于 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为布朗 (维纳) 渗透 σ-代数流, 故根据正局部鞅表示定理 (参见第三章 §3c 中的公式 (22)),

$$Z_t=\exp\left(\int_0^t\varphi(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\varphi^2(s)ds\right), \tag{21}$$

其中 $\varphi(s)$ 为 $\mathscr{F}_s$-可测, $\int_0^t\varphi^2(s)ds<\infty$ (P-a.s.) 以及 $\mathsf{E}Z_t=1$ 对每个 $t>0$ 成立.

根据 Girsanov 定理 (参见第三章 §3e), 过程 $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ 如果满足下式:

$$\widetilde{W}_t=W_t-\int_0^t\varphi(s)ds, \tag{22}$$

那么它关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是维纳过程. 因此, 关于这个测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$,

$$d\mathsf{P}(t,T)=\mathsf{P}(t,T)[(A(t,T)+\varphi(t)B(t,T))dt+B(t,T)\widetilde{W}_t], \tag{23}$$

以及

$$d\overline{\mathsf{P}}(t,T)=\overline{\mathsf{P}}(t,T)[(A(t,T)+\varphi(t)B(t,T)-r(t))dt+B(t,T)\widetilde{W}_t] \tag{24}$$

(比较 (8) 和 (11)).

由此可见 (比较 (11)), 过程 $(\overline{\mathsf{P}}(t,T))_{t\leqslant T}$ 关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 对所有 $T>0$ 为局部鞅当且仅当下列关系式满足:

$$A(t,T)+\varphi(t)B(t,T)-r(t)=0. \tag{25}$$

由 (23) 得到, 这样,

$$d\mathsf{P}(t,T)=\mathsf{P}(t,T)(r(t)dt+B(t,T)d\widetilde{W}_t), \tag{26}$$

其中 $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ 是关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的维纳过程.

6. $(B,\mathcal{P})$-市场上的策略 $\pi=(\beta,\gamma)$ 在时刻 T 无套利 (比如, 按 NA_+-文本) 的定义也与 §1c 中一样. $(B,\mathcal{P})$-市场称为无套利市场, 是指它对所有 $T>0$ 是无套利的.

定理 2. 设已经求得测度 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\sim}\mathsf{P}$, 其密度过程 $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 有形式为 (21), 并满足条件 (25).

那么对于任何 $a\geqslant 0$, 在任何满足下列条件的 a-容许策略 π ($\overline{X}_t^\pi\geqslant -a,\ t>0$) 的类中无套利机会:

$$\int_0^t\left[\int_s^\infty B(s,T)\gamma_s(dT)\right]^2 ds<\infty,\quad t>0. \tag{27}$$

证明. 在条件 (25) 和 (27) 成立时, 根据 (18), 过程 $\overline{X}^\pi=(\overline{X}_t^\pi)_{t\geqslant 0}$ 为 $\widetilde{\mathsf{P}}$-局部鞅. 由 a-容许性条件 ($\overline{X}_t^\pi\geqslant -a,\ t>0$), 这个过程也是半鞅. 因此, 如果 $\overline{X}_0^\pi=0$, 那么 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\overline{X}_T^\pi\leqslant 0$ 对于任何 $T>0$ 成立. 但 $\widetilde{\mathsf{P}}(\overline{X}_T^\pi\geqslant 0)=\widetilde{\mathsf{P}}(X_T^\pi\geqslant 0)=\widetilde{\mathsf{P}}(X_T^\pi\geqslant 0)=1$. 这就是说, $X_T^\pi=0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-和 P-a.s.), $T>0$.

定理得证.

注 2. 设 $A(t,T)$, $B(t,T)$ 和 $r(t)$ 使得函数

$$\left(\frac{r(t)-A(t,T)}{B(t,T)}\right)_{t\leqslant T} \tag{28}$$

不依赖于 T, 且对所有 $t>0$,

$$\int_0^t\left(\frac{r(s)-A(s,T)}{B(s,T)}\right)^2 ds<\infty\quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}). \tag{29}$$

在这些假定下, 在求出有性质 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\sim}\mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 时, 自然可如下处理.

我们以 $\varphi=\varphi(t)$ ($t\leqslant T$) 记 (28) 中的函数, 根据公式 (21) 我们形成过程 $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$, 并假定 $\mathsf{E}Z_t=1$, $t>0$. 于是对于每个 $t>0$, 有 $d\widetilde{\mathsf{P}}_t=Z_t d\mathsf{P}_t$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_t$ 是概率测度, 并且满足 $\widetilde{\mathsf{P}}_t\sim\mathsf{P}_t$.

测度族 $\{\widetilde{\mathsf{P}}_t,\ t\geqslant 0\}$ 是协调的 (在下列含义下: $\widetilde{\mathsf{P}}_s=\widetilde{\mathsf{P}}_t\,|\,\mathscr{F}_s$ 对于 $s\leqslant t$ 成立), 并且如果存在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 使得 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\sim}\mathsf{P}$, 那么这一测度也将是所要求的鞅测度.

在所考察的 $(B,\mathcal{P})$-市场是对于所有到期日 $T\leqslant T_0$ (其中 $T_0<\infty$) 的 T-债券的情形下, 可取测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_{T_0}$ 作为所要求的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$.

同样明显的是, 如果 $Z_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}Z_t$, 并且 $\mathsf{E}Z_\infty=1$ 以及 $\mathsf{P}(Z_\infty>0)=1$, 那么有 $d\widetilde{\mathsf{P}}=Z_\infty d\mathsf{P}$ 的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 将是所要求的有性质 $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\sim}\mathsf{P}$ 的鞅测度.

7. 我们引入无套利 $(B,\mathcal{P})$-模型的例子.

遵照 [36], [219], 我们将从 (对每个 T 关于 t 的) 有下列随机微分的远期利率 $f(t,T)$ 出发:

$$df(t,T) = a(t,T)dt + b(t,T)dW_t, \tag{30}$$

其中

$$b(t,T) \equiv \sigma > 0, \tag{31}$$

$$a(t,T) = \sigma^2(T-t),\ t < T. \tag{32}$$

于是 (30) 有下列形式:

$$df(t,T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma dW_t, \tag{33}$$

由此可得

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2 t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma W_t, \tag{34}$$

其中 $f(0,T)$ 是 T-债券的 "今日" 远期利率, 它在 $(B,\mathcal{P})$-市场 (在时刻 $t=0$) 是已知的.

由 (34) 和定义 $r(t) = f(t,t)$ 得到,

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W_t. \tag{35}$$

由此很明显, 利率 $r = (r(t))_{t\geqslant 0}$ 满足下列方程:

$$dr(t) = \left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t\right)dt + \sigma dW_t. \tag{36}$$

(比较第三章 §4c 中的 *He-Lee* 模型.) 方程 (8) 中的系数 $A(t,T)$ 和 $B(t,T)$ 通过 (33) 中的系数 $a(t,T) = \sigma^2(T-t)$ 和 $b(t,T) \equiv \sigma$ 以下列方式来计算:

$$A(t,T) = r(t) - \int_t^T a(t,s)ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T b(t,s)ds\right)^2 = r(t), \tag{37}$$

$$B(t,T) = -\sigma(T-t). \tag{38}$$

这样, 在所考察的 $(B,\mathcal{P})$-模型中, 条件 (19) 满足, 因而, 原测度 P 是鞅测度, 以及没有套利.

价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 本身可由下列方程求得:

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t,T)[r(t)dt - \sigma(T-t)dW_t], \quad t < T,$$

它在 $\mathsf{P}(T,T) = 1$ 的条件下, 对于每个 $T > 0$ 可解.

还可如下那样来运作: 根据第三章 §4c 中的 (2),

$$\mathsf{P}(t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right),\quad t\leqslant T. \tag{39}$$

由 (34),

$$\begin{aligned}\int_t^T f(t,s)ds&=\int_t^T\left[f(0,s)+\sigma^2 t\left(s-\frac{t}{2}\right)\right]ds+\sigma(T-t)W_t\\&=\int_t^T f(0,s)ds+\frac{\sigma^2}{2}tT(T-t)+\sigma(T-t)W_t.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(t,T)&=\exp\left\{-\int_t^T f(0,s)ds-\frac{\sigma^2}{2}tT(T-t)+\sigma(T-t)W_t\right\}\\&=\frac{\mathsf{P}(0,T)}{\mathsf{P}(0,t)}\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}tT(T-t)+\sigma(T-t)W_t\right\}.\end{aligned} \tag{40}$$

由此和 (35) 我们求得 $\mathsf{P}(t,T)$ 的下列由利率 $r(t)$ 来表达的表示式:

$$\mathsf{P}(t,T)=\frac{\mathsf{P}(0,T)}{\mathsf{P}(0,t)}\exp\left\{(T-t)f(0,T)-\frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2-(T-t)r(t)\right\}. \tag{41}$$

(比较第三章 §4c 和后面的 §5c 中的仿射模型.)

8. 在上面所考察的对于利率 $r=(r(t))$, 远期利率 $f=(f(t,T))$, 债券价格 $\mathcal{P}=\{\mathsf{P}(t,T);\,0\leqslant t\leqslant T, T<\infty\}$ 本身的 “扩散” 模型中, 假定它们全由同一个随机源: 维纳过程 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 所生成.

在众多的有关描述债券价格动态变化的文献中, 也考察其他模型, 其中取代单个维纳过程 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 的是多维维纳过程 $W=(W^1,\cdots,W^n)$. 为了考虑价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 中的跳跃变化, 还考虑引入其他 “随机源”: 点过程, Markov 点过程, Lévy 过程等等.

这里我们仅仅引入某些其中考虑所提起的 “随机源” 的模型, 其详情读者可参阅专门文献 (参见例如, 论文 [36], [38], [128] 以及其中的参考文献).

在 [36], [38] 中, 为推广型为 (1) 的 “扩散” 模型, 在讨论中引入 “带跳跃的扩散” 型模型:

$$dr(t)=a_t dt+\sum_{i=1}^d b_t^i dW_t^i+\int q(t,x)\mu(dt,dx), \tag{42}$$

其中 $\mu=\mu(dt,dx)$ 为某个在 $\mathbb{R}_+\times\Omega\times E$ 上的整数值测度, 而 $(W^1,\cdots,W^d)$ 为相互独立的维纳过程.

在描述 $\mathsf{P}(t,T)$ 和 $f(t,T)$ 的动态变化的模型中带来的对应变化如下:

$$\begin{aligned} d\mathsf{P}(t,T) &= \mathsf{P}(t,T)\left(A(t,T)dt + \sum_{i=1}^{d} B^i(t,T)dW_t^i\right) \\ &\quad + \mathsf{P}(t-,T)\int_E q(t,x,T)\mu(dt,dx), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} df(t,T) &= a(t,T)dt + \sum_{i=1}^{d} b^i(t,T)dW_t^i \\ &\quad + \int_E \delta(t,x,T)\mu(dt,dx). \end{aligned} \tag{44}$$

9. 现在按照著作 [128] 来考察某些基于把 *Lévy* 过程当作 "随机源" 的某些模型. 为此我们先转向方程 (20), 把它改写为下列形式:

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t,T)d\widehat{H}(t,T), \tag{45}$$

其中

$$\widehat{H}(t,T) = \int_0^t [r(s)ds + B(s,T)dW_s]. \tag{46}$$

再令

$$H(t,T) = \int_0^t \left(\left[r(s) - \frac{B^2(s,T)}{2}\right]ds + B(s,T)dW_s\right). \tag{47}$$

于是 (参见 §3d 中的 (9)–(13)) 下列表示式成立:

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(0,T)\mathscr{E}(\widehat{H}(\cdot,T))_t, \tag{48}$$

以及

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(0,T)e^{H(t,T)}. \tag{49}$$

考虑到 (47), 我们求得

$$\begin{aligned} \overline{\mathsf{P}}(t,T) &= \frac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t(r)} \\ &= \overline{\mathsf{P}}(0,T)\exp\left\{\int_0^t B(s,T)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t B^2(s,T)ds\right\}. \end{aligned} \tag{50}$$

如果函数 $B(s,T)$ $(s \leqslant T)$ 有界, 那么我们看到, (50) 右端中的表达式为鞅.

现在代替维纳过程 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ 取 Lévy 过程 $L = (L_t)_{t\geqslant 0}$ (参见第三章 §1b). 我们提出下列问题: 应该在怎样的形式下定义过程 $\widehat{H}(t,T)$ 和 $H(t,T)$, 其中假定代替积分 $\int_0^t B(s,T)dW_s$ 的是现在考察积分 $\int_0^t B(s,T)dL_s$, 它理解为关于半鞅 $L = (L_s)_{s\leqslant T}$ 对确定性的有界函数 $B(s,T)$ 的随机积分.

如果函数 $B(s,T)$ 关于 s 足够光滑, 那么还可运用 N. 维纳的定义:

$$\int_0^t B(s,T)dL_s \equiv B(t,T)L_t - \int_0^t \frac{\partial B}{\partial s}(s,T)L_s ds.$$

(关于这方面, 参见第三章 §3c, 以及与 Lévy 过程相联系的著作 [128].)

设

$$\varphi(\lambda) = \lambda b + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda g(x))\nu(dx) \tag{51}$$

为 Lévy 过程 $L = (L_t)_{t \geqslant 0}$ 的累积量函数 (参见 §3c).

这时, 我们将假定, (51) 中的积分对于所有满足 $|\lambda| \leqslant c$ 的 λ 有定义且有限, 其中 $c = \sup\limits_{s \leqslant T} |B(s,T)|$.

对应于累积量函数的含义,

$$\mathsf{E}e^{\lambda L_t} = e^{t\varphi(\lambda)}. \tag{52}$$

设 $X_t^T = \int_0^t B(s,T)dL_s$, $t \leqslant T$. 过程 $X^T = (X_t^T)_{t \leqslant T}$ 是独立增量过程, 其可料特征三元组 $(B^{X^T}, C^{X^T}, \nu^{X^T})$ 可按过程 L 的三元组 (B^L, C^L, ν^L) 来求得 (参见 [128] 中的第 IX 章 §5a 和 [250]). 于是运用 Itô 公式, 可求得 (细节参见 [128])

$$\mathsf{E}e^{\lambda X_t^T} = \exp\left(\int_0^t \varphi(\lambda B(s,T))ds\right).$$

过程 $\left(\exp\left(\lambda X_t^T - \int_0^T (\lambda B(s,T))ds\right)\right)_{t \leqslant T}$ 是鞅 (比较 §3c 中的 (11)). 因此, 为使过程 $(\overline{\mathsf{P}}(t,T))_{t \leqslant T}$ 为鞅, 自然要推广 (50), 令

$$\overline{\mathsf{P}}(t,T) = \overline{\mathsf{P}}(0,T) \exp\left\{\int_0^t B(s,T)dL_s - \int_0^t \varphi(B(s,T))ds\right\}. \tag{53}$$

从 $\overline{\mathsf{P}}(t,T)$ 回到过程 $\mathsf{P}(t,T)$, 我们求得, 有

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(0,T)e^{H(t,T)}, \quad t \leqslant T,\ T > 0 \tag{54}$$

以及

$$H(t,T) = \int_0^t B(s,T)dL_s + \int_0^t [r(s) - \varphi(B(s,T))]ds \tag{55}$$

的 $(B,\mathcal{P})$-市场具有这样的性质: 关于原测度 P 折现价格 $(\overline{\mathsf{P}}(t,T))_{t \leqslant T}$ 形成鞅, 并且在这个市场中 α-容许策略类中无套利机会 (比较定理 2).

运用联系 $\widehat{H}(t,T)$ 和 $H(t,T)$ 的公式 (参见 §3d 中的 (10)), 我们求得

$$\widehat{H}(t,T) = H(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t B^2(s,T)ds + \sum_{0<s\leqslant t}\left(e^{B(s,T)\Delta L_s} - 1 - B(s,T)\Delta L_s\right), \tag{56}$$

以及

$$dP(t,T) = P(t-,T)d\widehat{H}(t,T). \tag{57}$$

注 3. 由对于 $P(t,T)$ 的方程出发, 著作 [128] 的作者 E. Eberlein 和 S. Raible 研究了远期利率 $f(t,T)$ 和 $r(t)$ 的结构, 还引入了对双曲 *Lévy* 过程的讨论, 后者是指随机变量 L_1 有双曲分布的 Lévy 过程 (参见第三章 §1d).

§5b. 完全性

1. 在转向 $(B,\mathcal{P})$-模型中的完全性问题时, 现在有益的是回忆起, 在离散时间 $n \leqslant N < \infty$ 和资产个数 d 有限的情形下, (根据 "第二基本定理") 无套利市场上的完全性等价于鞅测度的唯一性, 也等价于 (关于某个鞅测度的) 鞅具有 "S-表示式".

在由 m-维维纳过程 $W = (W^1, \cdots, W^m)$ 生成的扩散 $(B,\mathcal{P})$-市场情形下, 第三章 §3c 中的定理 2 的多维类似成立, 根据它, 每个局部鞅 $M = (M_t, \mathscr{F}_t)$ 有表示式:

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \psi_i(s)dW_s^i, \tag{1}$$

其中 $\mathscr{F}_s$-可测函数 $\psi_i(s)$ 满足

$$\int_0^t \psi_i^2(s)ds < \infty \ (\text{P-a.s.}), \quad t > 0.$$

正如在 (B,S)-市场中的情形下 (参见 §4b), 具有这一表示式在研究所考察的 $(B,\mathcal{P})$-模型的完全性问题时起着关键作用.

设 T_0 为某个固定时刻, 而 f_{T_0} 为某个偿付索求. 我们将假定 f_{T_0} 有界 ($|f_{T_0}| \leqslant C$), 并且说, 这个偿付索求可复制, 是指可求得这样的自融资组合 $\pi = (\beta,\gamma)$, 使得

$$X_{T_0}^{\pi} = f_{T_0} \ (\text{P-a.s.}). \tag{2}$$

如果这一性质对于任何 T_0 和任何有界 $\mathscr{F}_{T_0}$-可测偿付索求 F_{T_0} 满足, 那么说, $(B,\mathcal{P})$-模型是完全的.

设 T-债券 $P(t,T)$ 的价格服从关系式

$$dP(t,T) = P(t,T)\left(r(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t,T)dW_t^i\right). \tag{3}$$

我们将假定, $0 < B_i(t,T) \leqslant C = \text{Const}$.

在这些假设下, 原测度 P 在下列含义下为鞅测度: 价格 $(\overline{P}(t,T))_{t\leqslant T}$ 形成局部鞅, 并且

$$\overline{X}_t^{\pi} = \overline{X}_0^{\pi} + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \left[\int_s^{\infty} B_i(s,T)\overline{P}(s,T)\gamma_s(dT)\right] dW_s^i. \tag{4}$$

记

$$M_t = \mathsf{E}\left(\frac{f_{T_0}}{B_{T_0}(r)}\bigg|\mathscr{F}_t\right),\quad t \leqslant T_0. \tag{5}$$

于是对于 $M=(M_t,\mathscr{F}_t)$, 表示式 (1) 成立, 并且由与 (4) 比较可见, 为了借助于某个自融资组合 π 的资本 $\overline{X}_t^{\pi}$ $(t\leqslant T_0)$ 复制值 $M_t, t\leqslant T_0$, 充要条件为 ([38]) ($(d\mathsf{P}\times dt)$-a.s.)

$$\psi_i(t) = \int_t^{T_0} B_i(t,T)\overline{\mathsf{P}}(t,T)\gamma_t(dT) \tag{6}$$

对于 $i=1,\cdots,m$ 和 $t\leqslant T_0$ 成立.

如果解 $\{\gamma_t^*(dT), t\leqslant T_0, T\leqslant T_0\}$ 存在, 那么, 令

$$\beta_t^* = M_t - \int_t^{T_0} \overline{\mathsf{P}}(t,T)\gamma_t^*(dT), \tag{7}$$

我们求得, 组合 $\pi^*=(\beta^*,\gamma^*)$ 将为自融资, 并满足

$$\overline{X}_t^{\pi} = M_t,\quad t\leqslant T_0.$$

特别是, $\overline{X}_{T_0}^{\pi^*} = \dfrac{f_{T_0}}{B_{T_0}(r)}$, 而这就是说, $X_{T_0}^{\pi^*} = f_{T_0}$ (P-a.s.), 即 T_0-完全性成立.

2. 例 ([36], [38]). 设在 $(B,\mathcal{P})$-市场上只有有限 d 种债券, 其到期时间分别为 $T_1,\cdots,T_d$. (从而, 测度 $\gamma_t(dT)$ 的支集只可能聚积在点 $\{T_1\},\cdots,\{T_d\}$ 上.) 由于 "随机源" 的个数为 m, 故直观上很明显, 为使偿付索求 f_{T_0} 可复制, 应该有足够大的债券数 d, 它显然不小于 "源" 的个数 m.

设 $d=m$. 于是方程组 (6) 有下列形式:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{d} B_i(t,T_j)\overline{\mathsf{P}}(t,T_j)\gamma_t(\{T_j\}), \tag{8}$$

其中 $i=1,\cdots,d$.

由 (8) 很明显, 对于每个 $t\leqslant T_0$, 这个方程组有解当且仅当矩阵 $\|B_i(t,T_j)\|$ 可逆.

如果 $m=d=1$, 那么方程组 (8) 转化为关系式

$$\psi_1(t) = B_1(t,T_1)\mathsf{P}(t,T_1)\gamma_t(\{T_1\}), \tag{9}$$

由此得到, 对于 $t\leqslant T_1$,

$$\gamma_t^*(\{T_1\}) = \frac{\psi_1(t)}{B_1(t,T_1)\mathsf{P}(t,T_1)},$$

并且当 $T_1 < t \leqslant T_0$ 时, $\gamma_t^*(\{T_1\}) = 0$.

§5c. 债券价格期限结构的基本偏微分方程

1. 不同于借助随机微分方程来描述债券价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 动态变化的直接方法 (参见 §5a), 在间接方法中假定, 价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 有下列形式:

$$\mathsf{P}(t,T)=F(t,r(t),T), \tag{1}$$

其中 $r(t)$ 为某个 "利率", 它照例被理解为非负值.

在描述债券价格演变的论证中, 间接方法 (1) 是最先为直接方法让路的方法之一 (特别是在理论著作中). 但是尽管如此, 从获得简单解析公式的视角来看, 基于假定 (1) 的方法并没有失去其价值, 并且仍然是流行方法之一.

2. 应该立即强调, 这一方法仅当假定利率过程 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 为满足某个随机微分方程

$$dr(t)=a(t,r(t))dt+b(t,r(t))dW_t \tag{2}$$

或者 "带跳跃的扩散" 型方程 (参见第三章 §4a 中的方程 (6)) 的 Markov 过程时, 才 "有效".

我们将假定, 对每个 $T>0$, 函数 $F^T=F(t,r,T)$ 为 (按 t 和 r 的) $C^{1,2}$ 类函数. 于是

$$dF^T=\left(\frac{\partial F^T}{\partial t}+a\frac{\partial F^T}{\partial r}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2}\right)dt+b\frac{\partial F^T}{\partial r}dW_t. \tag{3}$$

假定 $F^T>0$, 我们把这个方程改写为下列形式 (比较 §5a 中的方程 (8)):

$$dF^T=F^T\left(A^T(t,r(t))dt+B^T(t,r(t))dW_t\right), \tag{4}$$

其中

$$A^T(t,r)=\frac{\dfrac{\partial F^T}{\partial t}+a\dfrac{\partial F^T}{\partial r}+\dfrac{1}{2}b^2\dfrac{\partial^2 F^T}{\partial r^2}}{F^T}, \tag{5}$$

以及

$$B^T(t,r)=\frac{b\dfrac{\partial F^T}{\partial r}}{F^T}. \tag{6}$$

为求得对函数 F^T 的补充条件 (除了显然的条件 $F^T(T,r(T))=F(T,r(T),T)=\mathsf{P}(T,T)=1$ 以外), 我们将从所求的 $(B,\mathcal{P})$-市场必须是无套利市场这点出发. 于是, 把 (4) 与 §5a 中的 (8) 相比较, 并考虑 §5a 中的关系式 (25), 我们看到, 为了满足无套利性, 必须求得函数 $\varphi(t)$, 使得对于所有满足 $t\leqslant T$ 的 t 和 T, 有下列关系式:

$$\frac{A^T(t,r)-r}{B^T(t,r)}=-\varphi(t). \tag{7}$$

(根据 §5a 中的 (21), 按函数 $\varphi=\varphi(t)$ 可构造 "鞅测度" $\widetilde{\mathsf{P}}$.)

考虑到 (5) 和 (6), 由 (7) 导得下列结论: 如果函数 $F^T = F(t,r,T)$ $(T>0)$ 满足基本方程

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (a+\varphi b)\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF, \quad t \leqslant T, \tag{8}$$

其边界条件为 $F(T,r,T)=1, T>0, r\geqslant 0$, 那么有 $\mathsf{P}(t,T) = F(t,r(t),T)$ 的 $(B,\mathcal{P})$-市场无套利.

方程 (8) 非常类似于股票情形下的对冲价格的基本方程 (参见 §4c 中的 (19)). 然而在这些方程之间的原则差别在于 (8) 中加入了函数 $\varphi=\varphi(t)$, 它不能由原先的假定来唯一确定, 而必须先验地来规定. 上面已经注意到, 由这个函数可确定鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$. 对它的选择在实质上等价于选择某个"风险中性"测度, 这一测度按照投资者的表示式在所考察的 $(B,\mathcal{P})$-市场上"起作用".

3. 追随第三章 §3c 中为 Kolmogorov 正向和倒向方程以及偏微分方程的解的概率表示而提出的记号 (11), 我们记

$$L(s,r) = (a(s,r) + \varphi(s)b(s,r))\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}b^2(s,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}. \tag{9}$$

算子 $L(s,r)$ 为满足随机微分方程

$$dr(t) = (a(t,r(t)) + \varphi(t)b(t,r(t)))\,dt + b(t,r(t))dW_t \tag{10}$$

的扩散 Markov 过程 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 的逆算子.

把方程 (8) 改写为下列形式:

$$-\frac{\partial F}{\partial s} = L(s,r)F - rF, \quad s \leqslant T, \tag{11}$$

我们察觉, 这个方程属于 (对于扩散过程 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 的) *Feyman-Kac*方程类 (参见第三章 §3f).

这一有边界条件 $F(T,r,T)=1$ 的方程的概率解可有下列表示 (比较第三章 §3f 中的 (19′), 细节也参见例如, [123], [170], [288]):

$$F(s,r,T) = \mathsf{E}_{s,r}\left\{\exp\left(-\int_s^T r(u)du\right)\right\}, \tag{12}$$

其中 $\mathsf{E}_{s,r}$ 为关于满足条件 $r(s)=r$ 的过程 $(r(u))_{s\leqslant u\leqslant T}$ 的概率分布的数学期望.

我们察觉, 由无套利思想得到的公式 (12), 与以前所求得的 §5a 中的表示式 (5) 完全一致, 因为在 Markov 情形下,

$$\mathsf{E}\left(\exp\left(-\int_s^T r(u)du\right)\,\Big|\,\mathscr{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(\exp\left(-\int_s^T r(u)du\right)\,\Big|\,r_s\right).$$

4. 现在注意到以下这点是有益的: 在第三章 §4a 中考察的所有随机利率的动态模型 (参见 (7)–(21)) 都是有关型为 (10) 的扩散 *Markov* 模型.

这些模型的区别主要是由它们的作者在这样两方面的努力所引起的: 一方面要便于解析研究; 另一方面又要与观察数据相符.

在第三章 §4c 中, 已经注意到, 使得下列表示式成立的 (仿射) 模型的子类 ([36], [38], [117], [119]) 相当重要, 且便于解析研究:

$$F(t, r(t), T) = \exp\{\alpha(t, T) - r(t)\beta(t, T)\}, \tag{13}$$

其中 $\alpha(t,T)$ 和 $\beta(t,T)$ 为确定性函数.

在所指出的著作中引入的仿射模型的著名例子为用下列方式得到的模型.

假定在 (10) 中,

$$a(t,r) + \varphi(t)b(t,r) = a_1(t) + ra_2(t),$$

以及

$$b(t,r) = \sqrt{b_1(t) + rb_2(t)}.$$

于是方程 (8) 有下列形式:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (a_1 + ra_2)\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}(b_1 + rb_2)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF, \quad t \leqslant T. \tag{14}$$

如果对 $F(T,r,T) = 1$ 的形为 (13) 的该方程求解, 那么我们求得, $\alpha(t,T)$ 和 $\beta(t,T)$ 必须由下列关系式根据 $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$ 和 $b_2(t)$ 来确定:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + a_2\beta - \frac{1}{2}b_2\beta^2 = -1, \quad \beta(T,T) = 0, \tag{15}$$

以及

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = a_1\beta - \frac{1}{2}b_1\beta^2, \quad \alpha(T,T) = 0. \tag{16}$$

方程 (15) 为 *Riccati* 方程. 先求出它的解 $\beta(t,T)$, 然后由 (16) 求出 $\alpha(t,T)$, 就可导得由所求函数 $\alpha(t,T)$ 和 $\beta(t,T)$ 的仿射模型 (13).

例. 我们考察 *Vasiček* 模型 (参见第三章 §4a 中的 (8)):

$$dr(t) = (\overline{a} - \overline{b}r(t))dt + \overline{c}dW_t,$$

其中 $\overline{a}$, $\overline{b}$ 和 $\overline{c}$ 为常数.

于是由 (15) 和 (16) 我们求得

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} - \overline{b}\beta = -1, \quad \beta(T,T) = 0,$$

以及

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \overline{a}\beta - \frac{1}{2}\overline{c}^2\beta^2, \quad \alpha(T,T) = 0.$$

因此,

$$\beta(t,T) = \frac{1}{\overline{b}}\left(1 - e^{-\overline{b}(T-t)}\right),$$

以及

$$\alpha(t,T) = \frac{\overline{c}^2}{2}\int_t^T \beta^2(s,T)ds - \overline{a}\int_t^T \beta(s,T)ds.$$

第八章　随机金融模型中的定价理论. 连续时间

1. 在扩散 (B, S)-股票市场中的欧式期权

§1a. Bachelier 公式

1. 在思路方面, 本章的有关连续时间的材料以最直接的方式与第六章中对于离散时间情形的叙述相联系.

这时, 我们的主要兴趣在期权, 以此可很好解释套利理论和随机分析方法对于连续时间金融模型中的计算来说的作用和能力.

2. 以前 (第一章 §2a) 已经注意到, L. Bachelier 毫无疑问是最先为了描述股票价格的动态变化 (参见 [12]) 而采用了 "随机游走及其极限样式" 的方法, 后者用今天的语言来说, 无非就是布朗运动.

L. Bachelier 认为, 股票价格如同布朗运动一样波动, 他由此引入了某些当时在法国出现的期权的 (合理) 价格的一系列计算, 然后把它们与实际的市场价格相比较.

下面引入的公式 (5) 是 L. Bachelier [12] 的著作中的一系列 "期权" 结果的模型化文本. 这也说明了为什么称它为 "Bachelier 公式".

在线性 *Bachelier* 模型中, 假定 (B, S)-市场如下构建: 银行账户 $B = (B_t)_{t\leqslant T}$ 不随时间改变 $(B_t \equiv 1)$, 而股票价格 $S = (S_t)_{t\leqslant T}$ 用带漂移的线性布朗运动来描述:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \leqslant T, \tag{1}$$

其中 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ 为给定在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的标准维纳过程 (布朗运动),

在这一模型中, 价格也取负值, 因而它不可能被认为是合适的现实图景反映. 尽管如此, 对它的考察仍然有其各种视角下的意义: 它是历史上第一个扩散模型, 作为模型, 它既是无套利的, 又是完全的 (参见第七章).

令

$$Z_t = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 t\right), \tag{2}$$

并设 $\mathscr{F}_t$ 为由维纳过程 W_s $(s \leqslant t)$ 的值生成的 σ-代数, $t \leqslant T$, 并且由 P-零概率集完备化.

令

$$d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}_T, \tag{3}$$

其中 $\mathsf{P}_T = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}_T$. 我们在 $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ 上定义新测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ (比较第七章 §4a 中的 (8)).

我们察觉, 在所考察的模型中, 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 是唯一的鞅测度 (参见第七章 §4a 中的第 5 点), 即该测度具有这样的性质: $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$, 并且过程 $S = (S_t)_{t\leqslant T}$ 为鞅. 这时, 根据 Girsanov 定理 (第三章 §3e 或者第七章 §3b),

$$\mathrm{Law}(S_0 + \mu t + \sigma W_t; t \leqslant T \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T) = \mathrm{Law}(S_0 + \sigma W_t; t \leqslant T \,|\, \mathsf{P}_T). \tag{4}$$

定理 (“Bachelier 公式”). 在模型 (1) 中, 有偿付函数 $f_T = (S_T - K)^+$ 的标准欧式买入期权的合理价格 $\mathbb{C}_T = \mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ 为

$$\boxed{\mathbb{C}_T = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)} \tag{5}$$

其中

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy.$$

特别是, 当 $S_0 = K$ 时,

$$\mathbb{C}_T = \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}. \tag{6}$$

证明. 如果分析 §§4a, 4b 中的定理证明, 那么可以察觉, 它们对于 §4a 中的 (正) 价格模型 (5) 所陈述的断言对于所考察的模型 (1) 仍然成立. (§4b 中的 “关键公式 (14) 现在取形式为 $\widetilde{\gamma}_t = Z_t^{-1}\left(\frac{\psi_t}{\sigma} + X_t\frac{\mu}{\sigma^2}\right)$, 其中 Z_t 来自 (2).) 从而, 在这一情形下, (B, S)-市场是无套利 T-完全市场, 并且合理价格

$$\mathbb{C}_T = \mathsf{E}(Z_T f_T) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(f_T). \tag{7}$$

由 (4) 和维纳过程的自相似性质,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(S_T - K)^+ &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(S_0 + \mu T + \sigma W_T - K)^+ \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}_T}(S_0 - K + \sigma W_T)^+ \\
&= \mathsf{E}(S_0 - K + \sigma\sqrt{T} W_1)^+.
\end{aligned} \tag{8}$$

我们察觉, 如果 ξ 为有标准正态分布 $\mathscr{N}(0,1)$ 的随机变量, 那么对于 $a \in \mathbb{R}$, $b \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(a + b\xi)^+ &= \int_{-a/b}^{\infty} (a + bx)\varphi(x)dx = a\Phi\left(\frac{a}{b}\right) + b\int_{-a/b}^{\infty} x\varphi(x)dx \\
&= a\Phi\left(\frac{a}{b}\right) - b\int_{-a/b}^{\infty} d(\varphi(x)) = a\Phi\left(\frac{a}{b}\right) + b\varphi\left(\frac{a}{b}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

令

$$a = S_0 - K, \quad b = \sigma\sqrt{T},$$

由 (7), (8) 和 (9) 我们得到所要求的公式 (5).

3. 我们将以 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ 表示 (自融资类中的) 策略, 它有初始资本 $X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathbb{C}_T$, 且具有偿付函数 f_T 的可复制性质, 即设 $X_T^{\widetilde{\pi}} = f_T$ (P-a.s.).

由第七章 §4b 得到, 这一策略的资本 $X^{\widetilde{\pi}} = (X_t^{\widetilde{\pi}})_{t\leqslant T}$ 为

$$X_t^{\widetilde{\pi}} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(f_T \mid \mathscr{F}_t). \tag{10}$$

由于 $f_T = (S_T - K)^+$, 故由过程 $S = (S_t)_{t\leqslant T}$ 的 Markov 特征,

$$\begin{aligned} X_t^{\widetilde{\pi}} &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}((S_T - K)^+ \mid \mathscr{F}_t) \\ &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(((S_t - K) + (S_T - S_t))^+ \mid S_t\right) \\ &= \mathsf{E}(a + b\xi)^+ = a\Phi\left(\frac{a}{b}\right) + b\varphi\left(\frac{a}{b}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $a = S_t - K$ 以及 $b = \sigma\sqrt{T-t}$.

对于 $0 \leqslant t \leqslant T$ 和 $S > 0$, 记

$$C(t,S) = (S-K)\Phi\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma\sqrt{T-t}\,\varphi\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{12}$$

于是由 (11) 可见, $X_t^{\widetilde{\pi}} = C(t, S_t)$. 同时,

$$dX_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\gamma}_t dS_t. \tag{13}$$

把 Itô 公式应用于 $C(t, S_t)$, 我们求得

$$dC(t,S_t) = \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) dt. \tag{14}$$

比较 (14) 和 (13), 并把推论 1 应用于 Doob-Meyer 分解 (第三章 §5b), 我们断定

$$\widetilde{\gamma}_t = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t). \tag{15}$$

对 (12) 的右端求微分以后, 并作简单变换, 我们得到

$$\widetilde{\gamma}_t = \Phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{16}$$

对应的值 $\widetilde{\beta}_t$ 由下列等式来确定:

$$C(t, S_t) = \widetilde{\beta}_t + \widetilde{\gamma}_t S_t. \tag{17}$$

换句话说,

$$\widetilde{\beta}_t = C(t, S_t) - \widetilde{\gamma}_t S_t. \tag{18}$$

考虑到 (12) 和 (16), 我们求得

$$\widetilde{\beta}_t = -K\Phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma\sqrt{T-t}\,\varphi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{19}$$

值得注意的是, 当 $t \uparrow T$ 时 $\widetilde{\gamma}_t$ 和 $\widetilde{\beta}_t$ 的性态的下列特点.

假定, 在终端时刻 T 的邻域中股票价格 $S_t > K$. 于是由 (16) 和 (19) 可见, 当 $t \uparrow T$ 时,

$$\widetilde{\gamma}_t \to 1, \quad \widetilde{\beta}_t \to -K. \tag{20}$$

如果 $S_t < K$, 那么当 $t \uparrow T$ 时,

$$\widetilde{\gamma}_t \to 0, \quad \widetilde{\beta}_t \to 0. \tag{21}$$

这些关系式的每一个都是完全自然的.

事实上, 如果在时刻 T 的邻域内, $S_t < K$, 那么偿付函数 $f_T = 0$, 并且显然, 期权出售者只需在时刻 T 有等于零的资本 $X_T^{\widetilde{\pi}}$, 它在性质 (21) 满足时将满足.

如果在时刻 T 的邻域中价格 S_t 满足 $S_t > K$, 那么 $f_T = S_T - K$, 并且期权出售者应该有资本 $X_T^{\widetilde{\pi}} = S_T - K$. 由于 $X_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_t + \widetilde{\gamma}_t S_t$, 故我们看到, 当 (20) 满足时, 出售者得到所要求的数额, 因为 $X_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_t + \widetilde{\gamma}_t S_t \to S_T - K$.

§1b. Black-Scholes 公式. I. 鞅推导

1. 正如上面已经注意到, 线性 *Bachelier* 模型

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t \tag{1}$$

首先有价格 S_t 可能取负值的缺陷.

更现实的是几何布朗运动 (又称经济布朗运动, [420]) 模型, 其中价格表示为下列形式:

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \tag{2}$$

其中

$$H_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t. \tag{3}$$

换句话说,

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t}. \tag{4}$$

应用 Itô 公式 (第三章 §3d), 我们求得

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

经常用记号方式把这个表达式记成下列形式:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

以强调它与下列公式的类似:

$$\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \mu + \sigma \varepsilon_n,$$

这一公式例如在前面离散情形下的 Cox-Ross-Rubinstein 模型中运用 (参见第二章 §1e).

几何布朗运动模型 (2) 是 1965 年由 P. Samuelson 在著作 [420] 中提出的, 正是它成为 *Black-Merton-Scholes* 模型的基础, 而后一模型与 1973 年在著作 [44] 和 [346] 中得到的有偿付函数 $f_T=(S_T-K)^+$ 的欧式标准买入期权的合理价格的著名的 *Black-Scholes* 公式相联系.

2. 这样, 我们将考察 Black-Merton-Scholes 的 (B,S)-模型, 其中假定银行账户 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 如下演变:

$$dB_t = rB_t dt, \tag{5}$$

而股票价格 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 遵循几何布朗运动:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \tag{6}$$

这样一来, 设

$$B_t = B_0 e^{rt}, \tag{7}$$

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}. \tag{8}$$

定理 (Black-Scholes 公式). 在模型 (5)–(6) 中有偿付函数 $f_T=(S_T-K)^+$ 的标准欧式买入期权的合理价格 $\mathbb{C}_T=\mathbb{C}(f_T;\mathsf{P})$ 由下列公式来确定:

$$\boxed{\mathbb{C}_T = S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right)} \tag{9}$$

特别是, 当 $S_0=K$ 和 $r=0$ 时,

$$\mathbb{C}_T = S_0\left[\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)\right], \tag{10}$$

并且当 $T\to 0$ 时, $\mathbb{C}_T \sim K\sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}$ (比较 §1a 中的公式 (6)).

证明. 在著作 [44] 和 [346] 中给出的这个公式的证明将在下节中引入. 现在将给出另一个证明, 它自然称为 “鞅方法”, 而在第七章已经为此作出所有必要的准备.

运用与上节中同样的或类似的记号, 令

$$Z_T = \exp\left(-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T\right), \tag{11}$$

并设 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 为在 $(\Omega,\mathscr{F}_T)$ 上的满足 $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T d\mathsf{P}_T$ 的测度.

根据 Girsanov 定理 (第七章 §3b), 有 $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$ 的过程 $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t \leqslant T}$ 是关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 的维纳过程, 而这就是说,

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(\mu t + \sigma W_t; t \leqslant T \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T) &= \mathrm{Law}(rt + \sigma \widetilde{W}_t; t \leqslant T \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T) \\ &= \mathrm{Law}(rt + \sigma W_t; t \leqslant T \,|\, \mathsf{P}_T).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(S_t; t \leqslant T \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T) &= \mathrm{Law}\left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}; t \leqslant T \,\middle|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T\right) \\ &= \mathrm{Law}\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}; t \leqslant T \,\middle|\, \mathsf{P}_T\right).\end{aligned} \tag{12}$$

由第七章 §4a 中的定理得到, 在有 $\int_0^T \gamma_u^2 S_u^2 du < \infty$ (P-a.s.) 的 0-容许策略 $\pi = (\beta, \gamma)$ 的类中, 合理价值 $\mathbb{C}_T = \mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ 由下列公式来定义:

$$\mathbb{C}_T = B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{f_T}{B_T}. \tag{13}$$

由于在所考察的情形下, $f_T = (S_T - K)^+$, 故考虑到 (12) 和维纳过程的自相似性质 ($\mathrm{Law}(W_T) = \mathrm{Law}(\sqrt{T} W_1)$), 我们求得

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_T &= B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{f_T}{B_T} = e^{-rT} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} (S_T - K)^+ \\ &= e^{-rT} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T} - K\right)^+ \\ &= e^{-rT} \mathsf{E}_{\mathsf{P}_T} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T} - K\right)^+ \\ &= e^{-rT} \mathsf{E}_{\mathsf{P}_T} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T} W_1} - K\right)^+ \\ &= e^{-rT} \mathsf{E}_{\mathsf{P}_T} \left(S_0 e^{rT} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma \sqrt{T} W_1} - K\right)^+ \\ &= e^{-rT} \mathsf{E} \left(a e^{b\xi - \frac{b^2}{2}} - K\right)^+,\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$a = S_0 e^{rT}, \ \ b = \sigma\sqrt{T}, \ \ \xi \sim \mathscr{N}(0, 1). \tag{15}$$

简单的计算指出,

$$\mathsf{E} \left(a e^{b\xi - \frac{b^2}{2}} - K\right)^+ = a \Phi\left(\frac{\ln \frac{a}{K} + \frac{1}{2} b^2}{b}\right) - K \Phi\left(\frac{\ln \frac{a}{K} - \frac{1}{2} b^2}{b}\right). \tag{16}$$

从而, 由 (14)–(16) 得到,

$$\mathbb{C}_T = S_0 \Phi\left(\frac{\ln \frac{a}{K} + \frac{1}{2} b^2}{b}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln \frac{a}{K} - \frac{1}{2} b^2}{b}\right).$$

由此代入值 $a = S_0 e^{rT}$ 和 $b = \sigma\sqrt{T}$, 我们导得 *Black-Scholes* 公式 (9).

定理得证.

注 1. 如果令

$$y_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r \pm \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}},$$

那么公式 (9) 可取更紧凑的形式:

$$\mathbb{C}_T = S_0\Phi(y_+) - Ke^{-rT}\Phi(y_-). \tag{17}$$

设 $\mathbb{P}_T$ 为有偿付函数 $f_T = (K - S_T)^+$ 的标准欧式买入期权的合理价格. 那么, 由于

$$\mathbb{P}_T = \mathbb{C}_T - S_0 + Ke^{-rT}$$

(比较第六章 §4d 中的 "买入–卖出期权平价" 恒等式 (9)), 故

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}_T = -S_0\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\ + Ke^{-rT}\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\end{aligned}} \tag{18}$$

或者

$$\mathbb{P}_T = -S_0\Phi(-y_+) + Ke^{-rT}\Phi(-y_-). \tag{19}$$

3. 所考察的模型为 T-完全的 (参见第七章 §2d 中的定义), 从而存在 0-容许策略 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$, 使得其资本 $X^{\widetilde{\pi}} = (X_t^{\widetilde{\pi}})_{t \leqslant T}$ 满足 $X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathbb{C}_T$ 以及 $X_T^{\widetilde{\pi}}$ 刚好复制 f_T:

$$X_T^{\widetilde{\pi}} = f_T \ (\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

根据第七章 §4b 中的定理,

$$
\begin{aligned}
X_t^{\widetilde{\pi}} &= B_t \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\frac{f_T}{B_T}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) = e^{-r(T-t)}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}((S_T-K)^+ \mid \mathscr{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\left(S_t\cdot\frac{S_T}{S_t}-K\right)^+\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) \\
&= e^{-r(T-t)}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\left(S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}-K\right)^+\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) \\
&= e^{-r(T-t)}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\left(S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}-K\right)^+\,\Big|\,S_t\right) \\
&= e^{-r(T-t)}\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T}\left(\left(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}-K\right)^+\,\Big|\,S_t\right) \\
&= e^{-r(T-t)}\mathsf{E}\left(\left(S_t e^{r(T-t)}e^{b\xi-\frac{b^2}{2}}-K\right)^+\,\Big|\,S_t\right) \\
&= e^{-r(T-t)}\mathsf{E}\left(\left(a e^{b\xi-\frac{b^2}{2}}-K\right)^+\,\Big|\,S_t\right),
\end{aligned} \tag{20}
$$

其中

$$
a = S_t e^{r(T-t)},\ \ b = \sigma\sqrt{T-t},\ \ \xi \sim \mathscr{N}(0,1),
$$

这时 S_t 和 $\xi = W_T - W_t$ 关于原测度 P 相互独立.

考虑到公式 (16), 由 (20) 我们求得, 价格 $C(t,S_t) = X_t^{\widetilde{\pi}}$ 由下列表达式确定:

$$
\begin{aligned}
C(t,S_t) =& S_t\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(T-t)(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&- Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned} \tag{21}
$$

这样, 如同 §1a (参见第 3 点), 可确立, 对于最优对冲组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}_t, \widetilde{\gamma}_t)_{t\leqslant T}$, 有

$$
\widetilde{\gamma}_t = \frac{\partial C}{\partial S}(t,S_t). \tag{22}
$$

由 (21) 经过简单的变换, 我们求得

$$
\widetilde{\gamma}_t = \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(T-t)(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \tag{23}
$$

(比较 §1a 中的公式 (16)), 并由于 $\widetilde{\beta}_t B_t + \widetilde{\gamma}_t S_t = C(t,S_t)$, 故

$$
\widetilde{\beta}_t = -\frac{K}{B_0}e^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{24}
$$

值得注意的是, $0 < \widetilde{\gamma}_t < 1$ 以及 $\widetilde{\beta}_t$ 总是负的, 而这意味着总向银行账户贷款, 但 $-\dfrac{K}{B_0} < \widetilde{\beta}_t$.

正如在 *Bachelier* 模型情形中那样, 这里也有 §1a 中的性质 (20) 和 (21) 满足:

如果 $t\uparrow T$ 以及在时刻 T 的邻域中价格 $S_t>K$, 那么

$$\widetilde{\gamma}_t S_t \to S_T, \quad \widetilde{\beta}_t B_t \to -K;$$

以及

如果 $t\uparrow T$ 以及在时刻 T 的邻域中价格 $S_t<K$, 那么

$$\widetilde{\gamma}_t S_t \to 0, \quad \widetilde{\beta}_t B_t \to 0.$$

注 2. 上面考察的价格 $C(t,S_t)$ 自然也依赖于确定原模型的参数 r 和 σ. 为了强调这一依赖关系, 我们将把这一价格记为 $C=C(t,s,r,\sigma)$ (其中 $S_t=s$).

在实际中, 经常很重要的是有关价格 $C(t,s,r,\sigma)$ 关于参数 t,s,r,σ 的变化的 "敏感度" 的表示式. 这种 "敏感度" 的标准度量是下列量 (参见例如, [36] 和 [415]):

$$\theta=\frac{\partial C}{\partial t}, \quad \Delta=\frac{\partial C}{\partial s}, \quad \rho=\frac{\partial C}{\partial r}, \quad V=\frac{\partial C}{\partial \sigma}.$$

(字母 'V' 在这里是作为 'vega' 引入的.)

在 *Black-Scholes* 模型的情形下, 由 (21) 我们求得

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{s\sigma\varphi(Y_+(T-t))}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(y_-(T-t)),\\
\Delta &= \Phi(y_+(T-t)),\\
\rho &= K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(y_-(T-t)),\\
V &= s\varphi(y_+(T-t))\sqrt{T-t},
\end{aligned}$$

其中

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},$$

$$y_\pm(T-t)=\frac{\ln\frac{s}{K}+(T-t)(r\pm\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4. 在 (14)–(16) 中给定的量 $\mathbb{C}_T$ 的计算也可用略为不同的方式来引入, 它基于通过适当选择在第七章 §1b 中所叙述的折现过程 ("numéraire") 来进行.

为此, 我们把有 $f_T=(S_T-K)^+$ 的公式 (13) 改写为下列形式:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_T &= B_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\frac{(S_T-K)^+}{B_T} = B_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\frac{(S_T-K)^+}{B_T}I(S_T>K)\\
&= B_0\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\frac{S_T}{B_T}I(S_T>K) - Ke^{-rT}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}I(S_T>K).
\end{aligned}\tag{25}$$

由 (12), 计算 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}I(S_T>K)$ 不带来困难:

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}I(S_T>K)=\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right).\tag{26}$$

为计算 $B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \dfrac{S_T}{B_T} I(S_T > K)$, 我们引入过程 $\overline{Z} = (\overline{Z}_t)_{t \leqslant T}$,

$$\overline{Z}_t = \frac{S_t/S_0}{B_t/B_0}. \tag{27}$$

重要的是要注意到, 过程 $\overline{Z}$ (关于 "鞅" 测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$) 是正鞅, 且 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \overline{Z}_T = 1$. 从而, 可通过令

$$d\overline{\mathsf{P}}_T = \overline{Z}_T d\widetilde{\mathsf{P}}_T \tag{28}$$

引入新测度 $\overline{\mathsf{P}}_T$. (在著作 [434] 中, 测度 $\overline{\mathsf{P}}_T$ 称为 (关于 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 的) 对偶鞅测度.)

由 (7) 和 (8),

$$\overline{Z}_t = e^{\sigma W_t + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t} = e^{\sigma \widetilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$

其中 $\widetilde{W}_t = W_t + \dfrac{\mu - r}{\sigma} t \ (t \leqslant T)$ 为关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 的维纳过程.

根据 Girsanov 定理 (第三章 §3e 或第八章 §3b), 容易验证, 关于测度 $\overline{\mathsf{P}}_T$, 下列过程是维纳过程:

$$\overline{W}_t = \widetilde{W}_t - \sigma t \ \left(= W_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} - \sigma \right) t \right), \quad t \leqslant T. \tag{29}$$

考虑到所引入的记号, 我们求得

$$B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{S_T}{B_T} I(S_T > K) = S_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \overline{Z}_T I(S_T > K) = S_0 \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K),$$

从而, 由 (25) 得到

$$\mathbb{C}_T = S_0 \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K) - K e^{-rT} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K). \tag{30}$$

类似于 (12),

$$\begin{aligned} \operatorname{Law}(S_t; t \leqslant T \,|\, \overline{\mathsf{P}}_T) &= \operatorname{Law}\left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}; t \leqslant T \,\middle|\, \overline{\mathsf{P}}_T \right) \\ &= \operatorname{Law}\left(S_0 e^{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \overline{W}_t}; t \leqslant T \,\middle|\, \overline{\mathsf{P}}_T \right) \\ &= \operatorname{Law}\left(S_0 e^{rt} e^{\sigma W_t + \frac{\sigma^2}{2} t}; t \leqslant T \,\middle|\, \overline{\mathsf{P}}_T \right), \end{aligned} \tag{31}$$

特别是, 如果 $\xi \sim \mathscr{N}(0,1)$, 那么

$$\operatorname{Law}(S_T \,|\, \overline{\mathsf{P}}_T) = \operatorname{Law}\left(S_0 e^{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \cdot e^{\sigma \sqrt{T} \xi} \,\middle|\, \mathsf{P}_T \right).$$

由此得到

$$\mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K) = \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T}} \right). \tag{32}$$

由 (30), (26) 和 (32), 正如在这一点开始所指出的, 我们得到对于 $\mathbb{C}_T$ 的 *Black-Scholes* 公式的有点新的推导.

§1c. Black-Scholes 公式. II. 基于基本方程解的推导

1. 现在我们介绍期权合约的合理价格的 *Black-Scholes* 公式的原始推导, 它是由 F. Black 和 M. Scholes [44] 和 Merton [346] 在 1973 年独立给出的.

当然, 在这里对这些作者来说, 首要的问题自然是怎样理解合理价格. 他们的简单明了的卓越思想在于, 这一价格必须无非是使得期权出售者有可能构建对冲组合的初始资本的最小值.

形式上, 这有下列含义.

假设所考察的欧式期权合约有执行时刻 T 和偿付函数 f_T.

于是这样的在满足 $0 \leqslant t \leqslant T$ 的时刻 t 签约的期权合约的合理 (公平) 价格 (根据 F. Black, M. Scholes 和 R. Merton 的定义) 理解为欧式完善对冲价格:

$$\mathbb{C}_{[t,T]} = \inf\{x\colon \exists\pi,\ 使得\ X_t^\pi = x\ 和\ X_T^\pi = f_T\ (\mathsf{P}\text{-a.s.})\}. \tag{1}$$

(比较第六章 §1b 和第七章 §4b 中的相应定义; 量 $\mathbb{C}_{[0,T]}$ 以前也记为 $\mathbb{C}_T$.)

一般来说, 是否存在完善对冲在先验上并不明显.

由第七章 §§4a, b 中的结果得到, 在所考察的 (B,S)-市场的模型中, 这样的对冲实际上是存在的, 并且 $Y_t = \mathbb{C}_{[t,T]}$ 重合于量 $B_t \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\dfrac{f_T}{B_T}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right)$, 其中 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ 为鞅测度, 它也是在 §1b 中给出的推导称为 "鞅推导" 的原因.

在提出 "鞅" 方法以前的著作 [44], [346] 中, 量 $Y_t = \mathbb{C}_{[t,T]}$ 的计算方法是不同的, 它如下形成.

由于无论是过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$, 还是偿付函数 $f_T = (S_T - K)^+$, 都有 "Markov" 特征, 自然假定 $\mathscr{F}_t$-可测量 Y_t 只依赖于值 S_t:

$$Y_t = Y(t, S_t).$$

在同时假定 $[0,T)\times(0,\infty)$ 上定义的函数 $Y = Y(t,S)$ 充分光滑 (更确切地说, $Y \in C^{1,2}$) 的条件下, 著作 [44] 和 [346] 的作者得到下列基本方程:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = rY, \tag{2}$$

其边界条件为

$$Y(T,S) = (S-K)^+. \tag{3}$$

(方程 (2) 的推导在第七章 §4c 中给出; 参见那里的方程 (19).)

在通向 *Black-Scholes* 公式的途径上的下一步 (即值 $Y(0,S_0)$ 的公式) 在于求出问题 (2)–(3) 的解.

方程 (2) 属于 *Feyman-Kac* 型方程 (参见第三章 §3f 中的 (19)), 它可用解这种方程的标准技巧来求解.

我们引入新变量

$$\theta = \sigma^2(T-t), \tag{4}$$

$$Z = \ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \tag{5}$$

并令

$$V(\theta, Z) = e^{r(T-t)} Y(t, S). \tag{6}$$

在新变量下, 问题 (2)–(3) 等价于问题

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0, \tag{7}$$

$$V(0, Z) = (e^Z - K)^+. \tag{8}$$

方程 (7) 是热传导方程, 而根据第三章 §3f 中的公式 (17′), 问题 (7)–(8) 的解由下列表达式来确定:

$$V(\theta, Z) = \mathsf{E}(e^{W_\theta + Z} - K)^+, \tag{9}$$

其中 $W = (W_\theta)$ 为标准维纳过程.

记

$$a = e^{Z + \frac{\theta}{2}}, \quad b = \sqrt{\theta}, \quad \xi \sim \mathscr{N}(0,1).$$

于是

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(e^{W_\theta + Z} - K)^+ &= \mathsf{E}\left(e^Z \cdot e^{\sqrt{\theta} W_1} - K\right)^+ \\ &= \mathsf{E}\left(e^{Z + \frac{\theta}{2}} \cdot e^{\sqrt{\theta} W_1 - \frac{(\sqrt{\theta})^2}{2}} - K\right)^+ \\ &= \mathsf{E}\left(a e^{b\xi - \frac{b^2}{2}} - K\right)^+. \end{aligned} \tag{10}$$

应用 §1b 中的公式 (16), 我们求得

$$\mathsf{E}\left(e^{W_\theta + Z} - K\right)^+ = e^{Z + \frac{\theta}{2}} \Phi\left(\frac{Z - \ln K + \theta}{\sqrt{\theta}}\right) - K\Phi\left(\frac{Z - \ln Z}{\sqrt{\theta}}\right). \tag{11}$$

最后, 考虑到 (4) 和 (5) 的记号, 由 (6) 和 (11) 导得

$$\begin{aligned} Y(t, S) &= e^{-r(T-t)} V(\theta, Z) \\ &= S\Phi\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + (T-t)(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

(比较 §1b 中的公式 (21).)

令这里的 $t=0$ 和 $S=S_0$, 我们得到所要求的 *Black-Scholes* 公式 (9). 在 §1b 中已经指出, 有 $\widetilde{\gamma}_t = \dfrac{\partial Y}{\partial S}(t, S_t)$, $\widetilde{\beta}_t B_t = Y(t, S_t) - S_t\widetilde{\gamma}_t$ 的组合 $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}_t, \widetilde{\gamma}_t)_{t\leqslant T}$ 是使得资本 $X_T^{\widetilde{\pi}}$ 恰好复制偿付索求 $f_T = (S_T - K)^+$ 的对冲.

2. 作为结束, 我们注意下列涉及所引入的 *Black-Scholes* 公式的两种推导的状况.

在 §1b 中的 "鞅" 推导基于在所考察的 (B, S)-市场模型中存在唯一的鞅测度. 这就确定了所考察的模型的无套利性, 并给出按公式 $\mathbb{C}_T = B_0 \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \dfrac{f_T}{B_T}$ 来计算合理价格的可能性, 它 (对于 $f_T = (S_T - K)^+$) 就体现在 *Black-Scholes* 公式中.

基于 "基本方程" 解的推导导出同样的公式. 因而值得强调的是, 在这一推导中, 无套利和完善对冲的思想表达为由于问题 (2)–(3) 的解的唯一性, 所求得的价格 $Y(0, S_0)$ 自动是 "无套利"、"公平" 价格: 如果所指派的期权价格小于 $Y(0, S_0)$, 那么期权出售者, 一般来说, 不可能履行自己的合约义务, 而如果大于 $Y(0, S_0)$, 那么出售者显然将有纯收益 ("免费午餐 (free lunch)"). 详情参见第五章 §1b.

§1d. Black-Scholes 公式. III. 带分红的情形

我们将重新假定, (B, S)-市场由 §1b 中的关系式 (5) 和 (6) 来描述, 但对股票持有者支付分红 (比较第五章 §1a 中的第 6 点).

更确切地说, 这意味着下列情况. 如果 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 为股票的市场价格, 那么考虑支付分红的股票的持有者的资本 $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)_{t\geqslant 0}$ 可认为是按下列法则 (并考虑折现) 来演变的:

$$d\left(\frac{\widetilde{S}_t}{B_t}\right) = d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) + \frac{\delta S_t dt}{B_t}. \tag{1}$$

这里 $\delta \geqslant 0$ 是刻画分红支付强度 (rate) 的参数. 如果 $B_t \equiv 1$, 那么由 (1) 得到,

$$d\widetilde{S}_t = dS_t + \delta S_t dt, \tag{2}$$

而这就是说, 股票持有者的资本在时间 dt 中的增加是由股票的市场价格的变动 dS_t 和与 S_t 成正比的分红 $\delta S_t dt$ 叠加形成的.

由于 $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ 以及

$$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t}\left((\mu - r)dt + \sigma dW_t\right), \tag{3}$$

故由 (1),

$$d\left(\frac{\widetilde{S}_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t}\left((\mu - r + \delta)dt + \sigma dW_t\right). \tag{4}$$

记

$$\overline{W}_t = W_t + \frac{\mu - r + \delta}{\sigma} t \tag{5}$$

和

$$\overline{Z}_T = \exp\left(-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T\right). \tag{6}$$

于是, 如果令

$$d\overline{\mathsf{P}}_T = \overline{Z}_T d\mathsf{P}_T$$

来定义测度 $\overline{\mathsf{P}}_T$, 那么由 Girsanov 定理 (参见第三章 §3e), 我们求得, 过程 $\overline{W} = (\overline{W}_t)_{t \leqslant T}$ 关于测度 $\overline{\mathsf{P}}_T$ 将是维纳过程. 因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(\mu t + \sigma W_t; t \leqslant T \mid \overline{\mathsf{P}}_T) &= \mathrm{Law}((r-\delta)t + \sigma \overline{W}_t; t \leqslant T \mid \overline{\mathsf{P}}_T) \\ &= \mathrm{Law}((r-\delta)t + \sigma W_t; t \leqslant T \mid \mathsf{P}_T),\end{aligned}$$

以及

$$\mathrm{Law}(S_t; t \leqslant T \mid \overline{\mathsf{P}}_T) = \mathrm{Law}(S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}; t \leqslant T \mid \mathsf{P}_T). \tag{7}$$

设 $X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t \widetilde{S}_t$, $t \leqslant T$, 为自融资策略 $\pi = (\beta, \gamma)$ 的资本. 由于关于测度 $\overline{\mathsf{P}}_T$ 折现资本 $\left(\dfrac{X_t^\pi}{B_t}\right)_{t \leqslant T}$ 为在有 $\int_0^T \gamma_u^2 \widetilde{S}_u^2 du < \infty$ (P-a.s.) 的 0-容许策略类中的鞅, 故

$$\mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} \frac{X_T^\pi}{B_T} = \frac{X_0^\pi}{B_0}.$$

由此导出 (比较 §1b 中的 (13)), 买入期权的合理价格 $\mathbb{C}_T(\delta; r)$ 由下列公式来确定:

$$\mathbb{C}_T(\delta; r) = B_0 \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} \frac{f_T}{B_T}, \tag{8}$$

其中 $f_T = (S_T - K)^+$.

考虑到 (7) 和 §1b 中的公式 (16), 由 (8) 求得,

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_T(\delta; r) &= e^{-rT} \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} \left(S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} - K\right)^+ \\ &= e^{-rT} \mathsf{E} \left(S_0 e^{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} - K\right)^+ \\ &= e^{-rT} \mathsf{E} \left(S_0 e^{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \sqrt{T} W_1} - K\right)^+ \\ &= S_0 e^{-\delta T} \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &\qquad - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

又设 $\mathbb{P}_T(\delta; r)$ 为具有分红时的卖出期权的对应价格. 不难断定, 价格 $\mathbb{C}_T(\delta; r)$ 和 $\mathbb{P}_T(\delta; r)$ 是由下列 "买入–卖出期权平价" 恒等式相联系的 (比较第六章 §4d 中的 (9)):

$$\mathbb{P}_T(\delta; r) = \mathbb{C}_T(\delta; r) - S_0 e^{-\delta T} + K e^{-rT}. \tag{10}$$

比较公式 (9) 与 §1b 中的对于 $\mathbb{C}_T(0;r)$ $(\equiv \mathbb{C}_T)$ 的公式 (9) 相比较, 并考虑 (10), 我们导得下列结果.

定理. 在具有股票分红时买入期权和卖出期权的合理价格 $\mathbb{C}_T(\delta;r)$ 和 $\mathbb{P}_T(\delta;r)$ 由下列公式给出:

$$\boxed{\mathbb{C}_T(\delta;r) = e^{-\delta T}\mathbb{C}_T(0;r-\delta)} \tag{11}$$

以及

$$\boxed{\mathbb{P}_T(\delta;r) = e^{-\delta T}\mathbb{P}_T(0;r-\delta)} \tag{12}$$

其中 $\mathbb{C}_T(0;r-\delta)$ 和 $\mathbb{P}_T(0;r-\delta)$ 由 §1b 中的公式 (9) 和 (18) 的右端 ("无分红情形") 以 $r-\delta$ 取代 r 来确定.

2. 在扩散 (B,S)-股票市场中的美式期权. 无限时间视野的情形

§2a. 标准买入期权

1. 在运作期权和其他衍生金融工具时, 应该清楚地区分两种情形: 第一种是时间参数 t 属于有限区间 $[0,T]$ 的情形; 第二种是时间参数 t 属于无限区间 $[0,\infty)$ 的情形. 第二种情形当然是某种理想化, 但在数学分析上比起第一种情形来大为简单. 对于第一种情况来说, 这样那样的在时刻 t 的解的概念本质上依赖于量 $T-t$, 即到结束合约作用时刻的剩余时间.

这就说明了为什么随后的叙述从考察第二种情形开始. 有限时间区间 $[0,T]$ 的情形在第 3 节中讨论.

2. 我们将假定, 在渗透概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 中给定标准维纳过程 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 以及扩散 (B,S)-市场有下列结构:

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 > 0, \tag{1}$$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0. \tag{2}$$

对于标准折现买入期权来说, 偿付函数按照定义有下列结构:

$$f_t = e^{-\lambda t} g(S_t), \tag{3}$$

其中 $g(x) = (x-K)^+$, $x \in E = (0,\infty)$.

类似于离散时间情形, 令

$$V^*(x) = \sup B_0 \widetilde{\mathsf{E}}_x \frac{f_\tau}{B_\tau}, \tag{4}$$

其中 sup 对下列所有有限停时的类来取:

$$\mathfrak{M}_0^\infty = \{\tau = \tau(\omega): 0 \leqslant \tau(\omega) < \infty, \omega \in \Omega\}, \tag{5}$$

以及 $\widetilde{\mathsf{E}}_x$ 表示关于鞅测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ 的数学期望, 而关于该测度, 过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 有随机微分

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x. \tag{6}$$

为了简化记号, 我们将从一开始就令 $\mu = r$. 在这一假设下, $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ 和 $\widetilde{\mathsf{E}}_x$ 上的符号 "~" 可忽略.

这样, 设

$$V^*(x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}(S_\tau - K)^+. \tag{7}$$

为了多种目标, 除了类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 以外, 有意义的是还要考察类

$$\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty = \{\tau = \tau(\omega): 0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant \infty, \omega \in \Omega\},$$

其中的 Markov 时刻可理解为也能取值为 $+\infty$; 再令

$$\overline{V}^*(x) = \sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}(S_\tau - K)^+ I(\tau < \infty). \tag{8}$$

求函数 $V^*(x)$ 和 $\overline{V}^*(x)$ 与所考察的标准美式买入期权的定价有最直接的关系, 因为值 $V^*(x)$ 和 $\overline{V}^*(x)$ 恰好重合于合理价格的值, 其中假定期权购买者或者在类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中或者在类 $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 中可选择期权执行时刻, 而 $S_0 = x$. ($\tau = \infty$ 的情形对应不把期权提交执行.) 这一断言的证明在离散时间情形下如同第六章 §2c 中的定理 1 的证明一样进行. 在连续时间情形下, 本质上没有多大改变; 详情参见例如, [33], [265], [281]. 同样, 如果 τ^* 和 $\overline{\tau}^*$ 是在问题 (7), (8) 的解中的最优时刻, 那么它们将是期权购买者提交执行的最优时刻 (在类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 或者 $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 中).

3. 在进行最优停止问题 (7) 和 (8) 的讨论中, 我们先分离出 (无意义的) $\lambda = 0$ 的情形.

在这一情形下,

$$e^{-rt}(S_t - K)^+ = \left(S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t} - Ke^{-rt}\right)^+,$$

由此可见, 过程 $(e^{-rt}(S_t - K)^+)_{t\geqslant 0}$ 为下鞅, 而这就是说, 如果 $\tau \in \mathfrak{M}_0^T$, 即 $\tau(\omega) \leqslant T$, $\omega \in \Omega$, 那么

$$\mathsf{E}_x e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+ \leqslant \mathsf{E}_x e^{-rT}(S_T - K)^+ \leqslant x. \tag{9}$$

根据 *Black-Scholes* 公式 (参见 §1b 中的 (9)),

$$\mathsf{E}_x e^{-rT}(S_T - K)^+ \to x, \quad T \to \infty, \tag{10}$$

对任何 $r \geqslant 0$ 成立.

由于在所考察的情形下, $V^*(x) = \lim_{T\to\infty} V_T^*(x)$, 其中

$$V_T^*(x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^T} \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}(S_\tau - K)^+ \tag{11}$$

(参见 [441; 第 3 章], 并比较第六章 §5b), 那么由 (9) 和 (10) 我们断定, 如果 $\lambda = 0$ 和 $r \geqslant 0$, 那么 "观望需要尽可能地长". 这一说法的确切含义在于, 对于每个 $x > 0$ 和任意的 $\varepsilon > 0$ 可求得这样的确定性时刻 $T_{x,\varepsilon}$, 使得

$$\mathsf{E}_x e^{-rT_{x,\varepsilon}}(S_{T_{x,\varepsilon}} - K)^+ \geqslant x - \varepsilon.$$

4. 我们现在来陈述关于最优停止问题 (7) 和 (8) 对于 $\lambda > 0$ 的情形的基本结果.

定理. 如果 $\lambda > 0$, 那么对于每个 $x \in (0,\infty)$,

$$V^*(x) = \overline{V}^*(x) = \begin{cases} x - K, & x \geqslant x^*, \\ c^* x^{\gamma_1}, & x < x^*, \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}}, \tag{13}$$

$$c^* = \gamma_1^{-\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1 - 1}{K}\right)^{\gamma_1 - 1}, \tag{14}$$

$$x^* = K\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}. \tag{15}$$

在类 $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 中存在最优时刻, 且可取时刻

$$\tau^* = \inf\{t \geqslant 0 \colon S_t \geqslant x^*\}. \tag{16}$$

为这样的时刻. 这时,

$$\mathsf{P}_x(\tau^* < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } r \geqslant \dfrac{\sigma^2}{2} \text{ 或者 } x \geqslant x^*, \\ \left(\dfrac{x}{x^*}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}, & \text{如果 } r < \dfrac{\sigma^2}{2} \text{ 以及 } x < x^*. \end{cases} \tag{17}$$

下面将引入这一断言的两个证明. 第一个证明基于最优停止问题的 "Markov" 方法, 并且在思路上如同离散时间情形的对应结果的证明 (参见第六章 §5b). 第二个证明基于在著作 [32] 中运用的 "鞅" 理念, 它与转换为 "对偶" 概率测度的想法相联结 (参见 §1b 中的第 4 点).

5. 第一个证明. 我们考察比问题 (7) 和 (8) 略为一般的最优停止问题.

设

$$V^*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-\beta\tau} g(S_\tau), \tag{18}$$

$$\overline{V}^*(x) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-\beta\tau} g(S_\tau) I(\tau < \infty) \tag{19}$$

为 Markov 过程 $S = (S_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P}_x)_{t \geqslant 0}$ 的最优停止问题中的价格, $x \in E = (0, \infty)$, 其中 P_x 为有 $S_0 = x$ 的过程 S 的概率分布, $\beta > 0$, 以及 $g = g(x)$ 为某个 Borel 函数.

如果 $g = g(x)$ 为连续非负函数, 那么根据 Markov 的最优停止法则的一般理论 (参见 [441; 第 3 章] 并比较第六章 §2a 中的定理 4):

(a) $V^*(x) = \overline{V}^*(x)$, $x \in E$; (20)

(b) $V^*(x)$ 为函数 $g(x)$ 的最小 β-超过优函数, 即满足下式的函数 $V(x)$ 中的最小者:

$$V(x) \geqslant g(x), \quad V(x) \geqslant e^{-\beta t} T_t V(x), \tag{21}$$

其中 $T_t V(x) = \mathsf{E}_x V(S_t)$;

(c) $V^*(x) = \lim\limits_n \lim\limits_N Q_n^N g(x)$, (22)

其中

$$Q_n g(x) = \max(g(x), e^{-\beta \cdot 2^n} T_{2^{-n}} g(x)); \tag{23}$$

(d) 如果 $\mathsf{E}_x \left[\sup\limits_t e^{-\beta t} g(S_t)\right] < \infty$, 那么对于每个 $\varepsilon > 0$, 时刻

$$\tau_\varepsilon = \inf\{t \colon V^*(S_t) \leqslant e^{-\beta t} g(S_t) + \varepsilon\} \tag{24}$$

为在类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中的 ε-最优停时, 即 $\mathsf{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$, $x \in E$, 以及 $V^*(x) - \varepsilon \leqslant \mathsf{E}_x e^{-\beta\tau_\varepsilon} g(S_{\tau_\varepsilon})$;

(e) 如果时刻

$$\tau_0 = \inf\{t \colon V^*(S_t) \leqslant e^{-\beta t} g(S_t)\}$$

为停时 ($\mathsf{P}_x(\tau_0 < \infty) = 1$, $x \in E$), 那么它在类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中最优:

$$V^*(x) = \mathsf{E}_x e^{-\beta\tau_0} g(S_{\tau_0}), \quad x \in E;$$

这时, 如果某个另外的停时 τ_1 也是最优的, 那么 $\mathsf{P}_x(\tau_0 \leqslant \tau_1) = 1$, $x \in E$, 即 τ_0 是最小的最优停时.

设 $C^* = \{x \in E \colon V^*(x) > g(x)\}$ 以及 $D^* = \{x \in E \colon V^*(x) = g(x)\}$.

由 (22) 和 (23) 不难导出 (比较第六章 §5b), 函数 $V^* = V^*(x)$ 有相当简单的结构, 它是在 $E = (0, \infty)$ 上为优于函数 $g = g(x)$ 的下凸函数. 这时, 存在 x^*, 满足 $C^* = \{x \colon x < x^*\}$ 和 $D^* = \{x \colon x \geqslant x^*\}$.

因此, 问题 (7) 和 (8) 的解归结为求值 x^*, 以及当然还有函数 $V^*(x)$ $(=\overline{V}^*(x))$.

如果分析第六章 §5b 第 6 点中所引入的对求解离散时间情形下的相应问题的讨论, 那么下列思想就变得非常自然: 所要求的值 x^* 和函数 $g(x)$ 的最小 $(\lambda+r)$-超过优函数 $V^*(x)$ 必须是下列 *Stephan* 问题或者自由边界问题 (参见 [441; 3.8]) 的解:

$$L\widetilde{V}(x)=(\lambda+r)\widetilde{V}(x),\quad x<\widetilde{x}, \tag{25}$$

$$\widetilde{V}(x)=g(x),\quad x\geqslant\widetilde{x}, \tag{26}$$

$$\left.\frac{d\widetilde{V}(x)}{dx}\right|_{x\uparrow\widetilde{x}}=\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\downarrow\widetilde{x}}, \tag{27}$$

其中

$$L=rx\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{28}$$

为有随机微分

$$dS_t=S_t(rdt+\sigma dW_t)$$

的过程 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 的无限小算子.

我们将对下列形式的方程 (25) (在暂时未知的区域 $(0,\widetilde{x})$ 中) 求解:

$$V(x)=cx^{\gamma}. \tag{29}$$

于是对于 γ 我们得到方程

$$\gamma^2-\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right)\gamma-\frac{2(\lambda+r)}{\sigma^2}=0. \tag{30}$$

为了简化记号, 我们将认为 $\sigma^2=1$. $\Big($如果 $\sigma^2\neq 1$, 那么在最终答案中需要作替换 $r\to\dfrac{r}{\sigma^2},\lambda\to\dfrac{\lambda}{\sigma^2}.\Big)$

有 $\sigma^2=1$ 的方程 (30) 有两个根

$$\gamma_1=\left(\frac{1}{2}-r\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-r\right)^2+2(\lambda+r)} \tag{31}$$

和

$$\gamma_2=\left(\frac{1}{2}-r\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}-r\right)^2+2(\lambda+r)}. \tag{32}$$

由于 $\lambda>1$, 故 $\gamma_1>1$. (如果 $\lambda=0$, 那么 $\gamma_1=1$.) 根 $\gamma_2<0$.

因此, 方程 (25) 的通解必须有下列形式:

$$\widetilde{V}(x)=c_1x^{\gamma_1}+c_2x^{\gamma_2}. \tag{33}$$

正如在离散时间情形中那样 (第六章 §5b), 由 (33) 我们断定, $c_2 = 0$, 因为否则当 $x \downarrow 0$ 时, $V(x) \to \pm\infty$, 按照所考察的问题的含义, 这是必须要排除的 ($V^*(x) \geqslant 0$, 而 $V^*(x) \leqslant x$).

这样, 对于 $x < \widetilde{x}$, $V(x) = c_1 x^{\gamma_1}$, 其中 c_1 和 "自由" 边界 $\widetilde{x}$ 是暂时未知的常数, 为确定它们, 可利用条件 (26) 和 "光滑粘合" 条件 (27).

条件 (26) 给出关系式

$$c_1 \widetilde{x}^{\gamma_1} = x - K. \tag{34}$$

条件 (27) 有下列形式:

$$c_1 \gamma_1 \widetilde{x}^{\gamma_1 - 1} = 1. \tag{35}$$

由这两个关系式, 我们求得

$$\widetilde{x} = K \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}, \quad c_1 = \gamma_1^{-\gamma_1} \left(\frac{\gamma_1 - 1}{K} \right)^{\gamma_1 - 1}. \tag{36}$$

这样一来, 问题 (25)–(27) 的解 $\widetilde{V}(x)$ 可表示为下列形式:

$$\widetilde{V}(x) = \begin{cases} x - K, & x \geqslant \widetilde{x}, \\ c_1 x^{\gamma_1}, & x < \widetilde{x}, \end{cases} \tag{37}$$

其中 $\widetilde{x}$ 和 c_1 由 (36) 来确定.

注. 如果 $K = 1$, 那么 $\widetilde{V}(x)$ 恰好重合于由第六章 §5b 中的公式 (39) 确定的函数 $\widetilde{V}(x)$; 这点并不令人惊奇, 只需注意到公式 (22) 以及在第六章中求出函数 $\widetilde{V}(x)$ 的方法.

现在如果指出所求函数 $\widetilde{V}(x)$ 重合于价格 $V^*(x)$ (参见 (7)), 那么定理将得证, 而时刻

$$\widetilde{\tau} = \inf\{t \geqslant 0 \colon S_t \geqslant \widetilde{x}\}$$

在类 $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 和类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中最优, 只要 $\mathsf{P}_x(\widetilde{\tau} < \infty) = 1$.

为此, 显然只需断定下列 "检验" 条件成立 (对于 $x \in E = (0, \infty)$):

(A) $\widetilde{V}(x) = \mathsf{E}_x e^{-(\lambda + r)\widetilde{\tau}} (S_{\widetilde{\tau}} - K)^+ I(\widetilde{\tau} < \infty)$

以及

(B) $\widetilde{V}(x) \geqslant \mathsf{E}_x e^{-(\lambda + r)\tau} (S_\tau - K)^+ I(\tau < \infty)$ 对于任何 $\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 成立.

由 $(S_{\widetilde{\tau}} - K)^+ I(\widetilde{\tau} < \infty) = \widetilde{V}(S_{\widetilde{\tau}}) I(\widetilde{\tau} < \infty)$ 和 $\widetilde{V}(x) \geqslant (x - K)^+$, 为使 (A) 和 (B) 成立, 转而需要检验下列条件满足:

(A′) $\widetilde{V}(x) = \mathsf{E}_x e^{-(\lambda + r)\widetilde{\tau}} \widetilde{V}(S_{\widetilde{\tau}}) I(\widetilde{\tau} < \infty)$

以及

(B′) $\widetilde{V}(x) \geqslant \mathsf{E}_x e^{-(\lambda + r)\tau} \widetilde{V}(S_\tau) I(\tau < \infty)$ 对于任何 $\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 和 $x \in E$ 成立.

确立性质 (A′) 和 (B′) 的标准技巧基于把 Itô 公式 (更确切地说, 它的某个推广: "Itô-Meyer 公式") 应用于 $\widetilde{V}(x)$, 具体如下.

设 $V = V(x)$ 为某个 C^2 类函数, 即有连续二阶导数的函数. 于是 "经典的" Itô 公式 (第三章 §5c) 应用于函数 $F(t,x) = e^{-(\lambda+r)t}V(x)$ 和过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$, 导致下列表示式:

$$e^{-(\lambda+r)t}V(S_t) = V(S_0) + \int_0^t e^{-(\lambda+r)u}\,[LV(S_u) - (\lambda+r)V(S_u)]\,du + \int_0^t e^{-(\lambda+r)u}\sigma S_u V'(S_u)dW_u. \tag{38}$$

如果现在转向 (37) 中定义的函数 $\widetilde{V}(x)$, 那么可以察觉, 除了仅仅一个点 $x = \widetilde{x}$ 以外, 这个函数对于所有 $x \in E = (0,\infty)$ 都属于 C^2 类, 从而可认为公式 (38) 对于 $V(x) = \widetilde{V}(x)$ 来说也成立, 其中在点 $x = \widetilde{x}$ 上的导数需作适当的理解.

在所考察的情形下, 函数 $\widetilde{V}(x)$ 是 (下) 凸的, 并且其一阶导数 $\widetilde{V}'(x)$ 存在以及对于所有 $x \in E = (0,\infty)$ 连续, 二阶导数 $\widetilde{V}''(x)$ 除了点 $x = \widetilde{x}$ 以外存在, 但在点 $x = \widetilde{x}$ 上存在极限

$$\widetilde{V}''_-(\widetilde{x}) = \lim_{x\uparrow\widetilde{x}} \widetilde{V}''(x) \quad 和 \quad \widetilde{V}''_+(\widetilde{x}) = \lim_{x\downarrow\widetilde{x}} \widetilde{V}''(x).$$

在随机分析中, P.-A. Meyer 对函数 $V(x)$ 为两个凸函数之差提出的 Itô 公式的推广成立. (参见例如, [248; (5.52)] 或著作 [395; IV] 中的 *Itô-Meyer 公式*.)

我们感兴趣的函数 $\widetilde{V}(x)$ 是 (下) 凸函数, 而对于 $F(t,x) = e^{-(\lambda+r)t}\widetilde{V}(x)$ 和 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 的 *Itô-Meyer 公式*在表面上与公式 (38) 一样, 仅有的变化是二阶导数 $\widetilde{V}''(\widetilde{x})$ 需要取比如值 $\widetilde{V}''_-(\widetilde{x})$.

这样, 考虑到这一约定, 我们求得

$$e^{-(\lambda+r)t}\widetilde{V}(S_t) - \widetilde{V}(S_0) = \int_0^t e^{-(\lambda+r)u}[L\widetilde{V}(S_u) - (\lambda+r)\widetilde{V}(S_u)]du + M_t, \tag{39}$$

其中

$$M_t = \int_0^t e^{-(\lambda+r)u}\sigma S_u \widetilde{V}'(S_u)dW_u. \tag{40}$$

注意到以下这点是有益的: 对于 $x < \widetilde{x}$,

$$L\widetilde{V}(x) - (\lambda+r)\widetilde{V}(x) = 0 \tag{41}$$

(由 (25)), 直接计算还指出, 这一等式也对 $x = \widetilde{x}$ 保持, 而当 $x > \widetilde{x}$ 时,

$$L\widetilde{V}(x) - (\lambda+r)\widetilde{V}(x) \leqslant 0. \tag{42}$$

由 (39), (41) 和 (42) 我们得到 (当 $S_0 = x$ 时)

$$\widetilde{V}(x) \geqslant e^{-(\lambda+r)t}\widetilde{V}(S_t) - M_t. \tag{43}$$

正如由 (40) 可见, 过程 $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ 是局部鞅.

设 (τ_n) 为它的局部化序列, 以及 $\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$. 于是由 (43),

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(x) &\geqslant \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\tau)}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\tau}) - \mathsf{E}M_{\tau_n\wedge\tau}\\ &= \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\tau)}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\tau})\\ &= \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\tau)}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\tau})I(\tau<\infty),\end{aligned}$$

并且, 根据 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(x) &\geqslant \varliminf_n \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\tau)}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\tau})I(\tau<\infty)\\ &\geqslant \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}\widetilde{V}(S_\tau)I(\tau<\infty),\end{aligned}$$

这就证明了 (B′).

现在我们确立性质 (A′).

如果 $x \in \widetilde{D} = \{x\colon x \geqslant \widetilde{x}\}$, 那么 $\mathsf{P}_x(\widetilde{\tau} = 0) = 1$, 以及性质 (A′) 显然.

现在设 $\widetilde{x} \in \widetilde{C} = \{x\colon x < \widetilde{x}\}$. 于是由 (41) 和 (39), 我们得到

$$\widetilde{V}(x) = e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}}) - M_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}},$$

而这就是说,

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(x) &= \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}})\\ &= \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty)\\ &\qquad + \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n})I(\widetilde{\tau}=\infty).\end{aligned} \tag{44}$$

由于

$$\begin{aligned}0 &\leqslant e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty)\\ &\leqslant \sup_{t\leqslant\widetilde{\tau}}[e^{-(\lambda+r)t}\widetilde{V}(S_t)]I(\widetilde{\tau}<\infty)\\ &\leqslant \sup_{t\leqslant\widetilde{\tau}}[e^{-\lambda t}e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}]I(\widetilde{\tau}<\infty)\\ &\leqslant \sup_{t\geqslant 0}[e^{-\lambda t}e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}],\end{aligned}$$

以及

$$\mathsf{E}_x \sup_{t\geqslant 0}[e^{-\lambda t}e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}] < \infty \tag{45}$$

(参见下面的引理 1 的推论 2), 那么根据 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_n \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty)=\mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\widetilde{\tau}}\widetilde{V}(S_{\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty). \tag{46}$$

又, 在集合 $\{\omega\colon \widetilde{\tau}=\infty\}$ 上, 有 $\widetilde{V}(S_{\tau_n})\leqslant\widetilde{V}(\widetilde{x})<\infty$, 因而,

$$\lim_n \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau_n}\widetilde{V}(S_{\tau_n})I(\widetilde{\tau}=\infty)=0. \tag{47}$$

所要求的性质 (A$'$) 由 (44), (46) 和 (47) 得到.

为了完成定理证明, 需要确立性质 (46), 并证明公式 (17) (其中 $\tau^*=\widetilde{\tau}$).

为此, 我们证明下列断言.

引理 1. *对于 $x\geqslant 0$ 以及 $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$,*

$$\mathsf{P}\left(\max_{s\leqslant t}(\mu s+\sigma W_s)\leqslant x\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \tag{48}$$

其中 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$

证明. 为简单起见, 设 $\sigma^2=1$. 根据 Girsanov 定理 (第三章 §3e 或第七章 §3b)

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\max_{s\leqslant t}(\mu s+W_s)>x,\mu t+W_t\leqslant x\right)\\
&\quad=\mathsf{E}I\left(\max_{s\leqslant t}(\mu s+W_s)>x,\mu t+W_t\leqslant x\right)\\
&\quad=\mathsf{E}\exp\left(\mu W_t-\frac{\mu^2}{2}t\right)I\left(\max_{s\leqslant t}W_s>x,W_t\leqslant x\right).
\end{aligned} \tag{49}$$

令 $T_x=\inf\{t\geqslant 0\colon W_t=x\}$. 于是 D. Andry 反射原理断言, 过程

$$\widetilde{W}_t=W_tI(t\leqslant T_x)+(2x-W_t)I(t>T_x) \tag{50}$$

也是维纳过程. (参见第三章中的 §3b, [124], [266] 和 [439].)

由 (49) 和 (50) 我们求得

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\max_{s\leqslant t}(\mu s+W_s)\leqslant x\right)\\
&=\mathsf{P}(\mu t+W_t\leqslant x)-\mathsf{P}\left(\max_{s\leqslant t}(\mu s+W_s)>x,\mu t+W_t\leqslant x\right)\\
&=\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)-\mathsf{E}\exp\left(\mu W_t-\frac{\mu^2}{2}t\right)I\left(\max_{s\leqslant t}W_s>x,W_t\leqslant x\right)\\
&=\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)-\mathsf{E}\exp\left(\mu\widetilde{W}_t-\frac{\mu^2}{2}t\right)I\left(\max_{s\leqslant t}\widetilde{W}_s>x,\widetilde{W}_t\leqslant x\right)\\
&=\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)-\mathsf{E}\exp\left(\mu(2x-W_t)-\frac{\mu^2}{2}t\right)I(W_t\geqslant x)\\
&=\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)-e^{2\mu x}\mathsf{E}\exp\left(\mu W_t-\frac{\mu^2}{2}t\right)I(W_t\geqslant x)\\
&=\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)-e^{2\mu x}\mathsf{P}(\mu t+W_t\geqslant x)\\
&=\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)-e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{-x-\mu t}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}
$$

引理得证.

推论 1. 如果 $\mu<0$, 那么

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}(\mu t+\sigma W_t)\leqslant x\right)=1-\exp\left\{\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right\}. \tag{51}$$

如果 $\mu\geqslant 0$, 那么

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}(\mu t+\sigma W_t)\leqslant x\right)=0. \tag{51$'$}$$

推论 2 ((45) 的证明). 在 (50) 中取 $\mu=-\left(\lambda+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$, 我们求得

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}\left[\sigma W_t-\left(\lambda+\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]\leqslant x\right)=1-\exp\left\{-\left(1+\frac{2\lambda}{\sigma^2}\right)x\right\}. \tag{52}$$

由此很明显, 如果 $\lambda>0$, 那么性质 (45) 满足.

推论 3 ((17) 的证明). 设 $S_t=xe^{rt}\cdot e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}$ 以及 $x^*>x$. 那么由 $\mu=r-\dfrac{\sigma^2}{2}<0$ 的 (51), 我们求得

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\tau^*=\infty)&=\mathsf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}\left[\sigma W_t+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]\leqslant\ln\frac{x^*}{x}\right)\\
&=1-\left(\frac{x}{x^*}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}},
\end{aligned}\tag{53}
$$

这就证明了公式 (17) 对于 $r<\frac{\sigma^2}{2}$ 以及 $x<x^*$ 成立. 当 $x\geqslant x^*$ 时, 这一公式显然, 而对于 $x<x^*$ 以及 $\mu=r-\frac{\sigma^2}{2}\geqslant 0$, 公式 (17) 由 (51′) 得到.

定理的第一个证明完成.

6. 第二个证明. 设 $\beta=\lambda+r$, $\lambda>0$, γ_1 由公式 (31) 和 $S_0=1$ 来确定.

令

$$Z_t=e^{-\beta t}S_t^{\gamma_1}, \tag{54}$$

我们求得

$$Z_t=\exp\left\{\gamma_1\sigma W_t-\frac{(\gamma_1\sigma)^2}{2}t\right\}. \tag{55}$$

由此很明显, $Z=(Z_t)$ 为 P-鞅, 并且

$$e^{-\beta t}(S_t-K)^+=S_t^{-\gamma_1}(S_t-K)^+Z_t.$$

如果记

$$G(x)=x^{-\gamma_1}(x-K)^+,$$

那么我们看到

$$\begin{aligned}\overline{V}^*(1)&=\sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty}\mathsf{E}e^{-(\lambda+r)\tau}(S_\tau-K)^+I(\tau<\infty)\\&=\sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty}\mathsf{E}G(S_\tau)Z_\tau I(\tau<\infty).\end{aligned} \tag{56}$$

所考察的过程是由维纳过程 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 生成的, 不妨碍一般性, 可立刻假定, $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 为坐标维纳渗透空间, 即 $\Omega=C[0,\infty)$ 为连续函数 $\omega=(\omega(t))_{t\geqslant 0}$ 的空间, $\mathscr{F}_t=\sigma(\omega\colon\omega(s),s\leqslant t)$, $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_t$ 和 P 为维纳测度.

设 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的测度, 关于它, 过程 $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ 为维纳过程, 其中 $\widetilde{W}_t=W_t-(\gamma_1\sigma)t$.

如果 $\mathsf{P}_t=\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_t$ 和 $\widetilde{\mathsf{P}}_t=\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_t$ 为测度 P 和 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 在 $\mathscr{F}_t$ 上的局限, 那么 $\widetilde{\mathsf{P}}_t\sim\mathsf{P}_t$, 它们的 Radon-Nikodym 导数为

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}=Z_t, \tag{57}$$

其中 Z_t 由公式 (55) 来确定. (参见例如, 第三章 §3e 中的定理 2.)

因此, 如果 $A\in\mathscr{F}_t$, 那么

$$\widetilde{\mathsf{E}}I_A=\mathsf{E}I_AZ_t,$$

其中 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 为关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的均值, 而如果 $A\in\mathscr{F}_\tau$, 那么

$$\widetilde{\mathsf{E}}I_AI_{(\tau<\infty)}=\mathsf{E}Z_\tau I_AI_{(\tau<\infty)} \tag{58}$$

(比较第五章 §3a 中的 (2)).

由此我们求得, 如果 $f = f(\omega)$ 为非负 $\mathscr{F}_\tau$-可测函数, 那么

$$\widetilde{\mathsf{E}} f I_{(\tau<\infty)} = \mathsf{E} Z_\tau f I_{(\tau<\infty)}. \tag{59}$$

它与 (56) 一起, 导致

$$\overline{V}^*(1) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \widetilde{\mathsf{E}} G(S_\tau) I(\tau < \infty). \tag{60}$$

换句话说, 最优停止问题 (8) (对于 $x = 1$) 等价于新问题 (60), 其解容易由下列设想得到.

我们考察函数 $G(x) = x^{-\gamma_1}(x-K)^+$. 这个函数在点 $x^* = K\dfrac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}$ 上达到它在 $E = (0, \infty)$ 上的最大值 (比较 (15)), 并且

$$\max_{x \in E} G(x) = c^* \quad (= G(x^*)), \tag{61}$$

其中 c^* 由公式 (14) 来确定. 因此, 由 (60),

$$\overline{V}^*(1) \leqslant c^* \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \widetilde{\mathsf{E}} I(\tau < \infty) \leqslant c^*. \tag{62}$$

设 $\tau^* = \inf\{t \geqslant 0 \colon S_t \geqslant x^*\}$ 以及初值 $S_0 = 1 \leqslant x^*$. 由于根据假定, $\lambda > 0$, 故 $x^* < \infty$.

引理 2. 1) 当 $\lambda > 0$ 时,

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\tau^* < \infty) = 1. \tag{63}$$

2) 如果 $\lambda > 0$, 且同时 $r \geqslant \dfrac{\sigma^2}{2}$, 那么

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\tau^* < \infty) = 1. \tag{64}$$

证明. 过程 $\widetilde{W}_t = W_t - (\gamma_1 \sigma)t$, $t \geqslant 0$, 为关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 的维纳测度, 以及按照 Girsanov 定理,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{P}}(\tau^* < \infty) &= \widetilde{\mathsf{P}}\left(\max_{t \geqslant 0} S_t \geqslant x^*\right) = \widetilde{\mathsf{P}}\left(\max_{t \geqslant 0}\left[\sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right] \geqslant \ln x^*\right) \\
&= \widetilde{\mathsf{P}}\left(\max_{t \geqslant 0}\left[\sigma \widetilde{W}_t + \left(\gamma_1\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right] \geqslant \ln x^*\right) \\
&= \widetilde{\mathsf{P}}\left(\max_{t \geqslant 0}\left[\sigma W_t + \left(\gamma_1\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right] \geqslant \ln x^*\right) = 1,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 (51) 以及下列关系式得到:

$$\gamma_1\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2} = \sigma^2\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}} > 0.$$

从而, (63) 得证. 性质 (64) 已经在推论 3 中确立.

引理 2 得证.

我们重新转向 (62). 由于 $\widetilde{\mathsf{P}}(\tau^* < \infty) = 1$ 以及 $G(S_{\tau^*}) = G(x^*) = c^*$, 故

$$\widetilde{\mathsf{E}}G(S_{\tau^*}) = c^*,$$

以及由 (62) 得到,

$$\begin{aligned}\overline{V}^*(1) = \widetilde{\mathsf{E}}G(S_{\tau^*}) &= \widetilde{\mathsf{E}}G(S_{\tau^*})I(\tau^* < \infty)\\ &= \mathsf{E}e^{-(\lambda+r)\tau^*}(S_{\tau^*} - K)I(\tau^* < \infty) = c^*.\end{aligned}$$

由此 (对于 $x = 1$) 得到公式 (12) 的第二个证明, 并确立了时刻 τ^* 的最优性. 如果 $r \geqslant \dfrac{\sigma^2}{2}$, 那么 $\mathsf{P}(\tau^* < \infty) = 1$, 因而, 在这一条件下, 时刻 τ^* 在类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中最优.

§2b. 标准卖出期权

对有偿付函数 $f_t = e^{-\lambda t}g(S_t)$ (其中 $g(x) = (K - x)^+$, $x \in E = (0,\infty)$) 的卖出期权的讨论与买入期权的情形中一样进行. 因此, 可只限于陈述结果及其证明的基本要点.

我们将认为, 扩散 (B,S)-市场用 §2a 中的表示式 (1) 和 (2) 来描述, 以及

$$U_*(x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}(K - S_\tau)^+, \tag{1}$$

$$\overline{U}_*(x) = \sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}_0^\infty}} \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}(K - S_\tau)^+ I(\tau < \infty). \tag{2}$$

定理. 设 $\lambda \geqslant 0$. 那么

$$U_*(x) = \overline{U}_*(x) = \begin{cases} K - x, & x \leqslant x_*,\\ c_* x^{\gamma_2}, & x > x_*,\end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \frac{2(\lambda+r)}{\sigma^2}}, \tag{4}$$

$$c_* = |\gamma_2|^{|\gamma_2|}\left(\frac{K}{1+|\gamma_2|}\right)^{1+|\gamma_2|}, \tag{5}$$

$$x_* = K\frac{|\gamma_2|}{1+|\gamma_2|}. \tag{6}$$

在类 $\overline{\mathfrak{M}_0^\infty}$ 中存在最优时刻, 并可取时刻

$$\tau_* = \inf\{t \geqslant 0\colon S_t \leqslant x_*\} \tag{7}$$

作为这样的时刻.

这时,

$$\mathsf{P}_x(\tau_* < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{当 } r \leqslant \dfrac{\sigma^2}{2} \text{ 或 } x \leqslant x_*, \\ \left(\dfrac{x_*}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}, & \text{当 } r > \dfrac{\sigma^2}{2} \text{ 或 } x > x_*. \end{cases} \tag{8}$$

这一定理的证明甚至比 §2a 中的定理证明还要简单; 这点可由函数 $g(x) = (K - x)^+$ 有界来说明.

类似于离散时间情形的相应问题 (第六章 §5c), 自然假定, 观察延续区域 C_* 和观察停止区域 D_* 有下列形式:

$$C_* = \{x \in E\colon x > x_*\} = \{x \in E\colon U_*(x) > g(x)\}$$

和

$$D_* = \{x \in E\colon x \leqslant x_*\} = \{x \in E\colon U_*(x) = g(x)\},$$

其中 x_* 和 $U_*(x)$ 是下列 *Stephan* 问题的解 ($\widetilde{x}$ 和 $\widetilde{U}(x)$):

$$L\widetilde{U}(x) = (\lambda + r)\widetilde{U}(x), \quad x > \widetilde{x}, \tag{9}$$

$$\widetilde{U}(x) = g(x), \quad x \leqslant \widetilde{x}, \tag{10}$$

$$\left.\frac{d\widetilde{U}(x)}{dx}\right|_{x\downarrow\widetilde{x}} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\uparrow\widetilde{x}}. \tag{11}$$

在所考察的情形下, 方程 (9) 在区域 $x > \widetilde{x}$ 中的有界解有形式为 $\widetilde{U}(x) = \widetilde{c}x^{\gamma_2}$, 其中 γ_2 是 §2a 中由公式 (4) 定义的二次方程 (30) 的根. 运用条件 (10) 和 (11), 我们可唯一地求得等式 (5) 和 (6) 右端给定的值 $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{x}$.

$U_*(x) = \widetilde{U}(x)$ 以及时刻 τ_* 最优的证明可借助于类似在前面 §2a 中所引入的讨论, 通过确立 “验证” 相应的条件 (A) 和 (B) 的途径来进行. 公式 (8) 的证明基于应用同样的 §2a 中的引理 1 及其推论.

注. 所陈述的定理证明的 “鞅” 方法 (“第二个证明”) 基于下列注记: 在所考察的情形下, 如下定义的过程 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 为鞅:

$$Z_t = e^{-\beta t} S_t^{\gamma_2}, \quad \beta = \lambda + r,$$

并且

$$Z_t = \exp\left\{\gamma_2 \sigma W_t - \frac{(\gamma_2\sigma)^2}{2} t\right\}.$$

于是

$$e^{-\beta t}(K - S_t)^+ = S_t^{-\gamma_2}(K - S_t)^+ Z_t \leqslant c_* Z_t,$$

随后的讨论如同买入期权的情形中 (§2a) 一样进行.

§2c. 买入期权和卖出期权的组合

1. 正如在第六章 §4e 中所注意到, 在实际中, 广泛的对冲不仅由个别的期权样式, 并且还有它们的各种各样的组合. 例如, 由买入期权和卖出期权以不同的执行价格所形成的宽跨期权, 就可作为这种例子.

在本节中, 将引入美式宽跨期权的计算例子, 再次假定, 执行时间可以是 $[0,\infty)$ 上的任何时间, 而所考察的 (B,S)-市场的结构由 §2a 中的关系式 (1)–(2) 来描述.

换句话说, 假定

$$B_t = B_0 e^{rt}, \tag{1}$$

以及

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}, \tag{2}$$

其中 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ 为标准维纳过程, 并且 $\mu = r$. 在这一情形下, 原来的测度 P 是鞅测度.

对于折现宽跨期权来说, 偿付函数有下列形式 (比较 §2a 中的 (3))

$$f_t = e^{-\lambda t} g(S_t), \quad t \geqslant 0,$$

其中

$$g(s) = \begin{cases} K_1 - s, & s \leqslant K_1, \\ 0, & K_1 < s < K_2, \\ s - K_2, & s \geqslant K_2. \end{cases} \tag{3}$$

与一般理论 (第七章第 4 节和第六章第 2 节) 相对应, 价格

$$V^*(x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} B_0 \mathsf{E}_x \frac{f_\tau}{B_\tau} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau} g(S_\tau), \tag{4}$$

其中 $\mathfrak{M}_0^\infty = \{\tau = \tau(\omega)\colon 0 \leqslant \tau(\omega) < \infty, \omega\in\Omega\}$ 为有限停时类, 而 E_x 为在假定 $S_0 = x \in E = (0,\infty)$ 下的均值.

2. 为求出价格 $V^*(x)$ 以及对应的最优停时, 可运用在上节中采用的 [32] 中的 "鞅" 方法 (参见例如 §2a 第 6 点中的 "第二个证明"). 这时, 我们将假定初始状态 $S_0 = 1$, 并认为执行价格 K_1 和 K_2 满足 $K_1 < 1 < K_2$.

设

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda+r)}{\sigma^2}}, \tag{5}$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda+r)}{\sigma^2}} \tag{6}$$

为 §2a 中的二次方程 (30) 的根.

正如在 §§2a, b 中所指出, 有 $\beta=\lambda+r$ 的过程 $M_t^{(1)}=e^{-\beta t}S_t^{\gamma_1}$ 和 $M_t^{(2)}=e^{-\beta t}S_t^{\gamma_2}$ $(t\geqslant 0)$ 为 P-鞅. 从而, 非负过程 $M_t(p)=pM_t^{(1)}+(1-p)M_t^{(2)}$ 对于任何满足 $0\leqslant p\leqslant 1$ 的 p 为P-鞅, 并且

$$
\begin{aligned}
V^*(1)&=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty}\mathsf{E}_1 e^{-(\lambda+r)\tau}g(S_\tau)\\
&=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty}\mathsf{E}M_\tau(p)\frac{g(S_\tau)}{pS_\tau^{\gamma_1}+(1-p)S_\tau^{\gamma_2}}.
\end{aligned}\tag{7}
$$

正如在 §2a 第 6 点中所做的那样, 我们引入测度 $\widetilde{\mathsf{P}}(p)$, 满足

$$
\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t(p)}{d\mathsf{P}_t}=M_t(p).\tag{8}
$$

于是由 (7) 我们断定,

$$
V^*(1)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}(p)}\frac{g(S_\tau)}{pS_\tau^{\gamma_1}+(1-p)S_\tau^{\gamma_2}},\tag{9}
$$

其中 $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}(p)}$ 为关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}(p)$ 的均值.

下一步在于在集合 $[0,1]$ 中适当选择值 p (以后它将记为 p^*), 由它可成功解决相应的最优停止问题 (9).

正如在 [32] 中所指出, 下列对于 (p,s_1,s_2) 的方程组有且仅有唯一解 (p^*,s_1^*,s_2^*):

$$
\frac{s_2-K_2}{ps_2^{\gamma_1}+(1-p)s_2^{\gamma_2}}=\frac{K_1-s_1}{ps_1^{\gamma_1}+(1-p)s_1^{\gamma_2}},\tag{10}
$$

$$
\frac{s_2}{s_2-K_2}=\frac{p\gamma_1 s_2^{\gamma_1}+(1-p)\gamma_2 s_2^{\gamma_2}}{ps_2^{\gamma_1}+(1-p)s_2^{\gamma_2}},\tag{11}
$$

$$
\frac{s_1}{s_1-K_1}=\frac{p\gamma_1 s_1^{\gamma_1}+(1-p)\gamma_2 s_1^{\gamma_2}}{ps_1^{\gamma_1}+(1-p)s_1^{\gamma_2}},\tag{12}
$$

其中 $p\in[0,1]$, $s_2>K_2$, $s_1<K_1$.

设

$$
c^*=\frac{s_2^*-K_2}{p^*(s_2^*)^{\gamma_1}+(1-p^*)(s_2^*)^{\gamma_2}}\quad\left(=\frac{K_2-s_1^*}{p^*(s_1^*)^{\gamma_1}+(1-p^*)(s_1^*)^{\gamma_2}}\right).
$$

不复杂的分析指出,

$$
\sup_{s\geqslant 1}\frac{g(s)}{p^*s^{\gamma_1}+(1-p^*)s^{\gamma_2}}=\sup_{s\leqslant 1}\frac{g(s)}{p^*s^{\gamma_1}+(1-p^*)s^{\gamma_2}}\quad(=c^*).
$$

这时, 函数 $G(s)=\dfrac{g(s)}{p^*s^{\gamma_1}+(1-p^*)s^{\gamma_2}}$ 在点 $s_1^*<K_1$ 和 $s_2^*>K_2$ 上达到最大值.

因此, 由 (9),

$$
V^*(1)\geqslant c^*.\tag{13}
$$

我们定义

$$\tau^* = \inf\{t \colon S_t = s_1^* \text{ 或 } S_t = s_2^*\}.$$

由带漂移的线性布朗运动的性质导出, $\mathsf{P}(\tau^* < \infty) = 1$. 从而, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}(p^*)} G(S_{\tau^*}) = c^*$, 而这就是说,

$$V^*(1) = c^*,$$

而时刻 τ^* 为最优停时.

注. 如果 $K_1 = K_2$, 那么宽跨期权转化为跨骑期权 (参见第六章 §4e 第 2 点).

§2d. 俄国期权

1. 我们将考察扩散 (B, S)-市场, 其中

$$dB_t = rB_t dt, \qquad B_0 > 0 \tag{1}$$

和

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0, \tag{2}$$

或者, 等价的,

$$B_t = B_0 e^{rt},$$
$$S_t = S_0 e^{rt} \cdot e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

由于

$$\frac{S_t}{B_t} = \frac{S_0}{B_0} e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}, \tag{3}$$

故关于原来的测度 P 过程 $\dfrac{S}{B} = \left(\dfrac{S_t}{B_t}\right)_{t \geqslant 0}$ 是鞅.

设

$$f_t = e^{-\lambda t} g_t(S), \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

其中

$$g_t(S) = \left(\max_{u \leqslant t} S_u - aS_t\right)^+, \quad a \geqslant 0. \tag{5}$$

有偿付函数 (4) 的美式期权称为 "俄国期权" ([435], [434]), 它属于有后效和折现的卖出期权. (比较第六章 §5d.)

运用与 §§2a, b 中一样的记号 $(\mathsf{E}_x, \mathfrak{M}_0^\infty, \overline{\mathfrak{M}_0^\infty}, \cdots)$, 令

$$U_*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-r\tau} f_\tau(S) \tag{6}$$

以及

$$\overline{U}_*(x) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-r\tau} f_\tau(S) I(\tau < \infty). \tag{7}$$

不同于在 §§2a, b 中考察的最优 Markov 过程 $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ 的 "一维" 问题, 问题 (6) 和 (7) 为在下列含义下的 "二维" 问题: 泛函 $f_t(S)$ 依赖于 "二维" Markov 过程 $(S_t, \max_{u \leqslant t} S_u)$.

然而, 尤其引人注目的是, "测度替换" 方法使得这个 "二维" 问题归结为某个新的已经是 "一维" 的问题, 它容许求出 $U_*(x)$ $(= \overline{U}_*(x))$ 和最优停时的显式表达式.

2. 把 "二维" 问题归结为 "一维" 问题的巧妙想法已经相当清楚地在第六章 §5d 中对于离散时间情形叙述过.

在所考察的情形下, 正如在 §2a 第 5 点中所进行的那样, 认为原来的渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ 为坐标维纳空间.

设 $\widehat{\mathsf{P}}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度, 其局限 $\widehat{\mathsf{P}}_t \sim \mathsf{P}_t$ 以及

$$\frac{d\widehat{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t} = Z_t, \tag{8}$$

其中

$$Z_t = e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \ \left(= \frac{S_t/S_0}{B_t/B_0} \right), \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

关于测度 $\widehat{\mathsf{P}}$, 有

$$\widehat{W}_t = W_t - \sigma t \tag{10}$$

的过程 $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t \geqslant 0}$, 根据 Girsanov 定理, 它是维纳过程, 并且对于 $\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$, 有

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau} g_\tau(S) I(\tau < \infty) &= x \mathsf{E}_x e^{-\lambda\tau} \frac{S_\tau/S_0}{B_\tau/B_0} \frac{g_\tau(S)}{S_\tau} I(\tau < \infty) \\ &= x \mathsf{E}_x e^{-\lambda\tau} Z_\tau \frac{(\max_{u \leqslant \tau} S_u - a S_\tau)^+}{S_\tau} I(\tau < \infty) \\ &= x \widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\tau} \left[\frac{\max_{u \leqslant \tau} S_u}{S_\tau} - a \right]^+ I(\tau < \infty). \end{aligned} \tag{11}$$

我们引入过程 $(\psi_t)_{t \geqslant 0}$, 令

$$\psi_t = \frac{\max(\max_{u \leqslant t} S_u, S_0 \psi_0)}{S_t}, \tag{12}$$

其中 $\psi_0 \geqslant 1$.

很明显, 如果 $\psi_0 = 1$, 那么

$$\psi_t = \frac{\max_{u \leqslant t} S_u}{S_t}, \tag{13}$$

因此,

$$\widehat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\left[\frac{\max_{u\leqslant t} S_u}{S_\tau}-a\right]^+ I(\tau<\infty)=\widehat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}[\psi_\tau-a]^+I(\tau<\infty). \tag{14}$$

我们将记 $\widehat{\mathsf{P}}_\psi$ 为概率过程 $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ 的分布, 其中假定 $\psi_0=\psi\geqslant 1$; 同时考察下列最优停止问题:

$$\widehat{U}(\psi)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty}\widehat{\mathsf{E}}_\psi e^{-\lambda\tau}[\psi_\tau-a]^+ \tag{15}$$

以及

$$\widehat{\widehat{U}}(\psi)=\sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty}\widehat{\mathsf{E}}_\psi e^{-\lambda\tau}[\psi_\tau-a]^+I(\tau<\infty), \tag{16}$$

它可看作股票价格过程由过程 $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ 给定、而 $B_t\equiv 1$ 的折现美式买入期权的定价问题. (我们强调, 原来的问题是关于卖出期权的!)

由 (6), (7) 和 (15), (16) (同时考虑 (11) 和 (14)) 我们求得

$$U_*(x)=x\widehat{U}(1),\quad \overline{U}_*(x)=x\widehat{\widehat{U}}(1). \tag{17}$$

3. 在陈述有关最优停止问题 (15) 和 (16) 的基本结果以前, 我们先讨论有 $\psi_0=1$ 的过程 $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ 的性质.

引理. 1) 关于测度 $\widehat{\mathsf{P}}$, 过程 $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ 是相空间 $\mathsf{E}=[1,\infty)$ 上的扩散 Markov 过程, 并且在点 $\{1\}$ 处有多次反射.

2) 过程 $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ 有随机微分

$$d\psi_t=-\psi_t(r dt+\sigma d\widehat{W}_t)+d\varphi_t, \tag{18}$$

其中 $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$ 为在集合 $\{(\omega,t)\colon \psi_t(\omega)=1\}$ 上增长的不减过程, $\widehat{W}=(\widehat{W}_t)_{t\geqslant 0}$ 为 (关于测度 $\widehat{\mathsf{P}}$ 的) 维纳过程.

3) 如果 $q=q(\psi)$ 为 $E=[1,\infty)$ 上的函数, 满足在 $(1,\infty)$ 上 $q\in C^2$, 并存在 $q'(1+)\equiv\lim\limits_{\psi\downarrow 1}q'(\psi)$, 那么

$$Lq(\psi)=-r\psi\frac{dq}{d\psi}+\frac{\sigma^2}{2}\psi^2\frac{d^2q}{d\psi^2},\quad \psi>1, \tag{19}$$

以及

$$q'(1+)=0. \tag{20}$$

证明. 由 (12) 求得

$$\begin{aligned}\psi_{t+\Delta}&=\max\left\{\frac{\max_{u\leqslant t+\Delta}S_u}{S_{t+\Delta}},\frac{S_0\psi_0}{S_{t+\Delta}}\right\}\\&=\max\left\{\frac{\max_{u\leqslant t}S_u}{S_t\cdot S_{t+\Delta}/S_t},\frac{S_0\psi_0}{S_t\cdot S_{t+\Delta}/S_t},\frac{\max_{t<u\leqslant t+\Delta}S_u/S_t}{S_{t+\Delta}/S_t}\right\}\\&=\max\left\{\psi_t\cdot\frac{1}{S_{t+\Delta}/S_t},\frac{\max_{t<u\leqslant t+\Delta}S_u/S_t}{S_{t+\Delta}/S_t}\right\}.\end{aligned} \tag{21}$$

我们察觉, 对于 $t < u \leqslant t + \Delta$,

$$\frac{S_u}{S_t} = \exp\left\{\sigma(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(u - t)\right\}.$$

从而, 考虑到过程 $\widehat{W}$ 关于测度 $\widehat{\mathsf{P}}$ 为维纳过程, 我们看到, 下列 "Markov" 性质成立:

$$\mathrm{Law}(\psi_{t+\Delta} \mid \mathscr{F}_t, \widehat{\mathsf{P}}) = \mathrm{Law}(\psi_{t+\Delta} \mid \psi_t, \widehat{\mathsf{P}}).$$

为得到表示式 (18), 令

$$N_t = \max\left\{\max_{u \leqslant t} S_u, S_0\psi_0\right\}. \tag{22}$$

显然, 过程 $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ 为有界变差不减过程.

由 (2) 和 (10),

$$dS_t = S_t[(r + \sigma^2)dt + \sigma d\widehat{W}_t], \tag{23}$$

以及

$$d\left(\frac{1}{S_t}\right) = -\frac{1}{S_t}[rdt + \sigma d\widehat{W}_t]. \tag{24}$$

因此, 根据 Itô 公式,

$$\begin{aligned} d\psi_t &= N_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t}dN_t \\ &= -\psi_t[rdt + \sigma d\widehat{W}_t] + \frac{dN_t}{S_t}, \end{aligned} \tag{25}$$

或者, 按照积分形式,

$$\psi_t = \psi_0 - r\int_0^t \psi_u du - \sigma\int_0^t \psi_u d\widehat{W}_u + \int_0^t \frac{dN_u}{S_u}. \tag{26}$$

记

$$\varphi_t = \int_0^t \frac{dN_u}{S_u}, \tag{27}$$

那么我们察觉, $dN_u(\omega) = 0$ 在集合 $\{(\omega, u) \colon \psi_u(\omega) > 1\}$ 中成立 (在下列含义下: $\int_0^t I(\psi_u(\omega) > 1)dN_u(\omega) = 0$). 因此,

$$\varphi_t = \int_0^t I(\psi_u = 1)\frac{dN_u}{S_u}, \tag{28}$$

它更直观地指出, 过程 $(\varphi_t)_{t \geqslant 0}$ 的值的变化仅当 $(\psi_t)_{t \geqslant 0}$ 落在边界点 $\{1\}$ 上时发生.

我们指出, 对于每个 $t > 0$,

$$\int_0^t I(\psi_u = 1)du = 0 \ \ (\widehat{\mathsf{P}}\text{-a.s.}). \tag{29}$$

根据 Fubini 定理,

$$\widehat{\mathsf{E}}\int_0^\infty I(\psi_u=1)du=\int_0^\infty \widehat{\mathsf{E}}I(\psi_u=1)du=\int_0^\infty \widehat{\mathsf{P}}(\psi_u=1)du=0,$$

这是因为 $\widehat{\mathsf{P}}(\psi_u=1)=0$, 它由点对 $\left(\max\limits_{s\leqslant u}\widehat{W}_s,\widehat{W}_u\right)$ 的二维分布有密度而得.

因此, 过程 $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ 在点 $\{1\}$ 上 ($\widehat{\mathsf{P}}$-a.s.) 以零时间通过, 而这就是说, 这个点是多次反射边界 ([239]; 第 IV 章, §7]).

4. 定理. 设 $\lambda>0, a\geqslant 0, \psi\geqslant 1$. 那么

$$\widehat{U}(\psi)=\widehat{\widehat{U}}(\psi)=\begin{cases}(\widehat{\psi}-a)\cdot\dfrac{\gamma_2\psi^{\gamma_1}-\gamma_1\psi^{\gamma_2}}{\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_1}-\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_2}}, & \psi<\widehat{\psi},\\ \psi-a, & \psi\geqslant\widehat{\psi},\end{cases}\tag{30}$$

其中

$$\gamma_k=\frac{A}{2}+(-1)^k\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+B},\qquad k=1,2\tag{31}$$

为下列二次方程的根:

$$\gamma^2-A\gamma-B=0,\tag{32}$$

其中

$$A=1+\frac{2r}{\sigma^2},\qquad B=\frac{2\lambda}{\sigma^2};$$

"阈值" $\widehat{\psi}$ 为下列超越方程在区域 $\psi>a$ 中的解:

$$\psi^{\gamma_1}\left(1-\frac{1}{\gamma_1}-\frac{a}{\psi}\right)=\psi^{\gamma_2}\left(1-\frac{1}{\gamma_2}-\frac{a}{\psi}\right).\tag{33}$$

如果 $a=0$, 那么

$$\widehat{\psi}=\left|\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\frac{\gamma_1-1}{\gamma_2-1}\right|^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}.$$

时刻

$$\widehat{\tau}=\inf\{t\geqslant 0\colon \psi_t\geqslant\widehat{\psi}\}$$

满足 $\mathsf{P}_\psi(\widehat{\tau}<\infty)=1$, $\psi\geqslant 1$, 并且既在类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中最优, 也在类 $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ 中最优.

再次如同 §§2a, b 中那样, 我们引入两个证明; 第一个 ("Markov" 证明) 基于 Stephan 问题的解, 而第二个则依靠 "鞅" 设想.

第一个证明. 再次如同 §§2a, b 中那样的设想, 基于 §2a 中的表示式 (22), 指出在问题 (15) 中的观察延续区域 $\widehat{C}$ 和观察停止区域 $\widehat{D}$ 必须有下列形式:

$$\widehat{C}=\{\psi\geqslant 1\colon \psi<\widehat{\psi}\}=\{\psi\geqslant 1\colon \widehat{U}(\psi)>g(\psi)\},$$

以及

$$\widehat{D} = \{\psi \geqslant 1 \colon \psi \geqslant \widehat{\psi}\} = \{\psi \geqslant 1 \colon \widehat{U}(\psi) = g(\psi)\},$$

其中 $g(\psi) = (\psi - a)^+$.

再次如同 §§2a, b 中那样, 未知阈值 $\widehat{\psi}$ 和 $\widehat{U}(\psi)$ 由下列 *Stephan* 问题的解来确定:

$$L\widehat{U}(\psi) = \lambda \widehat{U}(\psi), \quad 1 < \psi < \widehat{\psi}, \tag{34}$$

$$\widehat{U}'(1+) = 0, \tag{35}$$

$$\widehat{U}(\psi) = g(\psi), \quad \psi \geqslant \widehat{\psi}, \tag{36}$$

$$\left.\frac{d\widehat{U}(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi\uparrow\widehat{\psi}} = \left.\frac{dg(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi\downarrow\widehat{\psi}}, \tag{37}$$

其中算子 L 由公式 (19) 来定义.

我们将求出形为 $\widehat{U}(\psi) = \psi^\gamma$ 的方程 (34) 的解. 于是对于 γ, 我们得到二次方程 (32), 其根为由公式 (31) 给出的 $\gamma_1 < 0$ 和 $\gamma_2 > 1$.

因此, 在区域 $\{\psi \colon 1 < \psi < \widehat{\psi}\}$ 中 "作用" 的方程 (34) 有下列形式的通解:

$$\widehat{U}(\psi) = c_1 \psi^{\gamma_1} + c_2 \psi^{\gamma_2}, \tag{38}$$

其中 c_1, c_2 为某些常数.

为确定 $\widehat{\psi}$ 和常数 c_1 和 c_2 有三个补充条件: (35), (36) 和 (37); 考虑到 (38), 它们取下列形式:

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 = 0, \tag{35$'$}$$

$$c_1\widehat{\psi}^{\gamma_1} + c_2\widehat{\psi}^{\gamma_2} = \widehat{\psi} - a, \tag{36$'$}$$

$$c_1\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_1-1} + c_2\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_2-1} = 1. \tag{37$'$}$$

由 (36′) 和 (37′),

$$c_1 = \frac{a\gamma_2 + (1-\gamma_2)\widehat{\psi}}{(\gamma_1-\gamma_2)\widehat{\psi}^{\gamma_1}}, \quad c_2 = \frac{a\gamma_1 + (1-\gamma_1)\widehat{\psi}}{(\gamma_2-\gamma_1)\widehat{\psi}^{\gamma_2}}. \tag{39}$$

由 (35′),

$$c_1 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} c_2, \tag{40}$$

它由对于 $\widehat{\psi}$ 的方程 (33) 给出. 如果 $a = 0$, 那么由这一方程得到,

$$\widehat{\psi} = \left|\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - 1}\right|^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}. \tag{41}$$

最后, 由 (38) 和 (39) 以及考虑到 (33), 我们求得, 在区域 $\widehat{C}=\{\psi\colon \psi<\widehat{\psi}\}$ 中,

$$\widehat{U}(\psi)=(\widehat{\psi}-a)\cdot\frac{\gamma_2\psi^{\gamma_1}-\gamma_1\psi^{\gamma_2}}{\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_1}-\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_2}}.$$

现在我们指出, $\widehat{\mathsf{P}}_\psi(\widehat{\tau}<\infty)=1$, $\psi\geqslant 1$. 为此只需指出

$$\widehat{\mathsf{P}}\left(\sup_{t\geqslant 0}\left(\frac{\sup_{u\leqslant t}S_u}{S_t}\right)\geqslant\widehat{\psi}\right)=1 \tag{42}$$

对于任何 $\widehat{\psi}>1$ 成立. (对于 $\widehat{\psi}=1$ 性质 (42) 显然.)

我们有

$$\frac{\sup_{u\leqslant t}S_u}{S_t}=\exp Y_t,$$

其中

$$Y_t=\sup_{u\leqslant t}\left[\sigma(\widehat{W}_u-\widehat{W}_t)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t)\right].$$

我们如下构成停时序列 $(\sigma_k)_{k\geqslant 0}$:

$$\begin{aligned}\sigma_0&=0,\\ \sigma_1&=\inf\{t\geqslant 1\colon Y_t=0\},\\ &\cdots\\ \sigma_{k+1}&=\inf\{t\geqslant\sigma_k+1\colon Y_t=0\},\cdots.\end{aligned}$$

于是我们看到, 对于 $\widehat{y}=\ln\widehat{\psi}\geqslant 0$,

$$\left\{\omega\colon\sup_{t\leqslant\infty}Y_t(\omega)\geqslant\widehat{y}\right\}=\bigcup_{k\geqslant 0}\left\{\omega\colon\sup_{\sigma_k\leqslant t\leqslant\sigma_{k+1}}Y_t(\omega)\geqslant\widehat{y}\right\}.$$

对于不同的 k, 事件 $\left\{\omega\colon\sup\limits_{\sigma_k\leqslant t<\sigma_{k+1}}Y_t(\omega)\geqslant\widehat{y}\right\}$ 相互独立, 且它们的概率都是相同的正数. 根据 Borel-Cantelli 引理, 由此导出 $\widehat{\mathsf{P}}\left\{\omega\colon\sup\limits_{t<\infty}Y_t(\omega)\geqslant\widehat{y}\right\}=1$, 而这就是说, $\widehat{\mathsf{P}}_\psi(\widehat{\tau}<\infty)=1$.

余下的是只需证明, 时刻 $\widehat{\tau}=\inf\{t\geqslant 0\colon \psi_t\geqslant\widehat{\psi}\}$ 为在问题 (15) 和 (16) 中的最优时刻.

证明方法之一在于 “检验” §2a 中的性质 (A) 和 (B) 成立, 它恰好如同在买入期权和卖出期权的情形下一样进行. (详情参见 [444].) 我们现在引入另一种基于 “鞅” 设想的证明 (比较 §2a 中的第 5 点和 [32]).

第二个证明. 为简单起见, 我们将假定 $a=0$. (关于 $a\geqslant 0$ 的一般情形, 参见 [32].)

记

$$M_t = e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t), \tag{43}$$

并定义函数 $h = h(\psi)$, $\psi \geqslant 1$, 使得关于测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$, 过程 $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ 为局部鞅.

对 $e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t)$ 应用 Itô 公式, 我们求得

$$d\left(e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t)\right) = e^{-\lambda t}\psi_t[A_t dt + B_t(-\sigma d\widehat{W}_t + d\varphi_t)], \tag{44}$$

其中

$$A_t = -(\lambda + r)h(\psi_t) + (\sigma^2 - r)\psi_t h'(\psi_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\psi_t^2 h''(\psi_t), \tag{45}$$

$$B_t = h'(\psi_t) + h(\psi_t). \tag{46}$$

由 (44) 可见, 为使过程 $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ 为局部鞅, 函数 $h = h(\psi)$, $\psi \geqslant 1$, 完全由下列问题的解来确定:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\psi^2 h''(\psi) + (\sigma^2 - r)\psi h'(\psi) - (\lambda + r)h(\psi) = 0, \quad \psi > 1, \tag{47}$$

其中边界条件为

$$h'(1+) + h(1+) = 0. \tag{48}$$

把方程 (47) 改写为下列形式:

$$\psi^2 h''(\psi) + 2\left(1 - \frac{r}{\lambda^2}\right)\psi h'(\psi) - 2\left(\frac{\lambda + r}{\sigma^2}\right) = 0, \tag{49}$$

我们将求出这个方程的形为 $h(\psi) = \psi^x$ 的解. 于是为了确定 x, 我们得到二次方程

$$x^2 + x(1 - 2r) - 2(\lambda + r) = 0. \tag{50}$$

把这个方程与方程 (32) 相比较:

$$\gamma^2 - \gamma(1 + 2r) - 2\lambda = 0. \tag{51}$$

我们察觉, 如果令 $\gamma = x + 1$, 那么方程 (51) 转换为方程 (50), 而这就是说, 两个方程的根 x_i 和 γ_i 由关系式 $\gamma_i = x_i + 1$, $i = 1, 2$ 相联系.

方程 (49) (对于 $\sigma^2 = 1$) 的通解有形式为

$$h(\psi) = d_1\psi^{x_1} + d_2\psi^{x_2}, \quad \psi > 1.$$

取解 $h = h(\psi)$, 使得它满足性质 (48). 于是

$$d_1 = \frac{1 + x_2}{x_2 - x_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1},$$

$$d_2 = \frac{1 + x_1}{x_1 - x_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

因此,

$$h(\psi)=\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}[\gamma_2\psi^{\gamma_1-1}-\gamma_1\psi^{\gamma_2-1}]. \tag{52}$$

根 $\gamma_1<0$, $\gamma_2>1$ 以及 $h'(\psi)=0$ 当 $\psi=\widetilde{\psi}$ 时成立, 其中 $\widetilde{\psi}$ 由下列关系式来确定:

$$\widetilde{\psi}^{\gamma_2-\gamma_1}\frac{\gamma_1(\gamma_2-1)}{\gamma_2(\gamma_1-1)}=1. \tag{53}$$

比较 (53) 与 (41), 我们察觉, 量 $\widetilde{\psi}$ 恰好重合于由公式 (41) 确定的值 $\widehat{\psi}$. 这时, 在点 $\widehat{\psi}$ 上函数 $h(\psi)$ 取其最小值.

由 (43)–(48) 可见, 对于所求的函数 $h=h(\psi)$, 过程

$$M_t=e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t),\quad t\geqslant 0$$

是非负局部鞅, 而这就是说, 它是上鞅. 因此, 对于每个 $\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty$ 和 $\psi_0=1$,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathsf{E}}_1 e^{-\lambda\tau}\psi_\tau&=\widehat{\mathsf{E}}_1 h^{-1}(\psi_\tau)M_\tau\leqslant\widehat{\mathsf{E}}_1 h^{-1}(\widehat{\psi})M_\tau\\&=h^{-1}(\widehat{\psi})\widehat{\mathsf{E}}_1 M_\tau\leqslant h^{-1}(\widehat{\psi})\widehat{\mathsf{E}}_1 M_0=h^{-1}(\widehat{\psi})\\&=\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_1-1}-\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_2-1}}=\widehat{\psi}\cdot\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_1}-\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_2}}.\end{aligned}$$

如果 $\psi_0=1$, 那么时刻 $\widehat{\tau}=\inf\{t\geqslant 0\colon \psi_t\geqslant\widehat{\psi}\}$ 正如上面所指出, 以概率 1 有限 $(\widehat{\mathsf{P}}_1(\widehat{\tau}<\infty)=1)$, 并且对于这个时刻,

$$\widehat{\mathsf{E}}_1 e^{-\lambda\widehat{\tau}}\psi_{\widehat{\tau}}=\widehat{\mathsf{E}}_1 h^{-1}(\psi_{\widehat{\tau}})M_{\widehat{\tau}}=h^{-1}(\widehat{\psi})\quad(=\widehat{U}(1)),$$

它也证明了当 $\psi_0=1$ 时, 时刻 $\widehat{\tau}$ 在类 $\mathfrak{M}_0^\infty$ 中的最优性. (类似的设想对于任何 $\psi_0\leqslant\widehat{\psi}$ 保持成立.)

我们转向原来的问题 (6) 和 (7). 由 (11), 假设 $a=0$, 我们求得

$$\mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}g_\tau(S)I(\tau<\infty)=x\widehat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\psi_\tau I(\tau<\infty). \tag{54}$$

这里 $\psi_0=1$, 并且这里正如上面所确立的, 时刻 $\widehat{\tau}=\inf\{t\colon\psi_t\geqslant\widehat{\psi}\}$ 在下列含义下为最优停时:

$$\sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty}\widehat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\psi_\tau I(\tau<\infty)=\widehat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\widehat{\tau}}\psi_{\widehat{\tau}}I(\widehat{\tau}<\infty)=\widehat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\widehat{\tau}}\psi_{\widehat{\tau}}, \tag{55}$$

以及

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty}\widehat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\psi_\tau I(\tau<\infty)=\widehat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\widehat{\tau}}\psi_{\widehat{\tau}}. \tag{56}$$

因此, 时刻 $\widehat{\tau}$ 为问题 (7) 中的最优时刻.

在上面对于证明性质 $\widehat{\mathsf{P}}_\psi(\widehat{\tau}<\infty)=1$ 所运用的讨论, 在分析过程 $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ 时, 也可用来证明时刻 $\widehat{\tau}$ 也关于测度 P 有限. 这样, 时刻 $\widehat{\tau}$ 在原来的问题 (6) 和 (7) 中最优.

3. 在扩散 (B,S)-股票市场中的美式期权. 有限时间视野的情形

§3a. 关于有限时间区间上计算的特点

1. 在无限视野情形下, 即当执行时刻在时间集合 $[0,\infty)$ 中取值的情形下, 经常能成功地完全描述美式期权的价格结构, 以及对应的观察停止区域和观察延续区域. 这样在第 2 节中所讨论的所有情形下, 都能既求得价格 $V^*(x)$, 又能求得相空间 $E=\{x\colon x>0\}$ 中的分隔观察停止区域和观察延续区域的边界点 x^*.

强调以下这点是重要的: 由于几何布朗运动 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 是齐次 Markov 过程, 在执行时刻上没有时间约束是可行的, 而这就是说, 所考察的问题是

椭圆型问题.

当时间参数属于有界区间 $[0,T]$ 时, 局面立即大为复杂.

在这一情形下, 对应的最优停时问题变为 "非齐次的", 而从解析视角来看, 所涉及的问题变为

抛物型问题.

由于在对应的问题中取代边界点 x^* 的已经是整值界面函数 $x^*=x^*(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 它在相空间 $[0,T)\times E=\{(t,x)\colon 0\leqslant t\leqslant T, x>0\}$ 中分隔观察延续区域和观察停止区域. (比较第六章 §§5b, c 中的图 57 和 59.)

还应该强调, 虽然连续时间情形的最优停止法则理论 (参见例如专著 [441]) 给出问题求解的*一般方法*, 其中大致能求出最优停时, 尽管如此, 并没有多少具体问题 (包括与期权相联系的问题), 能成功给出对于价格等等的界面函数 $x^*=x^*(t)$ 的精确解析表达式.

在实际中, 其中包括计算实际交易的美式期权, 通常采取 (对于时间和/或相空间) 离散化的方法, 而比如界面函数和价格的近似值, 照例用向前递推的方法来求得 (参见第六章 §2a).

当然, 这并不排除求出精确解 (或逼近解) 的意义, 与此相联系的是先要讨论某些相应的有限时间区间上的最优停止问题的*理论*问题, 特别是讨论一种基于把这样的问题归结为 *Stepan 问题* (或者, 正如常说的, 偏微分方程的*移动 (自由) 边界问题*) 的广为流传的方法.

2. 为确定起见, 我们将考察 §2a 中的关系式 (1) 和 (2) 所描述的 (B,S)-市场, 并且认为时间参数 t 属于 $[0,T]$, $\mu=r$, 并且偿付函数有下列形式: $f_t=e^{-\lambda t}g(S_t)$, 其中 $\lambda\geqslant 0$, Borel 函数 $g(x)\geqslant 0$, $x\in E=(0,\infty)$.

设

$$V(T,x)=B_0\mathsf{E}_x\frac{f_T}{B_T} \tag{1}$$

和

$$V^*(T,x)=B_0\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^T}\mathsf{E}_x\frac{f_\tau}{B_\tau} \tag{2}$$

分别为欧式期权和美式期权的合理价格. 在关系式 (1) 和 (2) 中, 记号 E_x 表示按原来的测度 (由于 $\mu=r$, 它是鞅测度) 在 $S_0=x$ 的假定下的均值.

注. 对于 $V(T,x)$ 的公式 (1) 的证明在第七章 §4b 中已经给出. 基于可选分解的公式 (2) 的证明, 在思路上与离散时间的情形中一样 (参见第六章 §2c). 与连续时间相联系的相应的证明参见例如 [281].

3. 对于 $t\geqslant 0$ 和 $x\in E=(0,\infty)$, 令

$$V(t,x)=\mathsf{E}_xe^{-\beta t}g(S_t) \tag{3}$$

和

$$V^*(t,x)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^t}\mathsf{E}_xe^{-\beta\tau}g(S_\tau), \tag{4}$$

其中 $\beta=\lambda+r$, $x=S_0$.

在 $t\in[0,T]$ 的情形的讨论中, 再引入下列函数是有益的:

$$Y(t,x)=V(T-t,x) \tag{5}$$

和

$$Y^*(t,x)=V^*(T-t,x), \tag{6}$$

其中 $T-t$ 扮演 "剩余" 时间的角色.

很明显,

$$Y(t,x)=\mathsf{E}_{t,x}e^{-\beta(T-t)}g(S_T), \tag{7}$$

以及

$$Y^*(t,x)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_t^T}\mathsf{E}_{t,x}e^{-\beta(\tau-t)}g(S_\tau), \tag{8}$$

其中 $\mathsf{E}_{t,x}$ 为在 $S_t=x$ 的假定下关于原来的 (鞅) 测度的均值, 而 $\mathfrak{M}_t^T$ 为满足 $t\leqslant\tau\leqslant T$ 的停时 $\tau=\tau(\omega)$ 的类.

在布朗运动情形下, 函数 $V=V(t,x)$ 在第三章 §3f 中 (对于 $\beta=0$) 考察过, 它联系着 Cauchy 问题解的概率表示. 同样的讨论 (详情参见第三章 §3f 的第 5 点) 指出, 函数 $V=V(t,x)$ (在它属于 $C^{1,2}$ 类的先验假定下) 对 $t>0$ 和 $x\in E$ 满足方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\beta V=LV, \tag{9}$$

其中

$$LV(t,x) = rx\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{10}$$

并有初值条件

$$V(0,x) = g(x). \tag{11}$$

由 (5), (9) 和 (11) 得到, 函数 $Y = Y(t,x)$ 对于 $t < T$ 满足方程

$$-\frac{\partial Y}{\partial t} + \beta Y = LY, \tag{12}$$

其边界条件为

$$Y(T,x) = g(x). \tag{13}$$

我们记得, 我们已经在 §1c 中遇到过基本方程 (12), 它无非就是 Feyman-Kac 方程 (第三章 §3f), 并且与 F. Black 和 M. Scholes 在 [44] 中和 R. Merton 在 [346] 中为有 $g(x) = (x-K)^+$ 和 $\lambda = 0$ 的标准欧式买入期权的合理价格 $(V(T,x) = Y(0,x))$ 定价时所应用的方法相联系.

4. 现在转向求合理价格 $V^*(T,x) = Y^*(0,x)$ 的问题.

定义

$$\tau_0^T = \inf\{0 \leqslant t \leqslant T \colon Y^*(t,S_t) = g(S_t)\} \tag{14}$$

和

$$D_t^T = \{x \in E \colon Y^*(t,x) = g(x)\}, \tag{15}$$

$$C_t^T = \{x \in E \colon Y^*(t,x) > g(x)\}. \tag{16}$$

对于 $s \leqslant t$, 我们有 $Y^*(s,x) = V^*(T-s,x) \geqslant V^*(T-t,x) = Y^*(t,x)$. 因此, 对于 $0 \leqslant s \leqslant t < T$,

$$D_0^T \subseteq D_s^T \subseteq D_t^T,$$

以及

$$C_0^T \supseteq C_s^T \supseteq C_t^T.$$

在 $t = T$ 的情形下, 显然, $D_T^T = E$ 以及 $C_T^T = \varnothing$.

相空间 $[0,T) \times E$ 中的区域

$$D^T = \{(t,x) \colon t \in [0,T),\, x \in D_t^T\}$$

和

$$C^T = \{(t,x) \colon t \in [0,T),\, x \in C_t^T\}$$

分别称为观察停止区域和观察延续区域. 它们与在 Markov 过程的最优停止的“典型”问题中的状况相联系, 其中满足下式的时刻 τ_0^T 是最优的 (参见例如, [441] 中的第 III 章 §4 中的断言 3 和定理 6):

$$\mathsf{E}_x e^{-\beta\tau_0^T} g(S_{\tau_0^T}) = V^*(T,x). \tag{17}$$

由于

$$\tau_0^T = \inf\{0 \leqslant t \leqslant T\colon S_t \in D_t^T\}, \tag{18}$$

故集合 $D^T = \bigcup\limits_{t<T}(\{t\}\times D_t^T)$ 就被理解为停止区域: 如果 $(t,S_t)\in D^T$, 那么观察中断. (“终端” 集合 $T\times D_T^T = T\times E$ 自然也属于停止集合.)

区域 D^T 和 C^T 在与函数 $g=g(x)$ 的性质以及当然还有过程 $S=(S_t)_{t\leqslant T}$ 的性质的依赖关系上可能有相当复杂的结构. 例如, 这些区域作为 $[0,T)\times E$ 的集合可能是由多个停止 “岛” 构成的多连通区域等等.

在标准买入期权和卖出期权的情形下, 其中分别有 $g(x)=(x-K)^+$ 和 $g(x)=(K-x)^+$, 区域 D^T 和 C^T 是单连通的 (参见后面的 §3c).

对于这些期权, 停止区域的边界 ∂D^T 可表示为下列形式:

$$\partial D^T = \{(t,x)\colon t\in[0,T), x = x^*(t)\},$$

其中在买入期权情形下,

$$x^*(t) = \inf\{x\in E\colon Y^*(t,x) = (x-K)^+\},$$

而在卖出期权情形下,

$$x^*(t) = \sup\{x\in E\colon Y^*(t,x) = (K-x)^+\}.$$

§3b. 最优停止问题和 Stephan 问题

1. 由上节的叙述得到, 为描述最优停时 τ_0^T 以及观察延续区域和停止区域的结构, 需要能够求出函数 $V^*=V^*(t,x)$, 或者等价地求出函数 $Y^*(t,x)=V^*(T-t,x)$.

在对于 Markov 过程的最优停止法则的一般理论中, 可求出这些函数的各种特征.

这样, 例如已知 (参见 [441]), 函数 $Y^*=Y^*(t,x)$ 是 (非负 Borel) 函数 $g=g(x)$ 的最小 β-超过优函数. 换句话说, 在所有具有下列性质的函数 $F=F(t,x)$ 中, 函数 $Y^*=Y^*(t,x)$ 最小: 对于 $0\leqslant t\leqslant t+\Delta\leqslant T$,

$$e^{-\beta\Delta}T_\Delta F(t,x) \leqslant F(t,x), \quad x\in E, \tag{1}$$

其中 $T_\Delta F(t,x) = \mathsf{E}_{t,x}F(t+\Delta, S_{t+\Delta})$, $x=S_t$, 以及

$$g(x)\leqslant F(t,x), \qquad x\in E, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2}$$

特别是, 由这一特征得到,

$$\max\{g(x), e^{-\beta\Delta} T_\Delta Y^*(t,x)\} \leqslant Y^*(t,x). \tag{3}$$

自然期待, 对于小 $\Delta > 0$ 和 $t = 0, \Delta, \cdots, [T/\Delta]\Delta$, 函数 $Y^*(t,x)$ "近似于" 函数

$$Y^*_\Delta(t,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_t^T(\Delta)} \mathsf{E}_{t,x} e^{-\beta(\tau - t)} g(S_\tau), \tag{4}$$

其中 $\mathfrak{M}_t^T(\Delta)$ 为停时 τ 的集合, 满足 $\tau = k\Delta$, $k = 0, 1, \cdots, [T/\Delta]$, $t \leqslant \tau \leqslant T$ 以及 $\{\omega\colon \tau \leqslant k\Delta\} \in \mathscr{F}_{k\Delta}(\Delta)$, $\mathscr{F}_{k\Delta}(\Delta) = \sigma\{\omega\colon S_\Delta, S_{2\Delta}, \cdots, S_{k\Delta}\}$.

由最优停止法则理论得到, 上述关于这些函数对小 $\Delta > 0$ 的 "近似性" 命题可有严格的陈述 (参见 [441; 第 III 章, §2]). 同时, 由于对于有 $t = 0, \Delta, \cdots, [T/\Delta]\Delta$ 的 $Y^*_\Delta(t,x)$ 下列递推关系式成立:

$$Y^*_\Delta(t,x) = \max\{g(x), e^{-\beta\Delta} \mathsf{E}_{t,x} Y^*_\Delta(t+\Delta, S_{t+\Delta})\} \tag{5}$$

(参见第六章 §2a 和 [441] 中的第 II 章 §4 中的离散情形), 故在 (5) 中的 $Y^*(t,x)$ 充分光滑的假定下, 根据 Taylor 公式, 我们求得

$$\begin{aligned} &Y^*(t,x) \\ &= \max\left\{g(x), (1-\beta\Delta)\left[Y^*(t,x) + \left(\frac{\partial Y^*(t,x)}{\partial t} + LY^*(t,x)\right)\Delta\right] + o(\Delta)\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$LY^*(t,x) = rx\frac{\partial Y^*(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 Y^*(t,x)}{\partial x^2}. \tag{7}$$

由 (6) 可见, 其中 $Y^*(t,x) > g(x)$, 即在观察延续区域中, $Y^* = Y^*(t,x)$ 满足方程

$$-\frac{\partial Y^*}{\partial t} + \beta Y^* = LY^*. \tag{8}$$

注 1. 方程 (8) 在外表上如同 §3a 中的 (12) 那样, 由于下列原因, 并不令人惊奇.

假定, 在类 $\mathfrak{M}_t^T$ 中存在最优时刻 τ_t^T. 于是

$$Y^*(t,x) = \mathsf{E}_{t,x} e^{-\beta(\tau_t^T - t)} g(S_{\tau_t^T}).$$

由于

$$Y(t,x) = \mathsf{E}_{t,x} e^{-\beta(T-t)} g(S_T),$$

故直观上可理解, 如果点 $(t,x) \in C_t^T$, 那么对于函数 $Y^*(t,x)$ 和 $Y(t,x)$ 的关于 t 和 x 的 (逆) 方程必定是一样的, 因为相应的方程的系数是由同样的二维过程 $(u, S_u)_{t \leqslant u \leqslant T}$ 在初始点 (t,x) 的邻域中的局部特征来确定的.

注 2. 有广泛的文献讨论在观察延续区域内作用的对于 $Y^*(t,x)$ 的型为 (8) 的方程推导及其在期权理论中的应用: 例如, 专著 [266], [287], [441], [478] 以及论文 [33], [66], [134], [135], [179], [247], [265], [272], [340], [363], [467].

2. 关于最优停止问题与 Stephan 问题之间的联系已经在第六章第 5 节考察二叉树 (B,S)-市场上的美式期权时说起过. 在连续时间情形下, 这种联系看来首先是在考察关于维纳过程的漂移的各种统计分析问题时, 在统计序贯分析中讨论 ([349], [69], [300], [440]; 也参见在 [116] 和 [441] 中的历史文献索引.)

在金融文献中, 讨论 Stephan 问题或者自由边界问题的首批著作之一是 H. McKean 的论文 [340], 它献给美式权证的合理价格定价.

3. 在数学物理中, *Stephan* 问题是在研究与物质的相变相联系的物理过程时发生的 ([413], [463]). 例如, 下列问题是所谓 *Stephan* 二相问题的最简单的例子.

假设, 已知 "时间–状态" 空间 $\mathbb{R}_+ \times E = \{(t,x)\colon t \geqslant 0, x > 0\}$ 由下列二相所组成:

$$C^{(1)} = \{(t,x)\colon t \geqslant 0, 0 < x < x(t)\},$$

以及

$$C^{(2)} = \{(t,x)\colon t \geqslant 0, x(t) < x < \infty\},$$

其中 $x = x(t)$, $t \geqslant 0$, 是某个相分叉边界, 比如, 静止水中的 "冰–水" 边界. 假定, 相位 C^i $(i=1,2)$ 中的每一个在时刻 t 和在截面 x 上的温度满足 "各自的" 热传导方程

$$c_i\rho_i \frac{\partial u}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad i = 1,2, \tag{9}$$

其中 (在热物理术语中) c_i 为适当的比热, ρ_i 为相密度, k_i 为热传导系数 (参见例如, [335; 第 5 卷, 324 页]).

方程 (9) 在下列条件下讨论:

$$\text{边界条件 } u(0,t) = \text{Const},$$

$$\text{初值条件 } u(x,0) = \text{Const},$$

以及例如,

$$\text{在相边界上的条件: 对于 } t > 0,$$

$$u(t, x(t-)) = u(t, x(t+)), \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t-)) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t+)), \tag{11}$$

以及补充假定 $x(0) = 0$.

在所陈述的条件下, *Stephan* 问题在于, 求出描述相状态和分隔这两相的边界 $x = x(t)$ $(t \geqslant 0)$ 的温度变化的函数 $u = u(t, x)$.

4. 我们引入数学物理中的二相 Stephan 问题的例子, 其中既强调它的一般性, 又强调其不同于联系求最优停止法则中, 尤其是联系美式期权中, 所发生的 Stephan 问题.

上面已经注意到, 在标准买入期权和卖出期权的情形下, 也有二相形势, 即在求出最优停时法则时, 可限于只考察两个单连通相: 观察延续区域 C^T, 这是 $Y^*(t,x)$ 的方程 (8) 起作用的区域, 以及观察停止区域 D^T, 这是 $Y^* = Y^*(t,x)$ 重合于函数 $g = g(x)$ 的区域.

在下一节中将导入对于这两种期权的相应的 Stephan 问题的精确陈述, 并定性描述相应的解 $Y^* = Y^*(t,x)$ 和 $x^* = x^*(t)$.

§3c. 对于标准买入期权和标准卖出期权的 Stephan 问题

1. 买入期权. 我们将假定, (B,S)-市场由 §2a 中的关系式 (1) 和 (2) 来描述, 其中 $\mu = r$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 而 (在时刻 t 的) 偿付函数有形式为 $f_t = e^{-\lambda t} g(S_t)$, 其中 $\lambda \geqslant 0$ 以及 $g(x) = (x-K)^+$, $x \in E = (0,\infty)$. 有关所考察的期权的基本结果如下.

1) 这种期权的合理价格 $V^*(T,x)$, $x = S_0$, 正如在 §3a 中所指出, 由下列公式来确定:

$$V^*(T,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^T} \mathsf{E}_x e^{-\beta\tau} g(S_\tau), \tag{1}$$

其中 $\beta = \lambda + r$ 以及 E_x 为在 $S_0 = x$ 的假定下关于原来的 (鞅) 测度的均值.

2) 对于 $t \in [0,T]$ 和 $x \in E$, 设

$$Y^*(t,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_t^T} \mathsf{E}_{t,x} e^{-\beta(\tau - t)} g(S_\tau), \tag{2}$$

其中 $\mathsf{E}_{t,x}$ 为在 $x = S_t$ 的假定下关于 (鞅) 测度的均值.

函数 $Y^* = Y^*(t,x)$ 为函数 $g(x)$ 的最小 β-超过优函数. (参见 §3b 中的第 1 节.)

3) 合理价格为

$$V^*(T,x) = Y^*(0,x), \tag{3}$$

购买者提交执行终止观察的合理时刻为时刻

$$\tau_T^* = \inf\{0 \leqslant t \leqslant T \colon Y^*(t,S_t) = g(S_t)\}, \tag{4}$$

或者等价的 (在 §3a 中这一时刻也记为 τ_0^T)

$$\tau_T^* = \inf\left\{0 \leqslant t \leqslant T \colon (t,S_t) \in D^T \cup \{(T,x) \colon x \in E\}\right\}. \tag{5}$$

4) 观察停止区域 D^T 和观察延续区域 C^T 为单连通区域, 并且有下列结构:

$$D^T = \bigcup_{0\leqslant t<T} \{(t,x)\colon Y^*(t,x) = g(x)\}, \tag{6}$$

$$C^T = \bigcup_{0\leqslant t<T} \{(t,x)\colon Y^*(t,x) > g(x)\}. \tag{7}$$

5) $[0,T)\times E$ 上的函数 $Y^* = Y^*(t,x)$ 属于 $C^{1,2}$ 类.

这时, 固定 $x\in E$, 函数 $Y^*(\cdot,x)$ 对 t 不增; 对每个固定的 $t\in[0,T)$, 函数 $Y^*(t,\cdot)$ 对 x 不减, 并且 (下) 凸.

6) 界面函数 $x^* = x^*(t)$ 在 $[0,T)$ 上不增, 并且集合 C_t^T 和 D_t^T 对 $t<T$ 有下列形式:

$$C_t^T = \{x\in E\colon S_t < x^*(t)\},$$

$$D_t^T = \{x\in E\colon S_t \geqslant x^*(t)\}.$$

当 $t=T$ 时, 集合 $C_T^T = \varnothing$, 而 $D_T^T = E$.

如果 $\lambda = 0$, 那么 $x^*(t) = \infty$, $t<T$, 它对应对每个 $t<T$,

$$C_t^T = E, \quad D_t^T = \varnothing.$$

换句话说, 对于所有 $t<T$, 观察应该延续, 而与价格取值无关; 这点是下列事实的推论: 过程 $(e^{-rt}(S_t-K)^+)_{t\geqslant 0}$ 为半鞅, 而根据 Doob 停止定理, 对于任何 $\tau\in\mathfrak{M}_0^T$,

$$\mathsf{E}_x e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+ \leqslant \mathsf{E}_x e^{-rT}(S_T-K)^+.$$

对于离散时间情形, 也有类似的结果成立 (R. Merton, [346]), 它可用下列方式来解释 (参见第六章 §5b): 标准美式买入期权与欧式期权 “重合”.

7) 函数 $Y^* = Y^*(t,x)$, $t\in[0,T]$, $x\in E$ 和界面函数 $x^* = x^*(t)$, $0\leqslant t<T$ 为下列 “二相” *Stephan* 问题或自由边界问题的解:

在区域 $C^T = \{(t,x)\colon x<x^*(t), t\in[0,T)\}$ 中,

$$-\frac{\partial Y^*(t,x)}{\partial t} + \beta Y^*(t,x) = LY^*(t,x); \tag{8}$$

在区域 $D^T\cup\{(T,x)\colon x\in E\}$ 中,

$$Y^*(t,x) = g(x); \tag{9}$$

在分隔 “二相” 的边界 $x^* = x^*(t)$ $(0\leqslant t<T)$ 上, 下列 *Dirichlet* 条件满足:

$$Y^*(t,x^*(t)) = g(x^*(t)) \tag{10}$$

和 *Neumann* 条件:

$$\left.\frac{\partial Y^*(t,x)}{\partial x}\right|_{x\uparrow x^*(t)} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\downarrow x^*(t)}, \tag{11}$$

它经常称为光滑粘合条件.

我们来评述所叙述的结果, 这些结果的证明详情参见 §3b 第 1 点的最后所列举的著作.

关于公式 (1) 的成立已经在 §3a 中说起过. 时刻 τ_T^* 的最优性由最优停止法则的一般理论得到 (参见, 例如, [441; 第 III 章, §3]). 关于函数 $Y^*(t,x)$ 的光滑性质和方程 (8) 的推导, 参见例如, [247], [363] 和 [467].

如果说条件 (10) 相当自然, 那么光滑粘合条件 (11) 的成立就不太明显. 在 [200] 和 [441; 第 III 章, §8] 中引入相当一般的条件, 以保证在停止区域的边界上光滑粘合的条件满足.

我们还记得, 我们已经不止一次地遇到光滑粘合条件: 在考察离散时间问题中的逼近 (第六章中的第 5 节) 时, 以及在考察无限时间视野情形下的美式期权的情形时 (在本章中的第 2 节).

强调以下这点是有益的: 如果说在上节的数学物理中的 Stephan 典型问题的讨论中, 在每一相中都有 "自己的" 方程在起作用, 那么在最优停止问题中, 对于 $Y^*(t,x)$ 的微分方程仅在一相 (在观察延续区域) 中发生, 而在另一相 (在停止区域中) 所求函数 $Y^*(t,x)$ 重合于事先已知的函数 $g(x)$.

还要注意到, 对于所考察的 $g(x)=(x-K)^+$ 的情形, 值 $\left.\dfrac{dg(x)}{dx}\right|_{x\downarrow x^*(t)}=1$, 因为 $x^*(t)>K,\ 0\leqslant t<T$. (后一不等式不难由下列性质导出: 函数 $Y^*=Y^*(t,x)$ 为函数 $g=g(x)$ 的 β-超过优函数.)

关于 Stephan 问题 (8)–(11) 的可解性以及边界函数 $x^*=x^*(t)$ 的性质, 参见 [467], [363] (以及关于这一著作的评论).

2. 卖出期权. 在这一情形下, $g(x)=(K-x)^+$. 性质 1)–4) 仍然保持成立, 而函数 $Y^*=Y^*(t,x)$ 仍然属于 $C^{1,2}$ 类. 对于每个固定的 $x\in E$, 函数 $Y^*(\cdot,x)$ 对 t 不增; 对于每个固定的 $t\in[0,T)$, 函数 $Y^*(t,\cdot)$ 对 x 不增和 (下) 凸.

对任何 $\lambda\geqslant 0$, 集合 C_t^T 和 D_t^T 对 $t<T$ 有下列形式:

$$C_t^T=\{x\colon S_t>x^*(t)\},$$
$$D_t^T=\{x\colon S_t\leqslant x^*(t)\}.$$

当 $t=T$ 时, 集合 $C_T^T=\varnothing$ 以及 $D_T^T=E$.

界面函数 $x^*=X^*(t)$ 对 t 为不减函数; 如果 $\lambda=0$, 那么 $\lim\limits_{t\uparrow T}x^*(t)=K$.

对于 $Y^*(t,x)$ 和 $x^*(t)$ 的 Stephan 问题可用类似的方式来陈述. 这时, 条件 (8),

(9) 和 (10) 保持成立, 而条件 (11) 对于 $0 \leqslant t < T$ 采取下列形式:

$$\left.\frac{dY^*(t,x)}{dx}\right|_{x\downarrow x^*(t)} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\uparrow x^*(x)},$$

其中

$$\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\uparrow x^*(t)} = -1,$$

因为 $g(x)=(K-x)^+$, 而 $x^*(t)<K$.

关于函数 $Y^*(t,x)$ 和 $x^*(t)$ 的性质的补充信息可在专门研究标准美式买入期权的论文 [363] 中找到, 那里还包含有关其他期权的广泛的文献.

§3d. 欧式期权和美式期权的价值之间的关系

1. 以前已经注意到, 在实际中, 遇到美式期权的机会比起欧式期权来要经常得多. 然而, 如果说对于后者有诸如 *Black-Scholes* 公式那样的出色结果, 那么对于在有限时间视野中的问题的美式期权的计算来说, 会遇到极大的解析困难, 最终它与对应的 Stephan 问题的解的复杂性相联系.

由 §3a 中的公式 (1) 和 (2), 很明显, 价格 $V^*(T,x)\geqslant V(T,x)$; 当然, 这也是完全自然的, 因为根据美式合约的条件, 有可能的不仅是等待 (最终) 执行时刻, 并且还能选择这一时刻.

在本节中, 我们引入某些有关标准买入期权和卖出期权的价格联系的结果; 对此, 它们的偿付函数分别有形式 $g(x)=(x-K)^+$ 和 $g(x)=(K-x)^+$.

我们将假定, $\lambda=0$. 从而, §3a 中的公式 (1) 和 (2) 取下列形式:

$$V(T,x)=\mathsf{E}_x e^{-rT}g(S_T), \tag{1}$$

以及

$$V^*(T,x)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^T}\mathsf{E}_x e^{-r\tau}g(S_\tau), \tag{2}$$

其中 $x=S_0$.

2. 在 $g(x)=(x-K)^+$ 的情形下, 即对于买入期权, 求解价格 $V(T,x)$ 和 $V^*(T,x)$ 之间的关系式的问题是非常简单的. 在这一情形下,

$$V(T,x)=V^*(T,x), \tag{3}$$

以及时刻 $\tau_T^*=T$ 在类 $\mathfrak{M}_0^T$ 中是最优的 (参见 §3c).

注. 我们强调, 如果 $\lambda>0$, 那么结果 (3) 就不成立, 而这是由过程 $(e^{-(\lambda+r)t}(S_t-K)^+)_{t\geqslant 0}$ 对于 $\lambda>0$ 已经不再是下鞅所引起的 (比较 §3c).

现在我们转向对于标准买入期权 $(g(x)=(K-x)^+)$ 的 "缺陷" 量

$$\Delta_0^T(x) \equiv V^*(T,x) - V(T,x) \tag{4}$$

的问题, 其中认为 $\lambda = 0$, 并记 $x^* = x^*(t)$, $0 \leqslant t < T$, 为对于最优停时 τ_T^* 的观察停止区域和观察延续区域之间的界面函数.

定理. 在标准买入期权情形下, "缺陷" 量

$$\Delta_0^T(x) = rK\mathsf{E}_x \int_0^T e^{-ru} I(S_u < x^*(u))du. \tag{5}$$

推论 1. 设 $\mathbb{P}_T$ 和 $\mathbb{P}_T^*$ 为欧式和美式买入期权的合理价格 $(\mathbb{P}_T = V(T,S_0)$, $\mathbb{P}_T^* = V^*(T,S_0))$. 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T^* &= \mathbb{P}_T + rK\mathsf{E}_{S_0}\int_0^T e^{-ru}I(S_u < x^*(u))du \\ &= Ke^{-rT}\Phi(-y_-) - S_0\Phi(-y_+) \\ &\quad + rK\int_0^T e^{-ru}\Phi(-y_-(u,x^*(u)))du,\end{aligned} \tag{6}$$

其中 (比较 §1b 中的记号)

$$y_\pm = \frac{\ln\dfrac{S_0}{K} + T\left(r \pm \dfrac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

以及

$$y_-(u,x^*(u)) = \frac{\ln\dfrac{S_0}{x^*(u)} + u\left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{u}}. \tag{7}$$

证明. 设

$$Y(t,x) = \mathsf{E}_{t,x}e^{-r(T-t)}g(S_T), \tag{8}$$

以及

$$Y^*(t,x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_t^T} \mathsf{E}_{t,x}e^{-r(\tau-t)}g(S_\tau), \tag{9}$$

其中 $g(x) = (K-x)^+$. 于是对于

$$\Delta_t^T(x) \equiv Y^*(t,x) - Y(t,x), \tag{10}$$

我们求得

$$e^{-rt}\Delta_t^T(x) = \mathsf{E}_{t,x}\{e^{-r\tau_t^T}g(S_{\tau_t^T}) - e^{-rT}g(S_T)\}, \tag{11}$$

其中 τ_t^T 为问题 (9) 中的最优停时.

根据 Itô 公式 (第三章 §5c)

$$d(e^{-ru}(K-S_u)^+) = e^{-ru}d(K-S_u)^+ - re^{-ru}(K-S_u)^+du, \tag{12}$$

而根据对于凸函数的 Itô-Meyer 公式 (参见第七章 §4a; [395; 第 IV 章]; 也比较第三章 §5c 中的 Tanaka 公式 (17)),

$$d(K-S_u)^+ = -I(S_u < K)dS_u + \frac{1}{2}L_u(K), \tag{13}$$

其中

$$L_u(K) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^u I(|S_t-K|\leqslant\varepsilon)dt \tag{14}$$

为过程 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 对水平 K 在 $[0,u]$ 上度过的局部时间.

由 (11)–(13) 我们求得,

$$\begin{aligned}
e^{-rT}\Delta_t^T(x) &= -\mathsf{E}_{t,x}\int_{\tau_t^T}^T d\left(e^{-ru}(K-S_u)^+\right)\\
&= -\mathsf{E}_{t,x}\int_{\tau_t^T}^T e^{-ru}\{-I(S_u<K)dS_u + \frac{1}{2}dL_u(K)\\
&\qquad\qquad - r(K-S_u)I(S_u<K)du\}\\
&= \mathsf{E}_{t,x}\int_{\tau_t^T}^T e^{-ru}\{-dL_u(K) + I(S_u<K)\\
&\qquad\qquad \times [rS_u du + \sigma S_u dW_u + (rK - rS_u)du]\}\\
&= \mathsf{E}_{t,x}\int_{\tau_t^T}^T e^{-ru}\{rKI(S_u<K)du - dL_u(K)\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

对于 $t\leqslant T$, 令

$$A_t = \int_{\tau_0^T}^{\tau_t^T} e^{-ru}\{rKI(S_u<K)du - dL_u(K)\}.$$

于是, 由于 $\tau_T^T = T$, 由 (15) 得到

$$e^{-rt}\Delta_t^T(x) = \mathsf{E}_{t,x}[A_T - A_t].$$

现在把 A_t 表示为下列形式:

$$A_t = A_t^1 + A_t^2,$$

其中

$$A_t^1 = \int_{\tau_0^T}^{\tau_t^T} e^{-ru}I(S_u\leqslant x^*(u))\{rKI(S_u<K)du - dL_u(K)\},$$

$$A_t^2 = \int_{\tau_0^T}^{\tau_t^T} e^{-ru}I(S_u > x^*(u))\{rKI(S_u<K)du - dL_u(K)\}.$$

由于 $x^*(u) < K$ 对于所有 $u < T$ 成立, 故

$$\begin{aligned} A_t^1 &= \int_{\tau_0^T}^{\tau_t^T} e^{-ru} I(S_u \leqslant x^*(u)) rK\,du \\ &= rK \int_0^t e^{-ru} I(S_u < x^*(u))\,du. \end{aligned}$$

过程 $A^1 = (A_t^1)_{t\leqslant T}$ 是可料下鞅, 从而, 根据第三章 §5b 中的推论 2, 这一过程的补偿量重合于自身. 略为复杂的分析 (参见 [134], [135] 和 [363]) 指出, 过程 $A^2 = (A_t^2)_{t\leqslant T}$ 的补偿量等于零. 从而,

$$\begin{aligned} e^{-rt}\Delta_t^T(x) &= \mathsf{E}_{t,x}[A_T - A_t] = \mathsf{E}_{t,x}[A_T^1 - A_t^1] \\ &= rK\mathsf{E}_{t,x}\int_t^T e^{-ru} I(S_u < x^*(u))\,du, \end{aligned} \tag{16}$$

因而, 对于 $\Delta_0^T(x)$, 公式 (5) 成立.

最后, 推论 1 中的公式 (6) 由 §1b 中的对于 $\mathbb{P}_T$ 的 (5) 和公式 (18) 导出.

定理和推论得证.

推论 2. 函数 $Y^*(t,x)$ 和 $x^*(t)$ 由下列关系式相联系:

$$Y^*(t, x^*(t)) = K - x^*(t), \quad t \leqslant T, \tag{17}$$

它可看作用来定义界面函数 $x^* = x^*(t)$ $(t \leqslant T)$ 的**积分关系式**, 其中 $x^*(T) \equiv \lim\limits_{t\to T} x^*(t)$.

这里应该强调, 其实, 函数 $Y^*(t,x)$ 也是未知的. 在实际应用中, 对于这一函数运用向后递推方法来计算的逼近 $Y_\Delta^*(t,x)$ (参见 §3b 中的第 1 点). 在 (19) 中把函数 $Y^*(t,x)$ 替换为 $Y_\Delta^*(t,x)$, 我们就得到函数 $x_\Delta^* = x_\Delta^*(t)$, $t \leqslant T$, 它可看作 $x^* = x^*(t)$ $(t \leqslant T)$ 的逼近.

4. 在扩散 $(B,\mathcal{P})$-债券市场中的欧式期权和美式期权

§4a. 关于债券市场中的期权定价的争论

1. 直到现在为止, 我们只考察了 (B,S)-股票市场上的期权. 在现实的金融实务中, 可能遇到各种各样的期权: 例如, 欧元期权, 远期期权, 外汇期权等等, 甚至还有期权的期权. 除了标准买入期权和卖出期权以外, 它们的形形色色的组合也有交易. 这时, 许多可选的金融工具有着变化无端的结构, 它们既由偿付函数来确定, 也由参与期权合约组成的基本证券的类型来确定.

许多期权都属于“特种 (exotic)”期权类, 它们的多种多样例如可从它们的英文名称中来设想: up-and-out put (破顶卖出期权), up-and-in put (保顶卖出期权), down-and-out call (破底买入期权), down-and-in call (保底买入期权), barrier option (障碍期权), Bermuda option (百慕大期权), Rainbow option (虹式期权), Russian option (俄国期权), knock-out option (敲出期权), digital option (数字化期权), all-or-nothing (全有全无期权), one-touch all-or-nothing (一触即发全有全无期权), supershares (绩优股期权) 等等 (参见 [232], [414], [415]).

说起上述这些期权以及其他金融衍生工具的定价, 应该注意到, 其方法论, 如同 F. Black, M. Scholes 和 R. Merton ([44], [346]) 在 (B,S)-股票市场情形下所考察的模型中一样. 这时, 仍然有两种途径: 鞅方法以及基于直接转化为“基本方程”的方法 (比较 §§1b, c).

2. 下面的叙述将有关把 (B,S)-市场替换为 $(B,\mathcal{P})$-市场的情形下的标准欧式和美式期权的定价, 这里 $(B,\mathcal{P})$-市场由银行账户 $B=(B_t)_{t\leqslant T}$ 和一种债券所构成的市场, 其中债券的到期时间 T 的结构由满足条件 $\mathsf{P}(T,T)=1$ 的 (正) 过程 $\mathsf{P}=(\mathsf{P}(t,T))_{t\leqslant T}$ 来描述.

对应于第三章 §4a 和第七章 §5a 中的叙述, 我们在描述 $(B,\mathcal{P})$-市场时, 将采用间接方法, 认为银行账户 $B=(B_t)_{t\leqslant T}$ 的演变如下:

$$B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right), \tag{1}$$

其中 $r=(r(t))_{t\leqslant T}$ 为某个利率随机过程.

至于债券价格过程 $\mathsf{P}=(\mathsf{P}(t,T))_{t\leqslant T}$ 的动态变化, 我们将假定, 关于 $(\Omega,\mathscr{F}_T,(\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T})$ 上的原来的测度, 折现价格

$$\overline{\mathsf{P}}(t,T)=\frac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t},\quad t\leqslant T \tag{2}$$

形成鞅.

根据第七章 §5a 中的定理 1, 我们有

$$\mathsf{P}(t,T)=\mathsf{E}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right), \tag{3}$$

而由同样的第七章 §5a 中的定理 2, 所考察的 $(B,\mathcal{P})$-市场是无套利市场 (比如, 按 NA_+-文本).

3. 由 (1) 和 (3) 可见, 在 $(B,\mathcal{P})$-市场上过程 $(B_t)_{t\leqslant T}$ 和 $(\mathsf{P}(t,T))_{t\leqslant T}$ 本质上依赖于过程 $r=(r(t))_{t\leqslant T}$ 的结构.

我们关于这一过程的基本假定将在于, 这是扩散 Gauss-Markov 过程, 它由下列随机微分方程描述:

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t))dt + \gamma(t)dW_t, \tag{4}$$

并由维纳过程 $(W_t)_{t\leqslant T}$ 生成, 以及其 (非随机) 初值条件为 $r(0) = r_0$. 函数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ 被假定为确定性的, 并且

$$\int_0^T (|\alpha(t)| + |\beta(t)| + \gamma^2(t))dt < \infty. \tag{5}$$

在这些假定下, 方程 (4) 有且仅有唯一 (强) 解

$$r(t) = g(t)\left\{r_0 + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{g(s)}ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{g(s)}dW_s\right\}, \tag{6}$$

其中

$$g(t) = \exp\left(-\int_0^t \beta(s)ds\right) \tag{7}$$

为下列方程的基本解:

$$g(t) = 1 - \int_0^t \beta(s)g(s)ds. \tag{8}$$

注 1. 根据第三章 §4a 中的叙述, 模型 (4) 无非就是 *Hull-White* 模型, 其他的如 *Merton* 模型, *Vasiček* 模型, *Ho-Lee* 模型都是它的特殊情形 (参见在所指出的 §4a 中的公式 (14), (7), (8) 和 (12)).

4. 由过程 $r = (r(t))_{t\leqslant T}$ 的 Markov 性得到,

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\,\Big|\, r(t)\right]. \tag{9}$$

记 $I(t,T) = \int_t^T r(s)ds$. 于是由 (6) 不难求得,

$$\mathsf{E}(I(t,T)\,|\,r(t)) = r(t)\int_t^T \frac{g(u)}{g(t)}du + \int_t^T \left[\int_t^u \frac{g(u)}{g(s)}\alpha(s)ds\right]du, \tag{10}$$

$$\mathsf{D}(I(t,T)\,|\,r(t)) = \int_t^T \left[\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)}\gamma(s)du\right]^2 ds. \tag{11}$$

因此, 由 (3) 得到, 对于

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{E}[\exp(-I(t,T))\,|\,r(t)] = \exp\left(\frac{1}{2}\mathsf{D}(I(t,T)\,|\,r(t)) - \mathsf{E}(I(t,T)\,|\,r(t))\right),$$

下列表示式成立:

$$\mathsf{P}(t,T)=\exp(A(t,T)-r(t)B(t,T)),\tag{12}$$

其中

$$A(t,T)=\frac{1}{2}\int_t^T\left[\int_s^T\frac{g(u)}{g(s)}\gamma(s)du\right]^2ds-\int_t^T\left[\int_t^u\frac{g(u)}{g(s)}\alpha(s)ds\right]du,\tag{13}$$

$$B(t,T)=\int_t^T\frac{g(u)}{g(t)}du.\tag{14}$$

注 2. 按照第三章 §4c 的术语, 价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 表示为 (12) 形式的模型称为单因子仿射模型. 所作出的过程 $r=(r(t))_{t\leqslant T}$ 为 Gauss-Markov 过程的补充假定, 使得有可能对于这样的经常被称为单因子高斯模型的模型, 对于在所考察的 $(B,\mathcal{P})$-市场上的标准欧式和美式期权, 相当详细地引入对应的定价计算. 下面的 §§4b, c 就是讨论这些问题的.

注 3. 关于各种描述债券价格动态变化的模型与经验数据的协调, 参见例如, [257].

§4b. 单因子高斯模型中的欧式期权定价

1. 我们将假定, 所考察的由银行账户和债券所组成的 $(B,\mathcal{P})$-市场模型, 完全由单个因子来确定; 这一因子就是利率 $r=(r(t))_{t\leqslant T}$, 它是 Gauss-Markov 过程, 满足 §4a 中的随机微分方程 (4), 并且有 (非随机的) 初值条件 $r(0)=r_0$.

设 T^0 为某个时刻 $(T^0<T)$, 它可看作欧式期权的执行时刻, 在买入期权的情形下有偿付函数为 $f_{T^0}=(\mathsf{P}(T^0,T)-K)^+$, 而在卖出期权的情形下有偿付函数为 $f_{T^0}=(K-\mathsf{P}(T^0,T))^+$.

定理. *在所考察的 $(B,\mathcal{P})$-市场的单因子高斯模型中, 标准买入期权的合理价格 $\mathbb{C}^0(T^0,T)$ 由下列公式来确定:*

$$\boxed{\mathbb{C}^0(T^0,T)=\mathsf{P}(0,T)\Phi(d_+)-K\mathsf{P}(0,T^0)\Phi(d_-)}\tag{1}$$

其中

$$d_\pm=\frac{\ln\dfrac{\mathsf{P}(0,T)}{K\mathsf{P}(0,T^0)}\pm\dfrac{1}{2}\sigma^2(T^0,T)B^2(T^0,T)}{\sigma(T^0,T)B(T^0,T)},\tag{2}$$

$$B(T^0,T)=\int_{T^0}^T\frac{g(u)}{g(T^0)}du,\tag{3}$$

$$\sigma(T^0,T)=\left(\int_{T^0}^T\left[\int_s^T\frac{g(u)}{g(s)}\gamma(s)du\right]^2ds\right)^{1/2},\tag{4}$$

$$g(u) = \exp\left(-\int_0^u \beta(s)ds\right). \tag{5}$$

标准卖出期权的合理价格 $\mathbb{P}^0(T^0, T)$ 由下列公式来确定:

$$\boxed{\mathbb{P}^0(T^0, T) = K\mathsf{P}(0, T^0)\Phi(-d_-) - \mathsf{P}(0, T)\Phi(-d_+)} \tag{6}$$

在证明公式 (1) 和 (6) 以前, 我们注意到, 它们非常类似于股票情形下的合理价格 $\mathbb{C}(T)$ 和 $\mathbb{P}(T)$ 的公式 (参见 §1b 中的 (9) 和 (18)).

这种类似并不令人惊奇, 因为对于所考察的价格 $\mathsf{P}(t, T)$ 的模型, 也如同 Black-Merton-Scholes 模型中的价格 S_t 一样, 有对数正态结构:

$$\ln \mathsf{P}(t, T) = A(t, T) - r(t)B(t, T),$$

其中 $(r(t))_{t \leqslant T}$ 为高斯过程,

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t,$$

以及 $(W_t)_{t \leqslant T}$ 为维纳过程, 而这就是说, 它也是高斯过程.

或许, 较为令人惊奇的是, 从 1973 年 Black-Scholes 公式发表以来, 过了许多年, 直到 1989 年, 才有 F. Jamshidian 的论文 [256] 发表, 其中对于 Vasiček 模型 ($\alpha(t) \equiv \alpha$, $\beta(t) \equiv \beta$, $\gamma(t) \equiv \gamma$; 参见 §4a 中的 (4) 和第三章 §4a 中的 (8)) 得到公式 (1) 和 (6). 下面引入的证明基本上来自著作 [257].

2. 根据无套利完全市场上的定价理论 (参见第七章中的第 5 节), 以及假定在 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \leqslant T})$ ($\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$) 上的原来的测度是鞅测度, 令

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right), \tag{7}$$

我们求得

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^0(T^0, T) &= \mathsf{E}R(T^0)(\mathsf{P}(T^0, T) - K)^+ \\
&= \mathsf{E}\left(I(\mathsf{P}(T^0, T) > K)R(T^0)(\mathsf{P}(T^0, T) - K)\right) \\
&= \mathsf{E}\left(I(\mathsf{P}(T^0, T) > K)R(T^0)\mathsf{P}(T^0, T)\right) \\
&\quad - KE\left(I(\mathsf{P}(T^0, T) > K)R(T^0)\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

很明显, 事件

$$\begin{aligned}
\left\{\mathsf{P}(T^0, T) > K\right\} &= \left\{A(T^0, T) - r(T^0)B(T^0, T) > \ln K\right\} \\
&= \left\{r(T^0) \leqslant r^*\right\},
\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$r^* = \frac{\ln K - A(T^0, T)}{-B(T^0, T)}, \tag{10}$$

以及 $A(t,T)$, $B(t,T)$ 由 §4a 中的公式 (13) 和 (14) 来确定.

设

$$\xi = r(T^0), \quad \eta = \int_0^T r(u)du, \quad \zeta = \int_0^{T^0} r(u)du.$$

那么由 (8) 和 (9) 我们求得

$$\mathbb{C}^0(T^0, T) = \mathsf{E}\left(I(\xi \leqslant r^*)e^{-\eta}\right) - K\mathsf{E}\left(I(\xi \leqslant r^*)e^{-\zeta}\right). \tag{11}$$

为进一步简化这一公式, 下列可通过直接计算来确立的断言 (参见 [257; 引理 4.2]) 是有用的.

引理. 设 (X, Y) 为高斯随机变量对, 其均值向量为 (μ_X, μ_Y), 协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} \sigma_X^2, & \rho_{XY} \\ \rho_{XY}, & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. 那么

$$\mathsf{E}I(X \leqslant x)\exp(-Y) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \mu_Y\right)\Phi(\widetilde{x}), \tag{12}$$

以及

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}I(X \leqslant x)X\exp(-Y) \\ &\qquad = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \mu_Y\right)\cdot\{(\mu_X - \rho_{XY})\Phi(\widetilde{x}) - \sigma_X\varphi(\widetilde{x})\}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\widetilde{x} = \frac{x - (\mu_X - \rho_{XY})}{\sigma_X},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y)dy.$$

考虑到 §4a 中的公式 (6), (10) 和 (11), 不难算得

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mathsf{E}r(T^0) = g(T^0)\left(r_0 + \int_0^{T^0} \frac{1}{g(s)}\alpha(s)ds\right), \\ \mu_\eta &= \mathsf{E}\int_0^T r(u)du = r_0\int_0^T g(u)du + \int_0^T \left[\int_0^u \frac{g(u)}{g(s)}\alpha(s)ds\right]du, \\ \mu_\zeta &= \mathsf{E}\int_0^{T^0} r(u)du = r_0\int_0^{T^0} g(u)du + \int_0^{T^0} \left[\int_0^u \frac{g(u)}{g(s)}\alpha(s)ds\right]du, \end{aligned}$$

以及

$$\sigma_\xi^2 = \mathsf{D}r(T^0) = \int_0^{T^0} \gamma^2(s) \left(\frac{g(T^0)}{g(s)}\right)^2 ds,$$

$$\sigma_\eta^2 = \mathsf{D}\int_0^T r(u)du = \int_0^T \left[\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)}\gamma(s)du\right]^2 ds,$$

$$\sigma_\zeta^2 = \mathsf{D}\int_0^{T^0} r(u)du = \int_0^{T^0} \left[\int_s^{T^0} \frac{g(u)}{g(s)}\gamma(s)du\right]^2 ds,$$

$$\begin{aligned}\rho_{\xi\zeta} &= \mathsf{Cov}\left(r(T^0), \int_0^{T^0} r(u)du\right)\\ &= \int_0^{T^0}\left(\gamma^2(s)\frac{g(T^0)}{g(s)}\int_s^{T^0}\frac{g(u)}{g(s)}du\right)ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{\xi\eta} &= \mathsf{Cov}\left(r(T^0), \int_0^T r(u)du\right)\\ &= \mathsf{Cov}\left(r(T^0), \int_0^{T^0} r(u)du\right) + \mathsf{Cov}\left(r(T^0), \int_{T^0}^T r(u)du\right)\\ &= \rho_{\xi\zeta} + \sigma_\xi^2 \int_{T^0}^T \frac{g(u)}{g(T^0)}du.\end{aligned}$$

由 (11) 和 (12) 我们求得

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^0(T^0,T) &= \mathsf{E}\left(I(\xi \leqslant r^*)e^{-\eta}\right) - K\mathsf{E}\left(I(\xi \leqslant r^*)e^{-\zeta}\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_\eta^2 - \mu_\eta\right)\Phi\left(\frac{r^* - (\mu_\xi - \rho_{\xi\eta})}{\sigma_\xi}\right)\\ &\quad - K\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 - \mu_\zeta\right)\Phi\left(\frac{r^* - (\mu_\xi - \rho_{\xi\zeta})}{\sigma_\xi}\right). \end{aligned}\tag{14}$$

由此代入上面引入的 $\mu_\xi, \mu_\eta, \mu_\zeta, \sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta, \rho_{\xi\eta}$ 和 $\rho_{\xi\zeta}$ 的值, 经过某些代数变换 (参见 [257; 附录 4b]) 就导致所要求的公式 (1).

公式 (6) 直接由 (1) 得到, 其中只需考虑

$$(K - \mathsf{P}(T^0,T))^+ = (\mathsf{P}(T^0,T) - K)^+ - \mathsf{P}(T^0,T) + K.$$

(例如与第六章 §4d 中的公式 (9) 的推导相比较.)

定理得证.

3. 由公式 (6) 得到, 合理价格 $\mathbb{P}^0(T^0,T)$ 由 "初始" 价格 $\mathsf{P}(0,T^0)$, $\mathsf{P}(0,T)$, 常数 K 和量 $\sigma(T^0,T)B(T^0,T)$ 来确定, 后者自身是由当 $T^0 \leqslant s \leqslant T$ 时的系数 $\beta(s), \gamma(s)$ 来确定.

在 Vasiček 模型的情形下, $\beta(s)\equiv s$, $\gamma(s)\equiv\gamma$, 并不难求得

$$\sigma(T^0,T)B(T^0,T)=\frac{\gamma}{\beta}\left(1-e^{-\beta(T-T^0)}\right)\left(\frac{1}{2\beta}(1-e^{-2\beta T^0})\right)^{1/2}.$$

初始价格 $\mathsf{P}(0,T^0)$ 和 $\mathsf{P}(0,T)$ 在这一情形下, 由下列公式 (参见 §4a 中的 (12)) 确定:

$$\mathsf{P}(0,t)=\exp\{A(0,t)-r_0B(0,t)\},$$

其中

$$\begin{aligned}A(0,t)&=\frac{1}{\beta}[1-e^{-\beta t}-\beta t]\left[\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\gamma^2}{2\beta^2}\right]-\frac{\gamma^2}{4\beta^3}[1-e^{-\beta t}]^2,\\B(0,t)&=\frac{1}{\beta}[1-e^{-\beta t}].\end{aligned}$$

§4c. 单因子高斯模型中的美式期权定价

1. 我们继续考察单因子高斯 $(B,\mathcal{P})$-模型, 对此在 §4b "单因子高斯模型中的欧式期权定价" 中引入了对于 $\mathbb{C}^0(T^0,T)$ 和 $\mathbb{P}^0(T^0,T)$ 的公式; 我们将记 $\mathbb{C}^*(T^0,T)$ 和 $\mathbb{P}^*(T^0,T)$ 为相应的美式 (买入和卖出) 期权的合理价格. 这时假定, 执行时刻属于类

$$\mathfrak{M}_0^{T^0}=\{\tau=\tau(\omega)\colon 0\leqslant\tau(\omega)\leqslant T^0,\omega\in\Omega\}.$$

所考察的 $(B,\mathcal{P})$-市场既是无套利的, 又是完全的; 而对应于类似模型中的定价一般理论 (参见第六章第 2 节和第七章第 5 节),

$$\mathbb{C}^*(T^0,T)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^{T^0}}\mathsf{E}\exp\left(-\int_0^\tau r(u)du\right)(\mathsf{P}(\tau,T)-K)^+,\tag{1}$$

以及

$$\mathbb{P}^*(T^0,T)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^{T^0}}\mathsf{E}\exp\left(-\int_0^\tau r(u)du\right)(K-\mathsf{P}(\tau,T))^+.\tag{2}$$

由于

$$\mathsf{P}(\tau,T)=\exp(A(\tau,T)-r(\tau)B(\tau,T)),\tag{3}$$

故我们看到, 问题 (1) 和 (2) 属于标准的对于 Markov 过程 $r=(r(t))_{t\leqslant T}$ 和非负函数 $G(\tau,T;r(\tau))$ 的最优停止问题

$$\text{“}\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^{T^0}}\mathsf{E}\exp\left(-\int_0^\tau r(u)du\right)G(\tau,T;r(\tau))\text{”},\tag{4}$$

其求解的一般理论已经发展得足够成熟 (参见例如, [441]).

2. 有关求解量 $\mathbb{C}^*(T^0,T)$ 的问题非常简单. 事实上, 正如在 (B,S)-市场上的标准买入期权的情形下, 过程

$$\left(\exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)(\mathsf{P}(t,T)-K)^+\right)_{t\leqslant T}$$

为下鞅, 而这就是说, 根据第六章 §5b 中的 Doob 停止定理, $\mathbb{C}^*(T^0,T)=\mathbb{C}^0(T^0,T)$, 以及在 §3b 中把它解释为所考察的 "美式买入期权是欧式期权".

转向求价格 $\mathbb{P}^*(T^0,T)$, 我们引入量

$$Y^*(t,r)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_t^{T^0}}\mathsf{E}_{t,r}\exp\left(-\int_t^\tau r(u)du\right)G(\tau,T;r(\tau)),\tag{5}$$

其中 $\mathsf{E}_{t,r}$ 为在 $r(t)=r$ 的假定下的均值, $\mathfrak{M}_t^{T^0}$ 为满足 $t\leqslant\tau(\omega)\leqslant T^0$ 的停时 $\tau=\tau(\omega)$ 的类, 以及

$$G(t,T;r(t))=(K-\mathsf{P}(t,T))^+=(K-\exp(A(t,T)-r(t)B(t,T)))^+,$$

其中函数 $A(t,T)$ 和 $B(t,T)$ 由 §4a 中的公式 (13) 和 (14) 来确定.

记

$$C^T=\{(t,r)\colon Y^*(t,r)>G(t,T;r),0\leqslant t\leqslant T,r>0\}$$

和

$$D^T=\{(t,r)\colon Y^*(t,r)=G(t,T;r),0\leqslant t\leqslant T,r>0\}.$$

基于价格 $Y^*(t,r)$ 作为函数 $G(t,T;r)$ 的最小超过优函数的特征性质 (参见 [340], [363], [441; 第 III 章], [467], [478]), 可以指出, 存在连续界面函数 $r^*=r^*(t)$, $t<T^0$, 使得区域 C^T 和 D^T (观察延续区域和观察停止区域) 有下列形式:

$$C^T=\{(t,r)\colon r(t)<r^*(t),0\leqslant t<T,r>0\}$$

和

$$D^T=\{(t,r)\colon r(t)\geqslant r^*(t),0\leqslant t<T,r>0\}.$$

这时, $Y^*=Y^*(t,r)$ 和界面函数 $r^*=r^*(t)$ 为下列 *Stephan* 问题的解:

$$\frac{\partial Y^*(t,r)}{\partial t}+LY^*(t,r)-rY^*(t,r)=0,\quad (t,r)\in C^T,$$

其中

$$LY^*(t,r)=(\alpha(t)-\beta(t)r)\frac{\partial Y^*(t,r)}{\partial r}+\frac{1}{2}\gamma^2(t)\frac{\partial^2Y^*(t,r)}{\partial r^2};$$

在区域 D^T 中,

$$Y^*(t,r)=G(t,T;r),\tag{6}$$

而在 ∂D^T 上满足光滑粘合条件

$$\left.\frac{\partial Y^*(t,r)}{\partial r}\right|_{r\uparrow r^*(t)} = \left.\frac{\partial G(t,T;r)}{\partial r}\right|_{r\downarrow r^*(t)}. \tag{7}$$

这一问题的精确解析解未知 (不过, 正如在 (B,S)-模型中那样; 参见 §3c). 同时, 考虑到在实际中美式期权的广泛流传, 人们希望, 对于美式期权的价格 $\mathbb{P}^*(T^0,T)$ 比欧式期权的价格 $\mathbb{P}^0(T^0,T)$ 大多少, 怎样了解界面函数 $r^*=r^*(t)$ $(t<T^0)$ 本身, 都能有一定的设想.

在所考察的 $(B,\mathcal{P})$-市场情形下, 利用类似于 §3d 中对于建立在 (B,S)-市场上的欧式期权和美式期权价格之间的联系所运用的讨论, 就导致下列结果 (比较 §3d 中的 (19)): 对于 $0\leqslant t<T^0$,

$$Y^*(t,r)=Y^0(t,r)+K\int_t^{T^0}\mathsf{E}_{t,r}\left\{\exp\left(-\int_t^s r(u)du\right)r(s)I\left(r(s)\geqslant r^*(s)\right)\right\}ds, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}Y^0(t,r)&=\mathsf{E}_{t,r}\exp\left(-\int_t^{T^0}r(u)du\right)\left(K-\mathsf{P}(T^0,T)\right)^+\\&=\mathsf{E}_{t,r}\exp\left(-\int_t^{T^0}r(u)du\right)\left(K-\exp\left(A(T^0,T)-r(T^0)B(T^0,T)\right)\right).\end{aligned} \tag{9}$$

运用 §4b 中的公式 (12) 和 (13) 以及在那里所求得的对于量 $\mu_\xi,\mu_\eta,\cdots$ 的值, 经过不太复杂的代数变换, 我们得到: 对于 $0\leqslant t\leqslant T^0$,

$$\begin{aligned}Y^*(t,r)=&Y^0(t,r)\\&+K\int_t^{T^0}\mathsf{P}(t,s)\left\{\Phi\left(-\nu^*(t,s)\right)f(t,s)+\sigma(t,s)\varphi\left(\nu^*(t,s)\right)\right\}ds,\end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma^2(t,s)&=\mathsf{D}(r(s)\,|\,r(t)=r),\\f(t,s)&=-\frac{\partial}{\partial s}\ln\mathsf{P}(t,s),\\\nu^*(t,s)&=\frac{r^*(s)-f(t,s)}{\sigma(t,s)}.\end{aligned}$$

(公式 (8) 和 (10) 的推导细节参见 [257].)

特别是, 由于

$$\mathbb{P}^*(T^0,T)=Y^*(0,r_0)\quad 以及\quad \mathbb{P}^0(T^0,T)=Y^0(0,r_0),$$

故

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(T^0,T) =& \mathbb{P}^0(T^0,T)\\ &+ K\int_0^{T^0} \mathsf{P}(0,s)\left\{\Phi\left(-\nu^*(0,s)\right)f(0,s)+\sigma(0,s)\varphi\left(\nu^*(0,s)\right)\right\}ds.\end{aligned}$$

作为结束, 我们注意到, 公式 (10) 使得至少有可能 (向后递推), 既得到价格 $\mathbb{P}^*(T^0,T)$ 的近似值, 也得到界面函数 $r^*=r^*(t)$ $(t<T^0)$ 的近似值.

关于美式期权的各种数值计算方法 (包括 “带分红的情形”) 参见例如, [28], [29], [56], [57], [179], [257], [376], [478] 和 [479].

参考文献

[1] Abramowitz, M., and I. A. Stegun, 1968, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York.

[2] Adaptive Computational Methods in Finance and Trading. Report of the Intertek Group. Foreword by R. B. Olsen, 1994, December, "Olsen and Associates", Research Institute for Applied Economics, Zürich.

[3] Admati, A. R., and P. Pfleiderer, 1988, A theory of intraday trading patterns, *Review of Financial Studies*, **1**, 3–40.

[4] Akgiray, V., and G. G. Booth, 1988, The stable-law model of stock returns, *Journal of Business and Economic Statistics*, **6**, 51–57.

[5] Александров, П. С., и А. Я. Хинчин, 1953, Андрей Николаевич Колмогоров (к пятидесятилетию со дня рождения), *Успехи математических наук*, **8**, №3, 178–200.

[6] Andersen, L., J. Andreasen and R. Brotherton-Ratcliffe, February, 1997, The Passport Option, Perprint, Aarhus University, Aarhus.

[7] Andersen, T., and T. Bollerslev, 1994, Intraday Seasonality and Volatility Persistence in Foreign Exchange and Equity Markets, Working paper №193, Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, Evanston, IL.

[8] Anis, A. A., and E. H. Lloyd, 1976, The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands, *Biometrika*, **63**, №1, 111–116.

[9] Ansel, J.-P., et C. Stricker, 1994, Couverture des actifs contingents et prix maximum, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **30**, №2, 303–315.

[10] Ansel, J.-P., et C. Stricker, 1990, Quelques remarques sur un théorème de Yan, *Lecture Notes in Mathematics*, **1426**, 226–274.

[11] Аркин, В. И., и И. В. Евстигнеев, 1979, Вероятностные модели управления и экономической динамики, Наука, Москва.

[12] Bachelier, L., 1900, Théorie de la spéculation, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, **17**, 21–86. (英译文在 [77] 中.)

[13] Baillie, R., and T. Bollerslev, 1990, Intra-day and inter market volatility in foreign exchange rates, *Review of Economic Studies*, **58**, 565–585.

[14] Baillie, R., and T. Bollerslev, 1989, The daily message in exchange rates: a conditional variance tale, *Journal of Business and Economic Statistics*, **7**, 297–305.

[15] Baillie, R., T. Bollerslev and H.-O. Mikkelsen, 1996, Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **74**, №1.

[16] Baker, G. L., and J. P. Golub, 1996, Chaotic Dynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[17] Balakrishnan, V., C. Nicolis and G. Nicolis, January, 1995, Extreme Value Distributions in Chaotic Dynamics, Preprint ULB-Cenoli, №95-1. Centre for Non-linear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles.

[18] Ball, C. A., 1993, A review of stochastic volatility models with application to option pricing, *Financial Markets, Institutions and Instruments*, **2**, №5, 55–69.

[19] Ball, C. A., and W. N. Torous, 1983, Bond price dynamics and options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **18**, 517–531.

[20] Barlow, M. T., 1982, One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution, *Journal of the London Mathematical Society*, **26**, 335–347.

[21] Barndorff-Nielsen, O. E., 1977, Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size, *Proceedings of the Royal Society, London Ser. A*, **353**, 401–419.

[22] Barndorff-Nielsen, O. E., October, 1994, Gaussian\\Inverse Gaussian Processes and the Modeling of Stock Returns, Preprint, Aarhus University, Aarhus.

[23] Barndorff-Nielsen, O. E., 1978, Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae, *Scandinavian Journal of Statistics*, **5**, 151–157.

[24] Barndorff-Nielsen, O. E., March 5, 1996, Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling, Preprint, Aarhus University, Dept. of Mathematical Sciences, Aarthus.

[25] Barndorff-Nielsen, O. E., and P. Blæsild, Hyperbolic distributions and ramifications: contributions to theory and application, *Statistical Distributions in Scientific Work*, Ed. C. Taillie et al., **4**, 19–44, Dordrecht, Reidel.

[26] Barndorff-Nielsen, O. E., J. L. Jensen and M. Sørensen, Wind shear and hyperbolic distributions, *Boundary-Layer Meteorology*, **49**, 417–431.

[27] Barnea, A., and D. Downes, 1973, A reexamination of the empirical distribution of stock price changes, *Journal of American Statistical Association*, **68**, 348–350.

[28] Barone-Adesi, G., and R. Elliott, 1991, Approximations for the values of American options, *Stochastic Analysis and Applications*, **9**, №2, 115–131.

[29] Barone-Adesi, G., and R. E. Whaley, 1987, Efficient analytic approximation of American option values, *Journal of Finance*, **42**, №2, 301–320.

[30] Basseville, M., and I. Nikiforov, 1993, Detection of Abrupt Changes, Englewood Cliffs, Prentice Hall, NJ.

[31] Baxter, M., and A. Rennie, 1996, Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing, Cambridge Univ. Press, Cambridge. (中译本: M. W. Baxter, A. J. O. Rennie 著, 叶中行、王桂兰、林建忠译, 2006, 金融数学: 衍生产品定价引论, 人民邮电出版社, 图灵教育丛书, 北京.)

[32] Beibel, M., and H. R. Lerche, 1997, A New Look at Warrant Pricing and Related Optimal Stopping Problems, *Statistica Sinica*, **7**, №1, 93–108.

[33] Bensoussan, A., 1984, On the theory of option pricing, *Acta Applicandae Mathematicae*, **2**, 139–158.

[34] Benveniste, A., M. Métivier and P. Priouret, 1987, Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations, Springer-Verlag, Berlin.

[35] Bernstein, P. L., 1992, Capital Ideas, The Free Press, New York. (中译本: 彼得・伯恩斯坦著, 李繁康、邓哲夫、李挺生译, 2001, 投资革命: 源自象牙塔的华尔街理论, 上海远东出版社, 上海.)

[36] Björk, T., 1997, Interest Rate Theory, *Lecture Notes in Mathmatics*, **1656**, 53–122.

[37] Björk, T., G. Di Masi, Yu. Kabanov and W. Runggaldier, 1997, Towards a general theory of bond markets, *Finance and Stochastics*, **2**, №1, 141–174.

[38] Björk, T., Yu. Kabanov and W. Runggaldier, 1997, Bond market structure in the presence of marked point processes, *Mathematical Finance*, **7**, №2, 211–239.

[39] Биллингсли, П., 1977, Сходимость вероятностных мер, Наука, Москва. (英译本: Billingsley, P., 1968, Convergence of Probability Measure, Wiley, New York.)

[40] Bishop, G. W., Jr. Charles H, 1960, Dow and the Dow Theory, Appleton-Century-Crofts, New York.

[41] Black, F., March, 1988, The holes in Black-Scholes, *RISK-magazin*.

[42] Black, F. T., E. Derman and W. Toy, 1990, A one-factor model of interest rate and its application to Treasury bond options, *Financial Analysis Journal*, 33–39.

[43] Black, F., and P. Karasinski, 1991, Bond and option pricing when short rates are lognormal, *Financial Analysts Journal*, 52–59.

[44] Black, F., and M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, №3, 637–659.

[45] Благовешенский, Ю. Н., и И. Л. Легостаева, 1982, Параметрические границы для непараметрического тренда, *Доклады Академии наук СССР*, **264**, №4, С., 791–794. (英译本: Blagoveshchenskij, Yu. N., and I. L. Legostaeva, 1982, Parametric bounds for a nonparametric trend, *Soviet Mathematics, Dokl.*, **25**, 714–718.)

[46] Blattberg, R. C., and N. J. Gonedes, 1974, A comparison of the stable and the Student distributions as statistical models for stock prices, *Journal of Business*, **47**, 244–280.

[47] Bochner, S., 1962, Subordination of non-Gaussian processes, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **48**, 19–22.

[48] Bollerslev, T., 1986, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

[49] Boness, A., A. Chen and S. Jatusipitak, 1974, Investigations of nonstationary prices, *Journal of Business*, **47**, 518–537.

[50] Буренин, А. Н., 1995, Фьючерсные, форвардные и опционные рынки, Тривола, Москва.

[51] Боровков, А. А., 1986, Теория вероятностей, Наука, Москва.

[52] Bowers, N. L., H. U. Gerber, D. A. Hickman, D. A. Jones and C. J. Nesbitt, 1986, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, Itasca, IL.

[53] Box, G. E. P., and G. M. Jenkins, 1970, Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco. (中译本: (美) G. E. P. Box, (英) G. M. Jenkins, (美) G. C. Reinsel 著, 顾岚主译, 1997, 时间序列分析: 预测与控制, 中国统计出版社, 北京.)

[54] Brace, A., and M. Musiela, 1994, A multifactor Gauss-Markov implementation of Heath, Jarrow and Morton, *Mathematical Finance*, **4**, №3, 259–283.

[55] Brealey, R. A., and S. C. Myers, 1988, Principles of Corporate Finance, 3rd ed, McGraw-Hill, New York.

[56] Brennan, M., and E.S. Schwartz, 1979, A continuous time approach to the pricing of bonds, *Journal of Banking and Finance*, **3**, 133–155.

[57] Brennan, M., and E.S. Schwartz, 1977, The valuation of American put options, *Journal of Finance*, **32**, 449–462.

[58] Brock, W. A., W. D. Dechert and J.-A. Scheinkman, 1996, A test for Independence based on the correlation dimension, *Econometrics Reviews,* **15**, № 3, 197–235.

[59] Brock, W. A., D. A. Hsieh and B. Le Baron, 1991, Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence, MIT Press, Cambridge, MA.

[60] Brock, W. A., and S. M. Potter, 1990, Diagnostic testing for nonlinearity, chaos, and general dependence in time-series data, Nonlinear Modeling and Forecasting (Proceedings of a Workshop on Nonlinear Modeling and Forecasting, September 1990, Santa Fe, New Mexico), Ed. M. Casdagli and S. Enbank, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 137–159.

[61] Brock, W. A., and C. L. Sayers, 1988, Is the business cycle characterized by deterministic chaos? *Journal of Monetary Economics*, **22**, 71–90.

[62] Brockwell, P. J., and R. A. Davis, 1991, Time Series: Theory and Methods, 2nd ed., Springer-Verlag, New York. (中译本: P. J. 布罗克韦尔, R. A. 戴维斯著, 田铮译, 2001, 时间序列的理论与方法, 高等教育出版社, [海德堡] 施普林格出版社, 北京.)

[63] Brousseau, V., and M. O. Czarnecki, August 16, 1994, Modelling Exchange Rates: the Stable Model, Preprint, Ecole Polytechnique, Paris.

[64] Burnham, J. B., 1991, Current Structure and Recent Developments in Foreign Exchange

Markets, Recent Developments in International Banking and Finance, Ed. S. J. Khonry, Elsevier Sci. Publ., North-Holland, Amsterdam, 123–163.

[65] Бизнес: Оксфордский толковый словарь, 1995, Прогресс-Академия, Москва. (译自英文: A Concise Dictionary of Business, 1991, Market House Books, Ltd..)

[66] Carr, P., R. Jarrow and R. Myneni, 1992, Alternative characterizations of American put options, *Mathematical Finance*, **2**, №2, 87–106.

[67] Chernoff, H., 1961, Sequential tests for the mean of a normal distribution, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* **1**, University of California Press, 79–92.

[68] Четыркин, Е. М., 1992, Методы финансовых и коммерческих расчетов, Business Речь Дело, Москва.

[69] Chan, K. C., G. A., Karolyi, F. Longstaff and A. B. Sanders, 1992, An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rates, *Journal of Finance*, **47**, №3, 1209–1227.

[70] Chen, L., July, 1995, A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates, Preprint, Federal Reserve Board, Washington, USA.

[71] Chen, P., R. H. Day (Eds), 1993, Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics, Oxford University Press, Oxford.

[72] J. Y. Choi, D. Salandro and K. Shastri, 1988, On the estimation of bid-ask spreads: Theory and evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **23**, 219–230.

[73] Chou, C. S., 1979, Caractérisation d'une classe de semimartingales, *Lecture Notes in Mathematics*, **721**, 250–252.

[74] Chou, C. S., P.-A. Meyer et C. Stricker, 1980, Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés, *Lecture Notes in Mathematics*, **784**, 128–139.

[75] Chow Y. S., H. Robbins and D. Siegmund, 1971, Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping, Houghton Mifflin Comp., Boston.

[76] Ciesielski, Z., 1961, Hölder conditions for realizations of Gaussian processes, *Transactions of the American Mathematical Society*, **99**, 403–413.

[77] Clark, J. M. C., 1970, The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals, *Annals of Mathematical Statistics,* **41**, №4, 1282–1295. Correction *ibid* **42** (1971), 1778.

[78] Cootner, P. H. (Ed.), 1964, The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, Cambridge, MA.

[79] Copeland, T., and J. Weston, 1988, Financial Theory and Corporate Policy, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, MA. (中译本: (美) 托马斯 · E. 科普兰, J. 弗莱德 · 威斯顿著, 宋献中主译, 2003, 财务理论与公司政策, 东北财经大学出版社, 大连.)

[80] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross, 1980, An analysis of variable rate loan contracts, *Journal of Finance*, **35**, 389–403.

[81] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross, 1985, A theory of the term structure of

interest rates, *Econometrica*, **53**, №2, 385–407.

[82] Cox, J. C., R. A. Ross and M. Rubinstein, 1979, Option pricing: a simplified approach, *Journal of Finanancial Economics*, **7**, №3, 229–263.

[83] Cox, J. C., and M. Rubinstein, 1985, Options Markets, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[84] Cowles, A., 1933, Can stock market forecasters forecast? *Econometrica*, **1**, 309–324.

[85] Cowles, A., 1944, Stock Market Forecasting? *Econometrica*, **12**, №3/4, 206–214.

[86] Cowles, A., and H. E. Jones, 1937, Some a posteriori probabilities in stock market action, *Econometrica*, **5**, 280–294.

[87] Cummins, S. D., and H. German, 1994, An Asian option approach to the valuation of insurance futures contracts, *Review of Futures Markets*, **13**, 517–557.

[88] Czarnecki, M. O., 24 juin 1994, Modelisation des cours boursiers: le modèle stable (utilisation pratique et pricing d'option), Preprint, Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, Paris.

[89] Dacorogna, M. M., U. A. Müller, P. Embrechts and G. Samorodnitsky, May 30, 1995, Moment Condition for the *HARCH*(k) Models, "Olsen & Associates", Zürich.

[90] Dacorogna, M. M., U. A. Müller, R. J. Nagler, R. B. Olsen and O. V. Pictet, 1993, A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market, *Journal of International Money and Finance*, **12**, №4, 413–438.

[91] Dacorogna, M. M., U. A. Müller, O. V. Pictet and C. G. de Vries, March 17, 1995, The Distribution of Extremal Foreign Exchange Rate Returns in Extremely Large Data Sets, Preprint UAM, 1992-10-22, "Olsen & Associates", Research Institute for Applied Economics, Zürich.

[92] Dalang, R. C., A. Morton and W. Willinger, 1990, Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models, *Stochastics and Stochastics Reports*, **29**, №2, 185–201.

[93] Dana, R.-A., et M. Jeanblanc-Picqué, 1994, Marchés financiers en temps continu (Valorisation et equilibre), Economica, Paris.

[94] David, H., H. Hartley and E. Pearson, 1954, The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation, *Biometrika*, **41**, 482–493.

[95] Day, R. H., Complex economic dynamics: obvious in history, generic in theory, elusive in data, [383], 1–15.

[96] Deboeck, G. J., (Ed.), 1994, Trading on the Edge: Neural, Genetic, and Fuzzy Systems for Chaotic Financial Markets, Wiley, 1994.

[97] Delbaen, F., 1992, Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded, *Mathematical Finance*, **2**, 107–130.

[98] Delbaen, F., and W. Schachermayer, 1994, Arbitrage and free lunch with bounded risk for unbounded continuous processes, *Mathematical Finance*, **4**, №4, 343–348.

[99] Delbaen, F., and W. Schachermayer, 1999, A Compactness Principle for Bounded Se-

quences of Martingales with Applications, *Proceedings of the Seminar of Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Progress in Probability*, **45**, 137-173.

[100] Delbaen, F., and W. Schachermayer, 1994, A general version of the fundamental theorem of asset pricing, *Mathematische Annalen*, **300**, №3, 463–520.

[101] Delbaen, F., and W. Schachermayer, 1998, The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes. *Mathematische Annalen*, **312**, 215-250.

[102] Dellacherie, C., et P.-A. Meyer, 1975, Probabilités et Potentiel, Ch. I à IV, Hermann, Paris.

[103] Dellacherie, C., et P.-A. Meyer, 1980, Probabilités et Potentiel, Ch. V à VIII, Hermann, Paris.

[104] Devany, R. L., 1986, Introduction to Chaotic Dynamical Systems, The Benjamin/Cummings Publ. Co., Menlo Park, CA.

[105] De Vries, C. G., 1991, On the relation between *GARCH* and stable processes, *Journal of Econometrics*, **48**, 313–324.

[106] Ding, Z., C. W. J. Granger and R. F. Engle, 1993, A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83–106.

[107] Dixit, A. K., and R. S. Pindyck, 1994, Investment under Uncertainty, Princeton Univ. Press, Princeton. (中译本: (美) 阿维纳什・迪克西特, 罗伯特・平迪克著, 朱勇等译, 2002, 不确定条件下的投资, 中国人民大学出版社, 北京.)

[108] Dolan, E. G., C. D. Campbell and R. G. Campbell, 1988, Money, Banking and Monetary Policy, The Dryden Press, London. (有俄译本.)

[109] Doob, J. L., 1953, Stochastic Processes, Wiley, New York. (有俄译本.)

[110] Doob, J. L., 1984, Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart, Springer-Verlag, New York. (中译本: J・L・杜布著, 周性伟, 杨振明等译, 1993, 经典位势论与概率位势论, 科学出版社, 北京.)

[111] Dothan, L., 1978, On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, **6**, 59–69.

[112] Dothan, M. U., 1990, Prices in Financial Markets, Oxford Univ. Press, Oxford.

[113] Douady, R., February, 1996, Cylindrical Brownian Motions and Yield Curve Smoothing, Preprint, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.

[114] Drost, F. C., and T. E. Nijman, 1993, Temporal aggregation of *GARCH* processes, **61**, №4, 909–927.

[115] Drost, F. C., and B. J. M. Werker, 1996, Closing the *GARCH* gap: Continuous times *GARCH* modeling, *Journal of Econometrics*, **74**, №1, 31–57.

[116] Дубинс, Л. Е., Л. А. Шепп и А. Н. Ширяев, 1993, Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя, *Теории вероятностей и ее применения*, **38**, №4, 288–330. (英译文: Dubins, L. E., L. A. Shepp and A. N. Shiryaev, 1993, Optimal stopping rules and maximal inequalities for Bessel processes, *Theory of Probability and its Applications*, **38**, №2, 226–261.

[117] Duffie, D., 2001, Dynamic Asset Pricing Theory, 3rd ed., Princeton University Press, Princeton.

[118] Duffie, D., and J. M. Harrison, 1993, Arbitrage pricing of a Russian option and perpetual lookback options, *The Annals of Applied Probability*, **3**, №4, 379–406.

[119] Duffie, D., and R. Kan, 1996, A yield-factor model of interest rates, *Mathematical Finance*, **6**, №4, 379–406.

[120] Du Mouchel, W., 1973, Stable distributions in statistical inference: I. Symmetric stable distribution compared to other symmetric long-tailed distributions, *Journal of American Statistical Association*, **68**, 469–477.

[121] Dupire, B., 1993, Model Art, *RISK-magazin*, **6**, 118–124.

[122] Dupire, B., 1994, Pricing with a smile, *RISK-magazin*, **7**, №1, 18–20.

[123] Durrett, R., 1984, Brownian Motions and Martingales in Analysis, Wadsworth, Belmont, CA.

[124] Durrett, R., 1995, Probability: Theory and Examples, 2nd ed., Duxbury Press, Belmont, CA.

[125] Dybvig, P., and S. Ross, Arbitrage, in *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, Ed. J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, **1**, Macmillan, London, 100–106.

[126] Дынкин, Е. Б., 1963, Марковские Процессы, Физматгиз, Москва.

[127] Eberlein, E., and U. Keller, 1995, Hyperbolic distributions in finance, *Bernoulli*, **1**, №3, 281–299.

[128] Eberlein, E., and S. Raible, 1999, Term structure models driven by general Lévy processes, *Mathematical Finance*, **9**, 31–54.

[129] Ederington, L. H., and J. H. Lee, 1993, How markets process information: News releases and volatility, *Journal of Finance*, **48**, 1161–1191.

[130] Edwards R. D., and J. Magee, 1958, Technical Analysis of Stock Trends, 4th ed., Springfield, MA.

[131] Einstein, A., 1956, Investigation on the Theory of the Brownian Movement, (Ed. R. Fürth.) Dover, New York.

[132] Einstein, A., 1905, On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat, *Annalen der Physik*, **17**, 549–560.

[133] El Karoui, N., and H. German, 1991, A stochastic approach to the pricing of FRN's, *RISK-magazin*, **4**.

[134] El Karoui, N., and I. Karatzas, 1991, A new approach to the Skorokhod problem and its applications, **34**, №1/2, 57–82. correction: *ibid*, **36** (1991), №3/4, 265.

[135] El Karoui, N., R. Myneni and R. Viswanathan, 1991, The probabilistic theory of the American option, Preprint, Université de Paris VI, Paris.

[136] El Karoui, N., and M. C. Quenez, 1995, Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **33**, №1, 29–66.

[137] Emery, M., 1980, Compensation de processus V.F. non localement intégrables, *Lecture Notes in Mathematics*, **784**, 152–160.

[138] Emery, M., 1980, Metrisabilité de quelques espaces de processus aléatoires, *Lecture Notes in Mathematics*, **784**, 140–147.

[139] Emery, M., 1989, Stochastic Calculus in Manifolds (With an Appendix: A Short Presentation of Stochastic Calculus by P.-A. Meyer), Springer-Verlag, Berlin.

[140] Engle, R. F., 1982, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, №4, 987–1008.

[141] Engle, R. F., and T. Bollerslev, 1986, Modelling the persistence of conditional variance, *Econometrics Reviews*, **5**, 1–50.

[142] Engle, R. F., T. Ito and Lin Wen-Ling, 1990, Meteor showers or heat waves? Heteroskedastic intra-daily volatility in the foreign exchange market, *Econometrica*, **58**, 525–542.

[143] Engle, R. F., and J. R. Russell, Forecasting transaction rates: The autoregressive conditional duration model, [393], **4**.

[144] Esscher, F., 1932, On the probability function in the collective theory of risk, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **15**, 175–195.

[145] Evertsz, C. J. G., Self-similarity of high-frequency USD/DEM exchange rates, [393], **3**.

[146] Evertsz, C. J. G., and K. Berkner, 1995, Large deviation and self-similarity analysis of curves: DAX stock prices, *Chaos, Solutions and Fractals*, **6**, 121–130.

[147] Fama, E. F., 1970, Efficient capital markets: A review of theory and empirical work, *Journal of Finance*, **25**, 383–417.

[148] Fama, E. F., 1965, Portfolio analysis in a stable Paretian market, *Management Science*, **311**, №2, 409–419.

[149] Fama, E. F., 1971, Risk, return and equilibrium, *Journal of Political Economy*, **79**, 30–55.

[150] Fama, E. F., 1965, The behavior of stock market prices, *Journal of Business*, **34**, 420–429.

[151] Fama, E. F., and M. H. Miller, 1972, The Theory of Finance, Holt, Rinehard and Winston, Inc., New York.

[152] Fama, E. F., and R. Roll, 1971, Parameter estimates for symmetric stable distributions, *Journal of American Statistical Association*, **66**, 331–338.

[153] Fama, E. F., and R. Roll, 1968, Some properties of symmetric stable distributions, *Journal of American Statistical Association*, **63**, 817–836.

[154] Family, F., and T. Vicsek, (Eds), 1991, Dynamics of Fractal Surfaces, World Scientific Publ., Singapore.

[155] Feder, J., 1988, Fractals, Plenum Press, New York.

[156] Feller, W., 1966, An Introduction to Probability Theory and its applications, **2**, Wiley, New York. (有俄译本和中译本: (美) W. 费勒著, 李志阐、郑元禄译, 1994, 概率论及其应

用, 第2 卷, 科学出版社, 北京.)

[157] Feller, W., 1951, The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables, *Annals of Mathematical Statistics*, **22**, №3, 427–432.

[158] Fielitz, B. D., and J. P. Rozelle, 1983, Stable distributions and the mixtures of distributions hypotheses for common stock returns, *Journal of American Statistical Association*, **78**, №381, 28–36.

[159] Fisher, I., 1930, The Theory of Interests, Macmillan, New York. (中译本: (美) 菲歇尔著, 陈彪如译, 1999, 利息理论, 上海人民出版社, 上海.)

[160] Flood, M. D., 1994, Market structure and inefficiency in the foreign exchange market, *Journal of International Money and Finance*, **13**, №2, 131–138.

[161] Fokker, A. D., 1914, Die mittlere Energie rotierender Dipole im Strahlungsfeld, *Annalen der Physik*, **13**, №2, 131–138.

[162] Föllmer, H., January, 1990, Probabilistic Aspects of Options, Preprint, Helsinki University, Helsinki.

[163] Föllmer, H., and Yu. M. Kabanov, 1998, Optional Decomposition and Lagrange Multipliers, *Finance and Stochastics*, **2**, №1, 69–81.

[164] Föllmer, H., and Yu. M. Kabanov, 1996, Optional Decomposition Theorems in Discrete Time, Preprint, Humboldt University, Berlin.

[165] Föllmer, H., and Yu. M. Kabanov, 1997, Optional Decompositions under constraints, *Probability Theory and Related Fields*, **109**, №1, 1–25.

[166] Föllmer, H., Ph. Protter and A. N. Shiryaev, 1995, Quadratic covariation and an extention of Itô's formula, *Bernoulli*, **1**, №1/2, 149–170.

[167] Föllmer, H., and M. Schweizer, 1991, Hedging of contingent claims under incomplete information, in *Applied Stochastic Analysis (Stochastic Monographs, vol. 5)*, (Ed. M. H. A. Davis and R. J. Elliott), Gordon and Breach, London, 389–414.

[168] Föllmer, H., and D. Sondermann, 1986, Hedging of non-redundant contingent claims, in *Contributions to Mathematical Economics*, Ed. A. Mas-Colell and W. Hildenbrand, North-Holland, Amsterdam, 205–223.

[169] French, K. R., G. W. Schwert and R. Stambaugh, 1987, Expected stock returns and volatility, *Journal of Financial Economics*, **19**, 3–29.

[170] Friedman, A., 1975, 1976, Stochastic Differential Equations and Applications, vol. 1, 2, Academic Press, New York. (中译本: (美) 弗里德曼著, 吴让泉译, 1983, 随机微分方程及其应用, 科学出版社, 北京.)

[171] Frittelli, M., and P. Lakner, Arbitrage and free lunch in a general financial market model; the fundamental theorem of asset pricing, [336], 89–92.

[172] Гальчук, Л. И., 1974, О структуре некоторых мартингалов, *Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай)*, Ин-т физики и математики АН ЛитССР, Ч. И. Вильнюс, 7–32.

[173] Гамровски, Б., и С. Рачев, 1995, Финансовые модели, использующие

устойчивые законы, *Обозрение прикладной и промышленной математики*, ТБП, Москва, **2**, №4, 556–604. (法译文: Gamrowski, B., et S. T. Rachev, Modèles financiers utilisant les lois stables, Preprint.)

[174] Гельфонд, А. О., 1967, Исчисление конечных разностей, Изд, 3-е, доп., Наука, Москва. (英译本: Gel'fond, A. O., 1971, Calculus of Finite Differences, Authorized English translation of the 3rd Russian edition, Hindustan Publ. Corp., Delhi, India. 中译本: A.O.盖尔芬德著, 刘绍祖译, 1955–1956, 有限差计算, 高等教育出版社, 北京.)

[175] Geman, H., N. El Karoui and J. C. Rochet, 1995, Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing, *Journal of Applied Probability,* **32**, 443-458.

[176] George, T. J., G. Kaul and M. Nimalendran, 1991, Estimation of the bid-ask spread and its components: a new approach, *Review of Financial Studies,* **4**, 623–656.

[177] Gerber, H. U., and E. S. W. Shiu, 1994, Martingale approach to pricing American options, *ASTIN Bulletin*, **24**, 195–200.

[178] Gerber, H. U., and E. S. W. Shiu, 1994, Option pricing by Esscher transforms, *Transactions of the Society of Actuaries*, **46**, 99–191.

[179] Geske, R., and H. E. Johnson, 1984, The American put options valued analytically, *Journal of Finance*, **39**, 1511–1524.

[180] Ghashghaie, S., W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner and Y. Dodge, 1996, Turbulent cascades in foreign exchange markets, *Nature*, **381**, 27 June, 767–770.

[181] Ghysels, E., and J. Jasiak, Trading patterns: Time deformation and stochastic volatility in foreign exchange markets, [393], **1**.

[182] Гихман, И. И., и А.В. Скороход, 1968, Стохастические дифференциальные уравнения, Наукова думка, Киев. (英译本: I. I. Gihman and A. V. Skorohod, 1972, Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.)

[183] Гирсанов, И. В., 1960, О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, *Теория вероятностей и ее применения*, **5**, №3, 314–330. (英译文: Girsanov, I. V., 1962, On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, *Theory of Probability and its Applications*, **5**, №3, 285–301.)

[184] Glosten, L., and L. Harris, 1988, Estimating the components of the bid-ask spread, *Journal of Financial Economics*, **21**, 123–142.

[185] Golsten, L., and P. Milgrom, 1985, Bid, ask, and transaction prices in a special market with heterogeneously informed traders, *Journal of Financial Economics*, **14** (March), 21–42.

[186] Гнеденко, Б. В., 1954, Курс теории вероятностей, Изд. 2, ГИТТЛ, Москва; 1988, Изд. 6-е, перераб. и доп., Наука, Москва. (英译本: Gnedenko, B. V., 1988, The Theory of Probability, Mir Publ., Moskow; 中译本: Б. В. 格涅坚科著, 丁寿田译, 1956, 概率论教程, 人民教育出版社, 北京.)

[187] Gnedenko, B. V., 1943, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série

aléatoire, *Annals of Mathematics,* **44**, 423-453.

[188] Гнеденко, Б. В., и А. Н. Колмогоров, 1949, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, Москва. (英译本: Gnedenko, B. V., and A. N. Kolmogorov, 1954, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley Publ. Comp., Cambridge; 中译本: Гнеденко, Б. В., А. Н. Колмогоров 著, 王寿仁译, 1955, 相互独立随机变数之和的极限分布, 科学出版社, 北京.)

[189] Goodhart, C. A., 1989, "News" and the foreign exchange market, *Proc. Manchester Statist. Soc.,* 1–79.

[190] Goodhart, C. A., and A. Demos, 1990, Reuters screen images of the foreign exchange market: the deutschenmark/doller spot rate, *Journal of International Securities Markets*, **4**, 333-348.

[191] Goodhart, C. A., and L. Figliuoli, 1991, Every minute counts in financial markets, *Journal of International Money and Finance*, **10**, 23–52.

[192] Goodhart, C. A., and M. O'Hara, High frequency data in financial markets: issues and applications, [393], Introductory Lecture.

[193] Gouriéroux, Ch., 1992, Modèles *ARCH* et applications financières, Economica, Paris.

[194] Gouriéroux, C., and J.-P. Laurent, 1995, Dynamic Hedging in Discrete Time, Preprint, CREST, Paris.

[195] Gouriéroux, C., J.-P. Laurent and H. Pham, October, 1995, Quadratic Hedging and Numéraire, Preprint, Université de Marne-La Vallée, Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées.

[196] Granger, C. W. J., and P. Newbold, 1977, 1986 (2nd Ed.), Forecasting Economic Time Series, Academic Press, New York.

[197] Granger, C. W. J., and O. Morgenstern, 1970, Predictability of Stock Market Prices, D. C. Heath & Co., Lexington, MA.

[198] Granger, C. W. J., and T. Teräsvirta, 1993, Modelling Nonlinear Dynamic Relationships, Oxford University Press, Oxford.

[199] Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D.*, **9**, 189–208.

[200] Григелионис, Б. И., и А. Н. Ширяев, 1966, О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов, *Теория вероятностей и ее применения*, **11**, №4, 612–631. (英译文: Grigelionis, B. I., and A. N. Shiryaev, 1966, On Stefan's problem and optimal stopping rules for Markov processes, *Theory of Probability and its Applications*, **11**, №4, 541-558.)

[201] Grimmet, G. R., and D. R. Stirzaker, 198[illegible], Probability and Random Processes, Clarendon Press, Oxford.

[202] Guégan, D., 1994, Séries chronologiques non linéaires à temps discret, Economica, Paris.

[203] Guillaume, D. M., M. M. Dacorogna, R. D. Davé, U. A. Müller, R. B. Olsen, O. V. Hamon and B. Jacquillat, 1992, La marché français des actions, Presses Universitaires

de France, Paris.

[204] Guillaume, D. M., M. M. Dacorogna, R. R. Davé, U. A. Müller, R. B. Olsen, and O. V. Pictet, 1997, From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets, *Finance and Stochastics*, **1**, №2, 95–129.

[205] Guillaume, D. M., O. V. Pictet and M. M. Dacorogna, On the intra-day performance of *GARCH* processes, [393], **3**.

[206] Gumbel, E. J., 1960, Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, New York.

[207] Hagerman, R., 1978, More evidence on the distribution of security returns, *Journal of Finance*, **33**, 1213–1221.

[208] Hale, J., and H. Kogak, 1991, Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, New York.

[209] Halgreen, C., 1979, Self-decomposability of the generalized inverse Gaussian and hyperbolic distributions, *Zeitschrift für Wahrscheinlich keitstheorie und Verwandte Gebiete*, **47**, 13–17.

[210] Hall, P., 1982, On some simple estimates of an exponent of regular variation, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **44**, №1, 37–42.

[211] Hamilton, J. D., 1994, Time Series Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (中译本: (美) 詹姆斯D.汉密尔顿著, 刘明志译, 1999, 时间序列分析, 中国社会科学出版社, 北京.)

[212] Hannan, H. J., 1970, Multiple Time Series, Wiley, New York.

[213] Hansen, A. T., 1996, Complete Market Pricing in the Wiener Filtration without Existence of a Martingale Measure, Preprint, Aarhus University, Dept. of Operation Research, Aarhus.

[214] Harrison, J. M., and D. M. Kreps, 1979, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory*, **20,** 381–408.

[215] Harrison, J. M., and S. R. Pliska, 1981, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Processes and their Applications,* **11**, №3, 215–260.

[216] Harvey, C. R., and R. D. Huang, 1991, Volatility in the foreign currency futures market, *Review of Financial Studies*, *Journal of Financial Economics*, **22**, 229–252.

[217] Hasbrouck, J., 1988, Trades, Quotes, Inventories and Information, *Journal of Financial Economics*, **22**, 229–252.

[218] Hausman, J. A., A. W. Lo and A. C. McKinlay, 1991, An oderer probit analysis of transaction stock price, Working paper №3888, National Bureau of Economic Research.

[219] Heath, D., R. Jarrow and A. Morton, 1992, Bond pricing and the term structure of interest rates, *Econometrica*, **60,** №1, 77–106.

[220] Heston, S. I., 1992, A closed forms solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, №2, 333–343.

[221] High Frequency Data in Finance, 1993, Data set from "Olsen & Associates". E-mail: `hfdf@olsen.ch`.

[222] Hilborn, R. C., 1994, Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford Univ. Press, Oxford.

[223] Hill, B. M., 1975, A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *The Annals of Statistics*, **5**, №3, 1163–1173.

[224] Ho, T., and S. Lee, 1986, Term structure movements and pricing interest rates contingent claims, *Journal of Finance*, **41**, 1011–1029.

[225] Хоффман-Йёнсен, И., 1993, Устойчивые плотности, *Теория вероятностей и ее применения*, **38**, №2, 470–476. (英译文: Hoffman-Jørgensen, J., 1993, Stable densities, *Theory of Probability and its Applications*, **38**, №2, 350–355.

[226] Hofmann, N., E. Platen and M Schweizer, 1992, Option pricing under incompleteness and stochastic volatility, *Mathematical Finance*, **2**, 153–187.

[227] Hogan, K. C., Jr., and M. Melvin, 1994, Sources of meteor showers and heat waves in the foreign exchange market, *Journal of International Economics*, **37**, 239–247.

[228] Horne, J. C. van, 1984, Financial Market Rates and Flows, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. (中译本: (美) 詹姆斯 · C. 范霍恩著, 赵智文、余良标译, 2000, 金融市场利率与流量, 东北财经大学出版社, 沈阳.)

[229] Hsu Der-Ann, R. B. Miller and D. W. Wichern, 1974, On the stable Paretian behavior of stock-market prices, *Journal of American Statistical Association*, **69**, №345, 108–113.

[230] Huang, R. D., and R. W. Masulis, Spreads, dealer competition, and market regimes: a market microstructure analysis or FX trading, [393], **4**.

[231] Huberman, G., March, 1982, A simple approach to Arbitrage Pricing Theory, *Journal of Economic Theory*, **28,** 183–191.

[232] Hudson, M., 1992, The value in going out, in *From Black-Scholes to black holes*, Risk/Finex, London/New York; 183–186.

[233] Hull, J. C., 2005, Options, Futures, and Other Derivatives, 6th ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. (第 3 版有中译本：赫尔，J.著, 张陶伟译, 2000, 期权、期货和衍生证券, 华夏出版社, 北京.)

[234] Hull, J., and White, A., 1990, Pricing interest rate derivatives securities, *Review of Financial Studies*, **3,** №5, 573–592.

[235] Hull, J., and White, A., 1987, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, **42,** 281–308.

[236] Hurst, H., 1951, Long-term storage capacity of reservoirs, *Transactions of American Society of Civil Engineers*, **116**, 770–808.

[237] Ibbotson, R. G., and R. A. Sinquefield, 1986, Stocks, Bonds, Bills and Inflation: 1986 Year Book, Ibbotson & Associates, Chicago.

[238] Ибрагимов, И. А., и К. Е. Чернин, 1959, Об одновершинности устойчивых законов, *Теория вероятностей и ее применения*, **4**, №4, 453–456. (英译文: Ibragimov, I. A., and K. E. Cherkin, 1961, On the unimodality of stable laws, *Theory of Probability and its Applications*, **4**, №4, 417–419.)

[239] Ikeda, N. and S. Watanabe, 1989, Stochastic Differential Equations and Diffusion Pro-

cesses, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam.

[240] Ingersoll, J. E., 1987, Theory of Financial Decision Making, Rowman and Littlefield, London-Lanham.

[241] Иоффе, А. Д., и В. М. Тихомиров, 1974, Теория экстремальных задач, Наука, Москва. (德译本: Ioffe, A. D. und V. M. Tikhomirov, 1979, Theorie der Extrmalaufgaben, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.)

[242] Itô, K., 1946, On a stochastic integral equation, *Japan Academy. Proceedings*, **22**, 32–35.

[243] Itô, K., 1951, On stochastic differential equations, *Memoirs of the American Mathematical Society,* **4**, 1-89.

[244] Itô, K., 1944, Stochastic integral, *Imperial Academy. Tokyo. Proceedings*, **20**, 519–524.

[245] Itô, K., and H. P. McKean, 1965, Diffusion Processes and their Sample Paths, Springer-Verlag, New York. (俄译本: Ито, К., и Г. Маккин, 1968, Диффузионные процессы и их траектории, Мир, Москва.)

[246] Ito, T., R. F. Engle and Lin Wen-Ling, 1992, Where does the meteor shower come from? The role of stochastic policy coordination, *Journal of International Economics*, **32**, 221–240.

[247] Jacka, S. D., 1991, Optimal stopping and the American put, *Mathematical Finance*, **1**, №2, 1–14.

[248] Jacod, J., 1979, Calcul stochastique et problèmes de martingales, *Lecture Notes in Mathematics*, **714**, 1–539.

[249] Jacod, J., 1980, Intégrales stochastiques par rapport à une semimartingale vectorielle et changements de filtration, *Lecture Notes in Mathematics*, **784**, 161–172.

[250] Jacod, J., and A. N. Shiryaev, 1987, Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer-Verlag, Berlin. (俄译本: Жакод, Ж., и А. Н. Ширяев, 1994, Предельные теоремы для случайных процессов, **1, 2**, Физматлит, Москва.)

[251] Jacod, J., and A. N. Shiryaev, 1998, Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case, *Finance and Stochastics,* **2**, №3, 259–273.

[252] Jacquier, E., N. G. Polson and P. E. Rossi, 1994, Bayesian analysis of stochastic volatility models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **12**, №4, 371–417.

[253] Janicki, A., and A. Weron, 1994, Simulation and Chaotic Behavior of α-Stable Stochastic Processes, M. Dekker, New York.

[254] Jakubowski, A., J. Mémin and G. Pages, 1989, Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbb{D}^1$ de Skorokhod, *Probability Theory and Related Fields*, **81**, №1, 111–137.

[255] Jensen, B. A., and J. A. Nielsen, 1991, The Structure of Binomial Lattice Models for Bonds, Working paper №91.1, Copenhagen Business School, Aarhus University.

[256] Jamshidian, F., 1989, An exact bond option formula, *Journal of Finance*, **44**, №1, 205–209.

[257] Jørgensen, P. L., 1994, American Option Pricing, Preprint, The Faculty of Business

Administration, The Aarhus School of Business.

[258] Kabaila, P., 1983, On the asymptotic efficiency of estimators of the parameters of *ARMA* processes, *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 37–49.

[259] Кабанов, Ю. М., и Д. О. Крамков, 1994, Отсутствие арбитража и эквивалентные мартингальные меры: новое доказательство теоремы Харрисон-Плиски, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №3, 635–640. (英译文: Kabanov, Yu. M., and D. O. Kramkov, 1994, No-arbitrage and equivalent martingale measures: An elementary proof of the Harrison-Pliska theorem, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №3, 523–527.)

[260] Kabanov, Yu. M., and D. O. Kramkov, 1998, Asymptotic arbitrage in large financial markets, *Finance and Stochastics*, **2**, №, 143–172.

[261] Кабанов, Ю. М., и Д. О. Крамков, 1994, Большие финансовые рынки: асимптотический арбитраж и контигуальность, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 222–228. (英译文: Kabanov, Yu. M., and D. O. Kramkov, 1994, Large financial markets: Asymptotic arbitrage and contiguity, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 182–187.)

[262] Kallsen, J., and M. S. Taqqu, 1998, Option pricing in ARCH-type models, *Mathematical Finance*, **8**, 13-26.

[263] Kamke, E., 1943, Differentialgleichungen. Loesungsmethoden und Lösungen, Akad. Verlagsgesellschaft Becker & Eler Kom.-Ges., Leipzig. (俄译本: Камке, Э., 1950, Справочник по обыкновенные дифференциальным уравнениям, ИЛ, Москва. 中译本: (德) E.卡姆克著, 张鸿林译, 1977, 常微分方程手册, 科学出版社, 北京.)

[264] Kanter, M., 1975, Stable densities under change of scale and total variation inequalities, *The Annals of Probability*, **3**, №4, 697–707.

[265] Karatzas, I., 1988, On the pricing of American options, *Applied Mathematics and Optimization*, **17**, 37–60.

[266] Karatzas, I., and S. Shreve, 1988, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, Berlin.

[267] Karatzas, I., and S. Shreve, 1998, Method of Mathematical Finance, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[268] Kariya, T., 1993, Quantitative Methods for Portfolio Analysis, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[269] Kendall, M. G., 1953, The analysis of economic time-series, Part 1, Prices, *Journal of the Royal Statistical Society*, **96**, 11–25.

[270] Kendall, M., 1973, Time-series, Charles Griffin, London.

[271] Kendall, M., and A. Stuart, 1966, The Advanced Theory of Statistics, **3**, Charles Griffin.

[272] Kim, I. J., 1990, The analytic valuation of American options, *Review of Financial Studies*, **3**, 547–572.

[273] Klein, I., and W. Schachermayer, 1996, Asymptotic arbitrage in non-complete large

financial markets, *Теория вероятностей и ее применения*, **41**, №4, 927–934; *Theory of Probability and its Applications*, **41**, №4, 780–788.

[274] Klimasauskas, C. C., Neural Network Techniques, [96].

[275] Kloeden, P. E., and E. Platen, 1992, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.

[276] Колмогоров, А. Н., 1941, Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса, *Доклады Академии наук СССР*, **30**, 299–303. (英译文: Kolmogorov, A. N., 1941, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynold's numbers, *Comptes Rendus (Dokl) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, **30**, 301–305.)

[277] Колмогоров, А. Н., 1985, Математика и механика. Избранные труды. **1**, Наука, Москва. (英译本: Kolmogorov, A. N., 1991, Selected Works. **1**: Mathematics and Mechanics (ed. V. M. Tikhomirov), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.)

[278] Колмогоров, А. Н., 1986, Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды. **2**, Наука, Москва. (英译本: Kolmogorov, A. N., 1992, Selected Works. **2**: Probability Theory and Mathematical Statistics (ed. A. H. Shiryaev), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.)

[279] Колмогоров, А. Н., 1940, Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве (Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum), *Доклады Академии наук СССР*, **26**, №2, 115–118.

[280] Kolmogoroff, A. N., 1931, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Mathematische Annalen*, **104**, 415–458. (也参见 [278].) (中译本: 柯尔莫哥洛夫著, 丁寿田译, 1953, 概率论基本概念, 商务印书馆, 上海.)

[281] Kramkov, D. O., 1996, Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets, *Probability Theory and Related Fields*, **105**, №4, 459–479.

[282] Крамков, Д. О., и А. Н. Ширяев, 1996, О достаточных условиях равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов, Препринт, МИРАН, Москва. (也参见Труды Второго Европейского математического конгресса, 1996, Будапешт.)

[283] Крамков, Д. О., и А. Н. Ширяев, 1994, О расчетах рациональной стоимости “Русского опциона” в симметричной биномиальной модели (B, S)-рынка, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 191–200. (英译文: Kramkov, D. O., and A. N. Shiryaev, 1994, On the rational pricing of the “Russian option” for the symmetrical binomial model of a (B, S)-market, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 153–162.)

[284] Krouse, C. G., 1986, Capital Markets and Prices. Valuing Uncertain Income Streams, North-Holland, Amsterdam.

[285] Kreps, D., 1981, Arbitrage and equilibrium in economics with infinitely many commodities, *Journal of Mathematical Economics*, **8,** 15–35.

[286] Krugman, P., 1991, Target zones and exchange rate dynamics, *Quarterly Journal of Economics*, **106**, №3, 669–682.

[287] Крылов, Н. В., 1977, Управляемые процессы диффузионного типа, Наука, Москва.

[288] Krylov, N. V., 1995, Introduction to the Theory of Diffusion Processes, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[289] Küchler, U., K. Neumann, M. Sørensen and A. Streller, 1994, Stock Returns and Hyperbolic Distributions, Discussion paper №23, Humboldt University, Berlin.

[290] Lai, T. L., 1995, Sequential change-point detection in quality control and dynamic systems, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B,* **57**, №4, 613–658.

[291] Lai, T. L., and D. Siegmund, 1983, Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter, *The Annals of Statistics*, **11**, №2, 478–485.

[292] Lakner, P., 1993, Martingale measure for a class of right-continuous processes, *Mathematical Finance*,**3**, №1, 43–53.

[293] Lamberton, D., and B. Lapeyre, 1996, Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman and Hall, London. (原版为法文: Lamberton, D., et B. Lapeyre, 1991, Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, Ellipses, Paris.)

[294] Lanford, O., 1982, A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures, *American Mathematical Society. Bulletin*, **6**, №3, 427–434.

[295] Langevin, P., 1908, Sur la théorie du mouvement brownien, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, **146**, 530–533.

[296] Latin Dictionary (founded on Andrew's edition of Freund's latin dictionary revised, enlarged and in great part rewritten by Ch. T. Lewis, Ch. Short), 1966, Oxford Univ. Press, Oxford.

[297] Легостаева, И. Л., и А. Н. Ширяев, 1971, Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса, *Теория вероятностей и ее применения*, **16**, №2, 339–345. (英译文: Legostaeva, I. L., and A. N. Shiryaev, 1971, Minimax weight in a trend detection problem of a random process, *Theory of Probability and its Applications*, **16**, №2, 344–349.)

[298] Lévy, P., 1948, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris.

[299] Lin, S. J., 1995, Stochastic analysis of fractional Brownian motion, *Stochastics and Stochastics Reports*, **55**, 121–140.

[300] Lindley, D. V., 1961, Dynamic programming and decision theory, *Appl. Statist.*, **10**, №1, 39–51.

[301] Lintner, J., 1965, The valuation of risky assets and the selection of risky investments on stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, **47** (February),

13–34.

[302] Linton, O., 1993, Adaptive estimation in *ARCH* Models, *Econometric Theory*, **9**, 539–569.

[303] Липцер, Р. Ш., и А. Н. Ширяев, 1974, Статистика случайных процессов, Наука, Москва. (英译本: Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev, 1977, 1978, Statistics of random processes, I. General Theory; II. Applications; Springer-Verlag, New York.)

[304] Липцер, Р. Ш., и А. Н. Ширяев, 1986, Теория мартингалов, Наука, Москва. (英译本: Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev, 1989, Theory of Martingales, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.)

[305] Liu, T., C. W. J. Granger and W. P. Heller, Using the correlation exponent to decide whether an economic series is chaotic, [383].

[306] Lo, A., 1994, Neural networks and other nonparametric techniques in economics and finance, in *Blending Quantitative and Traditional Equity Analysis*, Association for Investment Management and Research, 25–36.

[307] Locke, P. R., and C. L. Sayers, 1993, Intra-day futures price volatility: information effects and variance persistence, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 15–30. (也参见: [383], 213–228.)

[308] Lockwood, L. J., and S. C. Linn, 1990, An examination of stock market return volatility during overnight and intraday periods, 1964–1989, *Journal of Finance*, **45**, 591–601.

[309] Loosignian, A. M., 1981, Foreign Exchange Futures, Dow Jones-Irwin, Homewood, IL.

[310] Loosignian, A. M., 1985, Stock Index Futures (Buying and Selling the Market Averages), Addison-Wesley, Reading, MA.

[311] Lorenz, H.-W., 1989, Nonlinear Dynamic Economics and Chaotic Motion, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, **334**, Springer-Verlag, New York.

[312] Malkiel, B. G., 2003, A Random Walk down Wall Street, Completely Revised and Updated Edition, W. W. Norton & Co., London. (1984, 1991 版有中译本: 马尔基尔, 1991, 漫步华尔街: 股票投资指南, 上海万国证券公司译, 上海翻译出版公司, 上海; 马尔基尔, 1994, 漫游华尔街: 90 年代最新投资指南, 苏云等译, 四川人民出版社, 成都; 伯顿・麦基尔, 2002, 漫步华尔街, 骆玉鼎、彭晗等译, 上海财经大学出版社, 上海.)

[313] Malliaris, A. G., and W. A. Brock, 1982, Stochastic Methods in Economics and Finance, North-Holland, Amsterdam. (中译本: (美) A. G. 马利亚里斯、W. A. 布罗克著, 陈守东、李小军、李元译, 2004, 经济学和金融学中的随机方法, 上海人民出版社, 上海.)

[314] Mandelbrot, B. B., 1977, Fractals: Form, Chance, and Dimension, Freeman, San Francisco. (中译本: (法) B. 曼德尔布洛特著, 文志英、苏虹译, 1999, 分形对象: 形、机遇和维数, 世界图书出版公司, 北京.)

[315] Mandelbrot, B. B., 1975, Les objects fractals, Flammarion, Paris.

[316] Mandelbrot, B. B., 1975, Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent process, *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **31**, 271–285.

[317] Mandelbrot, B. B., 1969, Robustness of the rescaled rang R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence, *Water Resources Research*, **5**, №5, 967–988.

[318] Mandelbrot, B. B., April, 1967, Some noises with $1/f$ spectrum: a bridge between direct current and white noise, *IEEE Transactions on Information Theory*, **1**, №3, 259–290.

[319] Mandelbrot, B. B., 1972, Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to R/S analysis, *Annals of Economic and Social Measurement*, **1**, №3, 259–290.

[320] Mandelbrot, B. B., 1982, The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman, San Francisco.

[321] Mandelbrot, B. B., 1960, The Pareto-Lévy law and the distribution of income, *International Economic Review*, №1, 79–106.

[322] Mandelbrot, B. B., 1963, The stable Paretian income distribution when the apparent exponent is near two, *International Economic Review*, № 4, 111–115.

[323] Mandelbrot, B. B., 1963, The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, **36**, 394–419.

[324] Mandelbrot, B. B., 1967, The variation of some other speculative prices, *Journal of Business*, **40**, 393–413.

[325] Mandelbrot, B. B., 1965, Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi: application à la loi climatologique de H. E. Hurst, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, **240**, 3274–3277.

[326] Mandelbrot, B. B., 1971, When can price be arbitrated efficiently? A limit of the validity of the random walk and martingale models, *Review of Economics and Statistics*, **53**, 225–236.

[327] Mandelbrot, B. B., and H. M. Taylor, 1967, On the distribution of stock price difference, *Operations Research*, **15**, №6, 1057–1062.

[328] Mandelbrot, B. B., and J. W. van Ness, 1968, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review*, **10**, №4, 422–437.

[329] Mandelbrot, B. B., and J. R. Wallis, 1969, Computer experiments with fractional Gaussian noises, I, II, III, *Water Resources Research*, **5**, 228–267.

[330] Mantegna, R. N., and H. E. Stanley, 1995, Scaling behaviour in the dynamics of an economic index, *Nature*, **376**, 46–49.

[331] Markowitz, H., 1990, Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets, Blackwell, Cambridge, MA. (中译本: (美) 哈利 · M. 马科维兹著, 朱菁、欧阳向军译, 2006, 资产组合选择和资本市场的均值-方差分析, 上海三联书店、上海人民出版社, 上海.)

[332] Markowitz, H., 1952, Portfolio selection, *Journal of Finance*, **7**, 77–91.

[333] Markowitz, H., 1959, 1991 Second ed., Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment, Basil Blackwell, Cambridge. (中译本: 哈里 · 马科维茨著, 刘军霞、张一驰译, 2000, 资产选择: 投资的有效分散化, 首都经济贸易大学出版社, 北京.)

[334] Martin, J. D., S. H. Cox, Jr., and R. D. McMinn, 1988, The Theory of Finance. Evidence

and Application, The Dryden Press, London.

[335] Математическая энциклопедия, В 5-титомаш, Советская энциклопедия, 1977–1985. (中译本: 维诺格拉多夫, И. М., 主编, 中国数学会《数学百科全书》编译委员会编译, 1994-2000, 数学百科全书, 科学出版社, 北京.)

[336] Mathematical Finance, 1995, Based on the proceedings of a workshop, held at IMA, University of Minnesota, Minneapolis, MN, USA 1992/93. Ed. M. H. A. Davis, D. Duffie, W. H. Fleming, S. E. Shreve, Springer-Verlag, New York.

[337] Mathematical Models in Finance, 1995, Ed. S. D. Howison, F. P. Kelly, P. Wilmott, Chapman & Hall, London.

[338] Маймин, З. Г., 1974, К вопросу о выделении детерминированной составляюшей случайного поля, *Теория веро-ятностей и ее применения*, **19**, №3, 533–546. (英译文: Maimin, Z. G., 1974, On detection of the deterministic component of a random field, *Theory of Probability and its Applications*, **19**, №3, 506–521.)

[339] McCuloch, J. H., 1986, Simple consistent estimators of stable distribution parameters, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **15**, №4, 1109–1136.

[340] McKean, H.-P., 1965, A free boundary problem for the heat equation arising from a problem of mathematical economics, *Industrial Management Review*, **6**, 32–39.

[341] Мельников, А. В., 1997, Финансовые рынки: стохастический анальз и расчет производных ценных бумаг, ТВП, Москва.

[342] Melnikov, A. V., and A. N. Shiryaev, 1996, Criteria for the absence of arbitrage in the financial market, in *Frontiers in Pure and Applied Probability, II (Proceedings of the Fourth Russian-Finish Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Moscow, October 3–8, 1993)*, TVP, Moscow, 121–134.

[343] Mémin, J., 1980, Espaces de semi martingales et changements de probabilité, *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **52**, №1, 9–39.

[344] Merrill Lynch, Pierce, Fenner, Smith, Inc., October, 1986, Security Risk Evaluation.

[345] Merton, R. C., 1992, Continuous-Time Finance, Rev. ed., Blackwell, MA/Oxford, UK. (中译本: (美) 罗伯特 · C · 默顿著, 郭多祚 、王远 、徐占东译, 2005, 连续时间金融, 中国人民大学出版社, 北京.)

[346] Merton, R., 1973, Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, №4 (Spring), 141–183.

[347] Meyer, P.-A., 1977, Notes sur les intégrales stochastiques, I. Intégrales hilbertiennes, *Lecture Notes in Mathematics*, **581**, 446–461.

[348] Meyers, M. G., 1970, A Financial History of the United States, Columbia Univ. Press, New York.

[349] Mikhalevich, 1958, Bayesian testing of two hypothesis on mean value of normal process, *Vestnik Kiev University*. **I**, №1, 101–104. (原文为乌克兰文.)

[350] Miller, M., and F. Modigliani, 1961, Dividend policy, growth and the valuation of shares, *Journal of Business*, **34** (October), 411–433.

[351] Mills, T. C., 1995, The Econometric Modelling of Financial Time Series, Cambridge Univ. Press, Cambridge. (中译本: (英) 特伦斯・C・米尔斯著, 俞卓菁译, 2002, 金融时间序列的经济计量学模型, 经济科学出版社, 北京.)

[352] Mittnik, S., and S. T. Rachev, 2000, Stable Paretian Models in Finance, Wiley, New York.

[353] Mittnik, S., and S. T. Rachev, 1993, Modeling asset returns with alternative stable distributions, *Econometric Reviews*, **12**, №3, 261–330.

[354] Mittnik, S., and S. T. Rachev, 1989, Stable distributions for asset returns, *Applied Mathematics Letters*, **2**, №3, 301–304.

[355] Modigliani, F., and M. Miller, 1963, Corporation income taxes and the cost capital: a correction, *American Economic Review*, **53** (June), 433–443. (中译文见: 莫迪利亚尼文萃, 林少宫、费剑平译, 2001, 首都经济贸易大学出版社, 北京, 152–166.)

[356] Modigliani, F., and M. Miller, 1958, The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment, *American Economic Review*, **48** (June), 261–297. (中译文见: 莫迪利亚尼文萃, 林少宫、费剑平译, 2001, 首都经济贸易大学出版社, 北京, 106–151.)

[357] Morris, K. M., and A. M. Siegel, 1993, Guide to Understanding Money and Investing, Lightbulb Press.

[358] Mullin, T., (Ed.) 1994, The Nature of Chaos, Clarendon Press, Oxford.

[359] Musiela, M., and D. Sondermann, 1993, Different Dynamical Specifications of the Term Structure of Interest Rates and their Implications, Preprint, Bonn University, Dept. of Statistics, Bonn.

[360] Müller, U. A., M. M. Dacorogna, R. D. Davé, R. B. Olsen, O. V. Pictet and J. E. Weizsäcker, March 20, 1995, Volatilities of Different Time Resolutions - Analyzing the Dynamics of Market Components, Preprint UAM, 1995-01-12, "Olsen & Associates", Research Institute for Applied Economics, Zürich. (也参见[393], **1**.)

[361] Müller, U. A., M. M. Dacorogna, R. D. Davé, O. V. Pictet, R. B. Olsen and J. R. Ward, 1993, Fractals and intrinsic time - A Challenge to Econometricians, Working paper, Technical Report UAM 1993-08-16, "Olsen & Associates", Research Institute for Applied Economics, Zürich.

[362] Müller, U. A., M. M. Dacorogna, R. B. Olsen, O. V. Pictet, M. Schwarz and C. Morgenegg, 1990, Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intra-day analysis, *Journal of Banking and Finance*, **14**, 1189–1208.

[363] Myneni, R., 1992, The pricing of the American option, *Annals of Applied Probability*, **2**, №1, 1–23.

[364] Nelson, D. B., 1990, *ARCH* models as diffusion approximations, *Journal of Econometrics*, **45**, 7–38.

[365] Nelson, D. B., 1996, Asymptotic filtering theory for multivariate *ARCH* models, *Journal of Econometrics*, **71**, №1/2, 1–47.

[366] Nelson, D. B., 1990, Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, *Econometrics*, **59**, 347–370.

[367] Nelson, D. B., 1992, Filtering and forecasting with misspecified *ARCH* model, *Journal of Econometrics*, **52**, 61–90.

[368] Новиков, А. А., 1972, Об одном тождестве для стохастических интегралов, *Теория вероятностей и ее применения*, **17**, №4, 761–765. (英译文: Novikov, A. A., On an identity for stochastic integrals, *Theory of Probability and its Applications*, **17**, 717–720.)

[369] Настольная книга валютного дилера. 1992, СП "Crocus International". Верба, Москва.

[370] O'Brein, J., and S. Shrivastava, 1995, Financial Analysis and Security Trading, Carnegie Mellon University, Pittsburg, PA. (有俄译本: О'Брайен Дж., С. Шривастава, 1995, Финансовый Анализ и Тороговля Цнными Бумагами, Дело Лтд, Москва.)

[371] Osborne, M. F. M., 1959, Brownian motion in the stock market, *Operations Research*, **7**, 145–173. (也参见: [78], 100–128.)

[372] Pagan, A. R., 1984, Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressors, *International Economic Review*, **25**, 221–247.

[373] Pagan, A. R., and G. W. Schwert, 1990, Alternative models for conditional stock volatility, *Journal of Econometrics*, **45**, 267–290.

[374] Paley, R. E. A. C., and N. Wiener, 1934, Fourier transforms in the complex domain, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **19**.

[375] Paley, R. E. A. C., N. Wiener and A. Zygmund, 1933, Notes on random functions, *Mathematische Zeitschrift*, **37,** 647–668.

[376] Parkinson, M., 1977, Option pricing: The American put, *Journal of Business*, **50**, 21–36.

[377] Pareto, V., 1897, Cours d'Economie Politique, Lausanne, Switzerland.

[378] Peitgen, H.-O., H. Jürgens and D. Saupe, 1992, Chaos and Fractals, Springer-Verlag, New York.

[379] Peitgen, H.-O., and P. H. Richter, 1986, The beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin. (俄译本: Пайтген, Х.-О., и П. Х. Рихтер, 1993, Красота Фракталов. Образы Комплексных Динамических Систем, Мир, Москва. 中译本: (德) H.-O. 派特根, (德) P. H. 里希特著, 井竹君、章祥荪译, 1994, 分形—美的科学. 复动力系统图形化, 科学出版社, 北京.)

[380] Peltier, R.-F., and J. L. Véhel, 1996, A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion, Preprint, INRIA, Recquencourt.

[381] Peltier, R.-F., and J. L. Véhel, August, 1995, Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results, Preprint №2645, INRIA, Rocquencourt.

[382] Percival, D. B., 1993, Three curious properties of the sample variance and autocovariance for stationary processes with unknown mean, *American Statistician*, **47**, 274–276.

[383] Pesaran, M. H., and S. M. Potter, (Eds.), 1993, Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics, Wiley, New York.

[384] Pesaran, M. H., and H. Samiei, 1992, Estimating limited-dependent rational expections models with an application to exchange rate determination in a target zone, *Journal of Econometrics*, **53**, 141–163.

[385] Peters, E. E., 1991, Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility, Wiley, New York.

[386] Peters, E. E., 1994, Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics, Wiley, New York.

[387] Петраков, Н. Я., и В. И. Ротарь, 1985, Фактор неопределенности и управление экономическими системами, Наука, Москва.

[388] Петроченко, П. Ф., (ред.) 1992, Англо-русский толковый словарь по бизнесу, СП “Арт-Бизнес-Центр”, Москва.

[389] Planck, M., 1917, Über einen Satz der statistischen Dynamic und seine Erweiterung in der Quantentheorie, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 324–341.

[390] Praetz, P., 1972, The distribution of share price changes, *Journal of Business*, **45**, 49–55.

[391] Priestley, M., 1988, Non-linear and Nonstationary Time Series, Academic Press, New York.

[392] Prigent, J.-L., 1996, Incomplete markets: Convergence of options values under the minimal martingale measure, Preprint №9526, THEMA, University of Cergy-Pontoise; also in *Proceedings of the 13th International Conference AFFI (Geneva, 1996).*

[393] Proceedings of the First International Conference on High Frequency Data in Finance (HFDF-I, March 29–31, 1995): Introductory Lecture and 4 volumes, “Olsen & Associates”, Research Institute for Applied Economics, Zürich.

[394] Прохоров, Ю. В., 1956, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, *Теория вероятностей и ее применения*, **1**, №2, 177-238. (英译文: Prohorov, Yu. V., 1956, Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, *Theory of Probability and its Applications*, **1**, №2, 157–214.)

[395] Protter, Ph., 1990, Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach, Springer-Verlag, Berlin.

[396] Protter, Ph., and D. Talay, 1997, The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations, *Annals of Probability*, **25**, №1, 393–423.

[397] Puu, T., 1989, Nonlinear Economic Dynamics, *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems*, №336, Springer-Verlag, New York.

[398] Qiggins, J. B., 1987, Option values under stochastic volatility. Theory and empirical estimates, *Journal of Financial Economics*, **19**, 351–372.

[399] Rabemananjara, R., and J. M. Zakoian, Threshold *ARCH* Models and asymmetries in volatility, [383].

[400] Рачев, С. Т., и Л. Рушендорф, 1994, Модели и расчеты контрактов с опционами, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 150–190. (英译文: Rachev, S. T., and L. Rüshendorf, 1994, Models for option prices, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 120–152.)

[401] Redhead, K., and S. Huhhes, 1988, Financial Risk Management, Gower Publishing Company. (俄译本: Рэдхэд, К., и С. Хьюс, 1996, Управление финансовыми рынками, Инфра-М, Москва.)

[402] Revuz, D., and M. Yor, 1991, Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag, Berlin.

[403] Ridley, M., October, 1993, The mathematics of markets, *The Economist.*

[404] Risk Metrics, November, 1994, Morgan Guaranty Trust Company, New York.

[405] Roberts, H. V., 1959, Stock-market "patterns" and financial analysis: Methodological suggestions, *Journal of Finance*, **14,** 1–10.

[406] Rockafellar, R. T., 1970, Convex Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (俄译本: Рокафеллар, Р. Т., 1973, Выпуклый Анализ, Мир, Москва.)

[407] Rogers, L. C. G., 1995, Equivalent martingale measures and no-arbitrage, *Stochastics and Stochastics Reports*, **51**, 41–50.

[408] Rogers, L. C. G., and D. Taylor, (eds.), 1997, Numerical Methods in Finance, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[409] Рогозин, Б. А., 1965, О некоторых классах процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятностей и ее применения*, **10**, 479–483. (英译文: Rogozin, B. A., On some classes of processes with independent increments, *Theory of Probability and its Applications*, **10**, 479–483.)

[410] Roll, R., and S. A. Ross, 1980, An empirical investigation of the arbitrage pricing theory, *Journal of Finance*, **35**, 1073–1103.

[411] Ross, S. A., 1989, Information and volatility: The no-arbitrage martingale approach to timing and resolution irrelevancy, *Journal of Finance*, **44**, 1–18.

[412] Ross, S. A., 1976, The arbitrage theory of capital asset pricing, *Journal of Economic Theory*, **13,** 341–360.

[413] Рубинштейн, Л. И., 1967, Проблема Стефана, Звайгзне, Рига.

[414] Rubinstein, M., December 1991, Exotic Options, Working paper №220, Institute of Business and Economic Research, University of California, Berkeley.

[415] Rubinstein, M., 1992, Guiding force, in *From Black-Scholes to black holes*, Risk/Finex, London/ New York, 39–48.

[416] Sacks, J., and D. Ylvisaker, 1978, Linear estimation for approximately linear models, *Annals of Statistics*, **6**, №5, 1122–1137.

[417] Samorodnitsky, G., A class of shot noise models for financial applications, [393], **3**.

[418] Samorodnitsky, G., and M. S. Taqqu, 1994, Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapman & Hall, New York.

[419] Samuelson, P. A., 1965, Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review*, **6,** 41–49.

[420] Samuelson, P. A., 1965, Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review*, **6,** 41–49.

[421] Sandmann, K., and D. Sondermann, 1997, A note on the stability of log-normal interest rate models and the pricing of eurodollar futures, *Mathematical Finance*, **7**, №2, 119–125.

[422] Sandmann, K., and D. Sondermann, 1993, A term structure model and the pricing of interest rate derivatives, *Review of Futures Markets*, **12**, №2, 391–423.

[423] Sato, Ken-iti, 1995, Lévy Processes on the Euclidean Spaces, Preprint, Institute of Mathematics, University of Zürich, Zürich.

[424] Schachermayer, W., 1992, A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time, *Insurance: Mathematics & Economics*, **11**, 249–257.

[425] Schachermayer, W., 1994, Martingale measure for discrete-time processes with infinite horizon, *Mathematical Finance*, **4**, №1, 25–55.

[426] Schmidt, W. M., 1997, On a general class of one-factor models for the term structure of interest rates, *Finance and Stochastics*, **1**, №1, 3–24.

[427] Schnidrig, R., and D. Würtz, Investigation of the volatility and autocorrelation function of the USD/DEM exchange rate on operational time scales, [393], **3**.

[428] Schuster, H. G., 1984, Deterministic Chaos. An Introduction, Physik Verlag, Weinheim. (俄译本: Шустер, Г., 1988, Детерминированный хаос. Введение, Мир, Москва.)

[429] Schweizer, M., 1995, On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition, *Stochastic Analysis and Applications*, **13**, №5, 573–599.

[430] Schweizer, M., 1995, Variance-optimal hedging in discrete time, *Mathematics of Operations Research*, **20**, №1, 1–32.

[431] Schwert, G. W., and P. J. Segnin, 1990, Heteroskedasticity in stock returns, *Journal of Finance*, **45**, 1129–1155.

[432] Scott, L. O., 1987, Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation and an application, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **22**, 419–438.

[433] Sharpe, W. F., 1964, Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, **19** (September), 425–442.

[434] Шепп, Л. А., и А. Н. Ширяев, 1994, Новый взгляд на расчеты “Русского опциона”, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 130–149. (英译文: Shepp, L. A., and A. N. Shiryaev, A new look at pricing of the “Russian option”, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 103–119.)

[435] Shepp, L. A., and A. N. Shiryaev, 1993, The Russian option: Reduced regret, *Annals of Applied Probability*, **3**, №3, 631–640.

[436] Shiller, R. J., 1989, Stock Market Volatility, MIT Press, Cambridge, MA. (中译本: 罗伯特・希勒著, 文忠桥、卞东译, 2007, 市场波动, 中国人民大学出版社, 北京.)

[437] Shimko, D., 1992, Finance in Continuous Time. A Primer, Kolb Publ. Co., Miami.

[438] Ширяев, А. Н., 1994, Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития, *Обозрение прикладной и промышленной математики*, ТВП, Москва, **1**, №5, 684–697.

[439] Ширяев, А. Н., 1989, Вероятность, Изд. 2-е, перераб. и доп., Наука, Москва. (英译本: Shiryaev, A. N., 2004, Probability, translated by R.P. Boas, 2nd ed., 世界图书出版公司, 北京.)

[440] Ширяев, А. Н., 1961, Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима, *Доклады Академия наук СССР*, **138**, №5, 1039–1042. (英译文: Shiryaev, A. N., 1961, The problem of the most rapid detection of a disturbance in a stationary process, *Soviet Mathematics, Dokl.*, **2**, 795–799.)

[441] Ширяев, А. Н., 1976, Статистический последовательный анализ, Изд. 2, Наука, Москва. (英译本: Shiryaev, A. N., 1978, Optimal stopping rules, Springer-Verlag, New York.)

[442] Ширяев, А. Н., 1994, Стохастические проблемы финансовой математики, *Обозрение прикладной и промышленной математики*, ТВП, Москва, **1**, №5, 780–820.

[443] Ширяев, А. Н., Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков и А. В. Мельников, 1994, К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов, I. Дискретное время, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 21–79. (英译文: Shiryaev, A. N., Yu. M. Kabanov, D. O. Kramkov and A. V. Mel'nikov, 1994, Toward the theory of pricing of options of both European and American types, I. Discrete time, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 14–60.)

[444] Ширяев, А. Н., Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков и А. Б. Мельников, 1994, К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов, II. Непрерывное время, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 80–129. (英译文: Shiryaev, A. N., Yu. M. Kabanov, D. O. Kramkov and A. B. Mel'nikov, 1994, Toward the theory of pricing of options of both European and American types, II. continuous time, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 61–102.)

[445] Shiryaev, A. N., and V. G. Spokoinyi, 1997, On sequential estimation of an autoregressive parameter, *Stochastics and Stochastic Reports*, **60**, №3+4, 219–240.

[446] Скороход, А. В., 1967, Случайные процессы с независимыми приращениями, Наука, Москва.

[447] Sin, C. A., 1966, Strictly Local Martingales and Hedge Ratios on Stochastic Volatility Models, Cornell University, Graduate School, Ithaka, NY.

[448] Smith, R. L., 1992, Estimating dimension in noisy chaotic time series, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **54**, №2, 329–351.

[449] Smith, R. L., 1992, Optimal estimation of fractal dimension, *Nonlinear Modeling and Forecasting (SFI Studies in the Science of Complexity, Proceedings,* **12***)*, Ed. M. Casdagli and S. Eubank, Addison-Wesley, Reading, MA.

[450] Sobel, R., 1977, Inside Wall Street: Continuity and Change in the Financial District, W. W. Norton & Co., New York.

[451] Soros, G., 1994, The Alchemy of Finance. Reading the Mind of the Market, Wiley, New York. (俄译本: Сорос, Дж., Алхимия финансов, Ихфра-М., Москва. 中译本: (美)乔治・索罗斯著, 孙忠、侯纯译, 1999, 金融炼金术, 海南出版社, 海口.)

[452] Спокойный, В. Г., и А. Н. Ширяев, 1993, Статистические эксперименты и статистические решения (рукопись монографии), Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Москва. (英译本: Shiryaev, A. N., and V.G. Spokoiny, 2000, Statistical experiments and decisions: asymptotic theory, World Scientific, Singapore, River Edge, NJ.)

[453] Stein, E. M., and C. J. Stein, 1991, Stock prices distributions with stochastic volatility: an analytic approach, *Review of Financial Studies*, **4**, №4, 727–752.

[454] Стохастические аспекты финансовой математики. Тематический выпуск, 1994, *Теория вероятносей и ее применения*, **39**, №1. (英译本: Stochastic Aspects of Financial Mathematics, 1994, *Theory of Probability and its Applications, (Special Issue)*, **39**, №1.)

[455] Stricker, C., 1990, Arbitrage et lois de martingale, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **26**, №2, 451–460.

[456] Strogatz, S. H., 1994, Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison-Wesley, Reading, MA.

[457] Stroock, D. W., and S. R. S. Varadhan, 1969, Diffusion processes with continuous coefficients, I, II, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **22**, №3, 345–400; №4, 479–530.

[458] Svensson, L. E. O., 1991, Target zones and interest rate variability, *Journal of International Economics*, **31**, 27–54.

[459] Taqqu, M. S., 1988, Self-similar processes, in *Encyclopaedia of Statistical Sciences*, (Eds. S. Kotz and N. Johnson), Wiley, New York, 352–357.

[460] Taylor, S., 1986, Modeling Financial Time Series, Wiley, New York.

[461] Tong, H., 1990, Nonlinear Time Series, Oxford Univ. Press, Oxford.

[462] Tong, H., 1990, Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach, Clarendon Press, Oxford.

[463] Тихонов, А. Н. и А. А. Самарский, 1972, Уравнения математической физики, Наука, Москва. (中译本: (苏)吉洪诺夫、萨马尔斯基, 黄克欧等译, 1961–1963, 数学物理方程, 人民教育出版社, 北京.)

[464] Timmermann, A., 1995, Scales and stock markets, *Nature*, **376**, 18–19.

[465] Tversky, A., 1990, The Psychology of Risk. Quantifying the Market Risk Premium Phenomena for Investment Decision Making, Institute of Chartered Financial Analysis,

Charlottesville, VA.

[466] Uhlenbeck, G. E., and L. S. Ornstein, 1930, On the theory of Brownian motion, *Physical Review*, **36**, 823–841.

[467] van Moerbeke, P. L. J., 1976, On optimal stopping and free boundary problems, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **60**, №2, 101–148.

[468] Varian, H. R., (Ed.), 1993, Economic and Financial Modeling with Mathematica (TELOS - The Electronic Library of Science), Springer-Verlag, Berlin.

[469] Vegle, S. R., (Ed.), 1987, Stocks, Bonds, Options, Futures, Institute of Finance, Pretice Hall, New York.

[470] Вентцель, А. Д., 1975, Курс теории случайных процессов, Наука, Москва. (英译本: Venttsel, A. D., 1981, A Course in the Theory of Stochastic Processes, McGraw Hill, New York.)

[471] Веретенников, А. Ю., 1979, О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений, *Теория вероятносей и ее применения*, **24**, №2, 348–360. (英译文: Veretennikov, A. Yu., 1980, On the strong solutions of stochastic differential equations, *Theory of Probability and its Applications,* **24**, 354–366.)

[472] Vasicek, O., 1977, An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.

[473] Voss, R. F., 1992, $1/f$ noise and fractals in economic time series, in *Fractal Geometry and Computer Graphics*, Ed. J. L. Encarnação, H.-O. Peitgen, and G. Englert, Springer-Verlag, Berlin, 45–52.

[474] Walter, C., September, 1995, Levy-stability under addition and fractal structure of markets, 5th AFIR International Colloquium, Bruxelles.

[475] Weyl, H., 1967, Bemerkungen zum Begriff der Differential-Quotenen gebrochener Ordnung, *Viertelschr. Naturforsch. Ges. Zürich,* **62**, 296–302.

[476] Wiener, N., 1923, Differential space, *Journal of Mathematical Physics. Math. Inst. Tech.*, **2**, 131–174.

[477] Wiggins, J. B., 1987, Option values under stochastic volatility. Theory and empirical evidence, *Journal of Financial Economics*, **19**, 351–372.

[478] Wilmott, P., J. Dewynne and S. Howison, 1993, Option Pricing: Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, Oxford.

[479] Wilmott, P., S. Howison and J. Dewynne, 1996, The Mathematics of Financial Derivatives. (A Student Introduction), Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[480] Working, H., 1934, A random-difference series for use in the analysis of time series, *Journal of American Statistical Association*, **29**, 11–24.

[481] Zhou, B., Forecasting Foreign Exchange Rates Subject to De-Volatilization, Working paper №3510, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA. (也参见: [393], **4**.)

[482] Зоновьев, С. З., 25 июня 1996, Инфраструктурный фактор рынка ценных бумаг, *Деловой экспресс (газета)*, №23.

[483] Золотарев, В. М., 1958, Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов, *Теория вероятносей и ее применения*, **3**, №2, 197–200. (英译文: Zolotarev, V. M., 1958, Distribution of superposition of infinitely divisible processes, *Theory of Probability and its Applications,* **3**, №2, 185–188.)

[484] Золотарев, В. М., 1983, Одномерные устойчивые распределения, Наука, Москва. (英译本: Zolotarev, V. M., 1986, One-dimensional Stable Distributions, Amer. Math. Soc., Providence, RI.)

[485] Звонкин, А. К., 1974, Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, "уничтожающее" снос, *Математический сборник*, **93**, №1, 129–149. (英译文: Zvonkin, A. K., 1975, A transformation of the phase space of a diffusion process that removes the drift, *Mathematics of the USSR, Sbornik*, **22**, 129–149.)

索引. 数学符号

索引. 英汉术语对照

R

S

T

U

V

X

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x，★为最新出版。

书号	书名	著译者
18303-0	微积分学教程（第一卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程（第二卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程（第三卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
34526-1	数学分析原理（第一卷）(第 9 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
35185-9	数学分析原理（第二卷）(第 9 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析（第一卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析（第二卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
34524-7	自然科学问题的数学分析	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义（第 3 版）	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、В. Н. 丘巴里阔夫
25439-6	数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
31004-7	工科数学分析习题集 (根据 2006 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第一册)	沐定夷、谢惠民 编著，卫瑞霞、吴茂庆 审校
32356-6	吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第二册)	谢惠民、沐定夷 编著，卫瑞霞、吴茂庆 审校
32293-4	吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第三册)	谢惠民、沐定夷 编著，卫瑞霞、吴茂庆 审校
30578-4	复分析导论（第一卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论（第二卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步（第 7 版）	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
29221-3	实变函数论（第 5 版）	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法（第 6 版）	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程（第 6 版）	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义（第 2 版）	[俄] О. А. 奥列尼克
25766-3	偏微分方程习题集（第 2 版）	[俄] А. С. 沙玛耶夫
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫
27249-9	数值方法（第 5 版）	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫，Н. П. 热依德科夫，Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论（第一卷）基础代数（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论（第二卷）线性代数（第 3 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论（第三卷）基本结构（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用（第一卷）曲面几何、变换群与场（第 5 版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯

书号	书名	著译者
21492-5	现代几何学：方法与应用（第二卷）流形上的几何与拓扑（第 5 版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用（第三卷）同调论引论（第 2 版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
28888-9	微分几何与拓扑学习题集（第 2 版）	[俄] А. С. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、А. Т. 福明柯
22059-9	概率（第一卷）(第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率（第二卷）(第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. В. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
	随机金融数学基础（第一卷）事实·模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
	随机金融数学基础（第二卷）理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法（第 4 版）	[俄] В. И. 阿诺尔德
18530-0	理论力学（第 3 版）	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学（第一卷）(第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学（第二卷）(第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
29223-7	非线性动力学定性理论方法（第一卷）	[俄] L. P. Shilnikov 等
29464-4	非线性动力学定性理论方法（第二卷）	[俄] L. P. Shilnikov 等
35533-8	苏联中学生数学奥林匹克试题汇编（1961—1992）	苏淳 编著